

Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα Ι

Φυλλάδιο Ασκήσεων 4 - Ακαδημαϊκό έτος 2011–2012

Υπέρθεση και διάσπαση διαδικασιών Poisson

- (1) Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ . Κάθε γεγονός της $\{N(t)\}$ καταγράφεται ως τύπου 1 με πιθανότητα $1/3$ και ως τύπου 2 με πιθανότητα $2/3$, ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα γεγονότα. Έστω $\{N_1(t)\}$ η απαριθμητρια διαδικασία των γεγονότων τύπου 1 και $\{N_2(t)\}$ η απαριθμητρια διαδικασία των γεγονότων τύπου 2. Να υπολογιστεί η πιθανότητα

$$P(N_1(3) = 5, N(3) = 11 | N_2(1) = 4).$$

- (2) Έστω $\{N_1(t) : t \geq 0\}$ και $\{N_2(t) : t \geq 0\}$ δυο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς 3 και 2 αντίστοιχα και $\{N(t) : t \geq 0\}$ η υπέρθεσή τους. Να υπολογιστεί η δεσμευμένη μέση τιμή

$$E[N_1(t) | N(t) = 10].$$

- (3) Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ . Κάθε γεγονός της $\{N(t)\}$ καταγράφεται ως τύπου 1 με πιθανότητα p και ως τύπου 2 με πιθανότητα $1 - p$, ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα γεγονότα. Έστω $\{N_1(t)\}$ η απαριθμητρια διαδικασία των γεγονότων τύπου 1 και $\{N_2(t)\}$ η απαριθμητρια διαδικασία των γεγονότων τύπου 2. Έστω, επίσης, T_1 και T_2 οι χρόνοι πρώτων γεγονότων στις $\{N_1(t)\}$ και $\{N_2(t)\}$ αντίστοιχα. Να υπολογιστεί η από κοινού συνάρτηση κατανομής των T_1, T_2 , δηλαδή η συνάρτηση

$$F_{T_1, T_2}(t_1, t_2) = P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2).$$

- (4) Ένα σύστημα υπόκειται σε k διαφορετικά είδη ηλεκτρικών διαταραχών (shocks). Οι ηλεκτρικές διαταραχές των διαφόρων τύπων συμβαίνουν ανεξάρτητα και μάλιστα οι ηλεκτρικές διαταραχές τύπου i συμβαίνουν σύμφωνα με μια Poisson διαδικασία με ρυθμό λ_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Μια ηλεκτρική διαταραχή τύπου i προκαλεί βλάβη στο σύστημα με πιθανότητα p_i , ανεξάρτητα από οτιδήποτε άλλο. Έστω T ο χρόνος ζωής του συστήματος (δηλαδή ο χρόνος μέχρι να πάθει βλάβη από κάποια ηλεκτρική διαταραχή) και S το είδος της ηλεκτρικής διαταραχής που προκάλεσε τη βλάβη. Να υπολογιστεί η πιθανότητα

$$P(T > t, S = i).$$

- (5) Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ . Κάθε γεγονός της $\{N(t)\}$ καταγράφεται με πιθανότητα $1/3$ ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα γεγονότα στη διαδικασία $\{N_1(t)\}$. Από την άλλη μεριά θεωρούμε τη διαδικασία $\{N_2(t)\}$ που καταγράφει μόνο τα k -οστά γεγονότα της $\{N(t)\}$, όπου το k είναι πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή το 3ο, το 6ο, το 9ο κλπ. γεγονός. Επομένως και η $\{N_2(t)\}$ καταγράφει με πιθανότητα $1/3$ αλλά όχι ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα γεγονότα.

(α') Είναι η $\{N_2(t)\}$ διαδικασία Poisson;

(β') Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(N_1(t) = 3 | N_2(t) = 1)$.