

Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα I

Φυλλάδιο Ασκήσεων 2 - Ακαδημαϊκό έτος 2011–2012

Εκθετική κατανομή - Ορισμοί διαδικασίας Poisson

- (1) Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ . Να υπολογιστεί η πιθανότητα
- $$P(N(t) = k | N(t+s) = k+m), \quad t \geq 0, s \geq 0, k \geq 0, m \geq 0.$$
- (2) Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ . Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(N(t) \text{ είναι περιττός}), t \geq 0$.
- (3) Ένα σύστημα έχει δυο εξαρτήματα και χαλάει μόλις κάποιο από τα εξαρτήματα χαλάσει. Ο χρόνος ζωής του πρώτου εξαρτήματος ακολουθεί την εκθετική κατανομή $Exp(\lambda)$ (δηλαδή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$), ενώ ο χρόνος ζωής του δεύτερου εξαρτήματος ακολουθεί την κατανομή $Gamma(n, \mu)$ (δηλαδή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_2(t) = \mu^n t^{n-1} e^{-\mu t} / (n-1)!, t \geq 0$). Υποθέτοντας ότι οι χρόνοι ζωής των εξαρτημάτων είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, να βρεθεί ο μέσος χρόνος ζωής του συστήματος των δυο εξαρτημάτων.
- (4) Υποθέτουμε ότι πελάτες φθάνουν σε μια τράπεζα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 8 πελάτες την ώρα. Να υπολογιστούν τα ακόλουθα:
- (α') Η μέση τιμή και η διασπορά του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα μέσα σε ένα οκτάωρο λειτουργίας της τράπεζας.
- (β') Η πιθανότητα κανείς πελάτης να μη μπει στην τράπεζα τα τελευταία 15 λεπτά μιας εργάσιμης μέρας.
- (γ') Η συνδιακύμανση του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα μεταξύ 9.00 και 11.00 και του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα την ίδια μέρα μεταξύ 10.00 και 11.00.
- (δ') Η συνδιακύμανση του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα μεταξύ 9.00 και 11.00 και του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα την επόμενη μέρα μεταξύ 10.00 και 11.00.
- (5) Θεωρούμε $\{N_1(t) : t \geq 0\}$ και $\{N_2(t) : t \geq 0\}$ δυο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Έστω A_i να είναι ο αριθμός των γεγονότων στη διαδικασία $\{N_i(t)\}$ πριν το πρώτο γεγονός στην άλλη διαδικασία, $i = 1, 2$.
- (α') Να υπολογιστούν οι συναρτήσεις πιθανότητας των $A_i, i = 1, 2$.
- (β') Να εξεταστεί αν οι A_1 και A_2 είναι ανεξάρτητες.