27/5/2013

Ουρές Αναμονής
Υπολογισμοί

(1) Βασικά αποτελέσματα

1) Ευστάθεια $\iff \rho = \lambda \cdot b < c$
2) N. Little : $E[Q] = \lambda \cdot E[S]$
3) Ιδιοτ. μεμον. αφιξ: Μεμον. αφίξεις $\Longrightarrow Q^- \overset{d}{=} Q^+$
4) Ιδιότητα PASTA: Poisson αφίξεις $\Longrightarrow Q^- \overset{d}{=} Q$

(2) M/M/1/1 ουρά

- Poisson(λ) διαδ. αφιξ
- exp(μ) χρόνος εξυπηρέτησης
- 1 υπηρέτης
- Χωρητικότητα 1

$Q(t) = \#$ πελατών

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \end{tikzcd}$$

N. Little

$E[Q] = \lambda \cdot E[S]$

$E[S] = P[Q^- = 0] \cdot \frac{1}{\mu} + P[Q^- = 1] \cdot 0$

$E[Q] = 0 \cdot P[Q=0] + 1 \cdot P[Q=1] = p_1$

$P[Q^- = 0] = r_0 \underset{\text{PASTA}}{=} p_0$

$\Longrightarrow p_1 = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} p_0 = \rho \cdot p_0$ ← $1 \cdot \frac{1}{\mu}$: ρυθμός συνωστισμού

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = \rho \cdot P_0 \\ P_0 + P_1 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \underset{\substack{\parallel \\ r_0 \\ \parallel \\ d_0}}{P_0} = \frac{1}{1+\rho}, \quad \underset{\substack{\parallel \\ r_1 \\ \parallel \\ d_1}}{P_1} = \frac{\rho}{1+\rho}$$

και $E[Q] = \dfrac{\rho}{1+\rho}$, $E[S] = \dfrac{1}{\mu(1+\rho)}$

③ $M/M/1$ ουρά ← Μπορούμε να βρούμε τα πάντα για αυτή!

- Poisson(λ) διαδ. αφιξ
- exp(μ) χρ. εξυπ
- 1 υπηρέτης
- Χωρητικότητα = ∞
- FCFS

$Q(t) = \#$ πελ. τη στιγμή t.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 3 \arrow[l, bend left, "\mu"] & \cdots \end{tikzcd}$$

$\rho = \lambda \cdot \dfrac{1}{\mu}$

$E[Q] = ;$ $\qquad E[S] = ;$

Συνήθης διαδικασία...

1) Ν. Little

2) Δεσμεύω στο πόσοι πελάτες ήταν παρόντες κατά την άφιξή μου.

Ν. Little $\quad E[Q] = \lambda \cdot E[S]$

$$E[S] = \sum_{n=0}^{\infty} P(Q^- = n)\, \underbrace{E[S \mid Q^- = n]}_{}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} r_n \overbrace{(n+1) \cdot \frac{1}{\mu}}^{}$$

$$= \frac{1}{\mu} \cdot E[Q^- + 1]$$

$$= \frac{1}{\mu}\left(E[Q^-]+1\right)$$

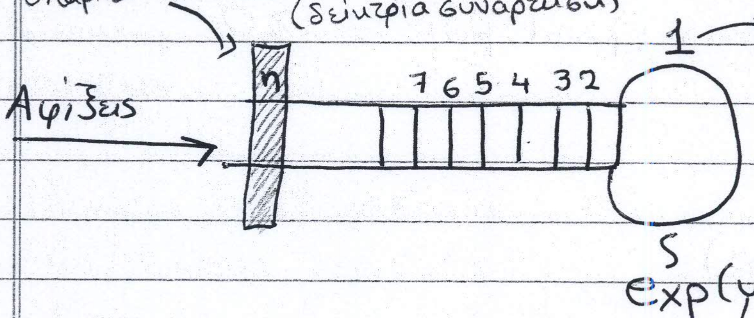
PASTA

$$E[Q^-] \overset{d}{=} E[Q] \quad \Rightarrow = \frac{1}{\mu}\left(E[Q]+1\right)$$

Άρα
$$\left.\begin{array}{l} E[Q] = \lambda \cdot E[S] \\ E[S] = \dfrac{E[Q]+1}{\mu} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad E[Q] = \frac{\rho}{1-\rho}, \qquad E[S] = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

στη n-οστή θέση θα υπάρχει είτε ένας είτε κανένας πελάτης (δείκτρια συνάρτηση)

Θέση 1, εκεί όπου ο υπηρέτης εξυπηρετεί



$P_0 = 1-\rho$ (από Ν. Little στο χώρο εξυπ. (Θέση 1) - μάλιστα ισχύει πιο γενικά στο GI/G/1)

Ν. Little στο σύστημα "n-οστή θέση"

$E[\#$ πελ στην n-οστή θέση$] = P(Q \geq n)$

Για να υπάρχει πελάτης στη n-οστή θέση πρέπει στο σύστημα να υπάρχουν τουλάχιστον n-πελάτες.

Ρυθμός αφίξεων στη n-οστή θέση $= \lambda P[Q^- \geq n-1]$

$E[$χρόνος παραμονής πελάτη στη n-οστή θέση$] = 1/\mu$

<u>Θ. Little</u>:

$$P(Q \geq n) = \lambda P[Q^- \geq n-1] \cdot \frac{1}{\mu}$$

$$\Rightarrow \sum_{i \geq n} p_i = \rho \sum_{i \geq n-1} r_i, \quad n \geq 1$$

Αφαιρώντας για $n, n+1$

$$\left(\sum_{i\geq n+1} p_i = \rho \sum_{i\geq n} r_i \quad , \quad \sum_{i\geq n} p_i = \rho \sum_{i\geq n-1} r_i\right)$$

$$p_n = \rho\, r_{n-1} \,,\; n\geq 1$$

$$\xRightarrow{PASTA} p_n = \rho \cdot p_{n-1} \,,\; n \geq 1$$

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= 1-\rho \\ p_n &= \rho \cdot p_{n-1} \,,\; n\geq 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow p_n = (1-\rho)\rho^n \,,\; n \geq 0$$

Ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή!

Άρα $Q \sim Geom(\rho)$

$$Q^- \overset{d}{=} Q^+ \overset{d}{=} Q$$

S = χρόνος παραμονής πελατών

$$\tilde{F}_S(s) = E[e^{-sS}]$$

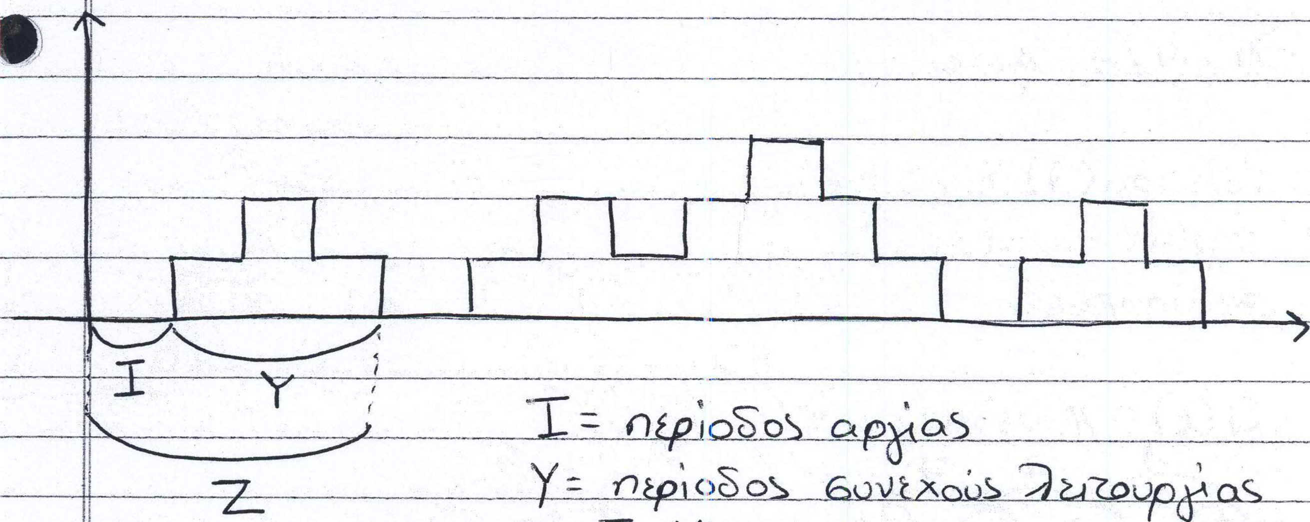
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(Q^- = n)\, E[e^{-sS} \mid Q^- = n]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^n \underbrace{\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{n+1}}_{\text{μετασχ. } L\text{-}S \text{ της } Gamma(n+1,\mu)}$$

$$= \frac{(1-\rho)\mu}{\mu+s} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho\mu}{\mu+s}\right)^n$$

$$= \frac{(1-\rho)\mu}{\mu+s} \cdot \frac{1}{1-\frac{\rho\cdot\mu}{\mu+s}}$$

$$= \frac{(1-\rho)\mu}{s+(1-\rho)\mu}$$ που είναι ο μετασχ L-S της $Exp(\mu(1-\rho))$



I = περίοδος αργίας
Y = περίοδος συνεχούς λειτουργίας
$Z = I + Y$: κύκλος απασχόλησης
ή λειτουργίας του συστήματος

Θεωρώ διαδικασία αμοιβής με τιμές:
0 → κενό σύστημα
1 → απασχ. υπηρ

Από ΣΑΘΑ:

$1-\rho$

P_0 = Μακροπρόθεσμο ποσοστό κενού συστήματος

$$= \frac{E[I]}{E[Z]}$$

Άρα $E[I] = \frac{1}{\lambda}$

$$E[Z] = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}$$

$$E[Y] = E[Z] - E[I]$$

$$= \frac{1}{\lambda(1-\rho)} - \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$$

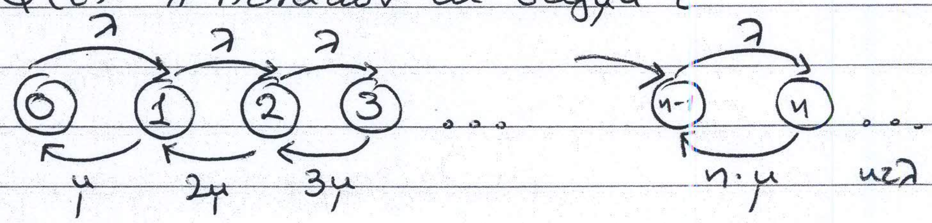
$$= \frac{1}{\mu(1-\rho)} = E[S]$$

! Ο μέσος χρόνος συνεχ. λειτουργ αυτού του συστήματος είναι όσο ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη.

④ M/M/∞ ουρά

- Poisson(λ) διαδ. αφιξ
- exp(μ) χρ. εξυπ
- ∞ υπηρέτες

$Q(t)$ = # πελατών τη στιγμή t



$E[Q]=\lambda \cdot E[S]$

Επίσης $S \sim exp(\mu)$

$\Rightarrow E[S]=\frac{1}{\mu}$

$\Rightarrow E[Q]=\frac{\lambda}{\mu}=\rho$

Αποδεικνύεται ότι: $p_n=d_n=r_n=e^{-\rho}\cdot\frac{\rho^n}{n!}$, $n=0,1,\ldots$

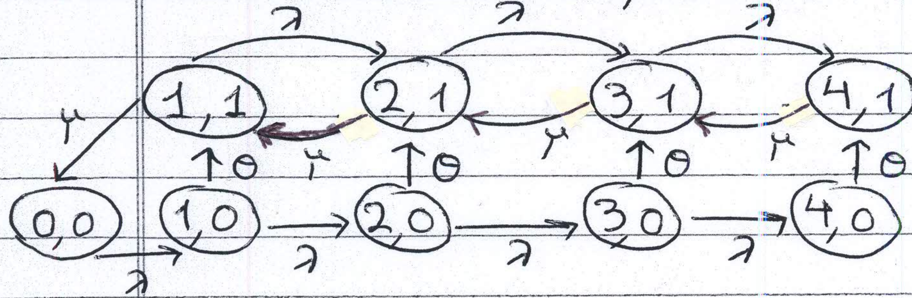
Άρα.. $Q \sim Poisson(\rho)$.

⑤ M/M/1 ουρά με χρόνους εκκίνησης

- Poisson(λ) διαδ. αφιξ
- exp(μ) χρόνοι εξυπ
- 1 υπηρ
- ∞ χωρητικότητα
- FCFS
- Όταν το σύστημα αδειάσει, ο υπηρέτης απενεργοποιείται. Όταν έρθει ο πρώτος πελάτης, τότε μπαίνει σε λειτουργία ο χρόνος εκκίνησης (προθέρμανσης) exp(θ) και μετά αρχίζει κανονικά η εξυπηρέτηση.

$Q(t) = \#$ πελ $\qquad (Q(t), I(t))$

$I(t) =$ κατάσταση υπηρέτη



$E[Q] = ? \qquad E[S] = ?$

N. Little: $E[Q] = \lambda E[S]$

Επίσης $\cancel{E[S] = \sum_{n=0}^{\infty} P(Q^- = n) E[S \mid Q^- = n]}$

Δε μου αρκεί να ξέρω πόσους πελάτες βρίσκω μπαίνοντας στο σύστημα, αλλά και σε τι κατάσταση βρίσκω τον υπηρέτη → ενεργ / → ανενεργ

Άρα κάνω μια πιο αναλυτική δέσμευση

$$\Rightarrow E[S] = \sum_{n=0}^{\infty} P(Q^- = n, I^- = 0) \overbrace{E[S \mid Q^- = n, I^- = 0]}^{\frac{1}{\theta} + \frac{n+1}{\mu}} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} P(Q^- = n, I^- = 1) \underbrace{E[S \mid Q^- = n, I^- = 1]}_{\frac{n+1}{\mu}}$$

$$\sum_{n,i} p(n,i) g(n,i) = E[g(Q^-, I^-)]$$

$$\Rightarrow E[S] = \frac{E[Q^-] + 1}{\mu} + \underbrace{P(I^- = 0)}_{\underbrace{1 - (\text{πιθ. απασχ υπηρέτη})}_{1-\rho}} \cdot \frac{1}{\theta}$$

πιθανότητα μπαίνοντας να βρει το σύστημα απενεργ. όπου θα περιμένω $\frac{1}{\theta}$, και ούτως ή άλλως θα περιμένω να εξυπ όσοι είναι παρόντες και εγώ (όπου ο καθένας θα περιμένει $1/\mu$).

Άρα: $E[Q] = \lambda E[S]$

$$E[S] = (1-\rho)\frac{1}{\theta} + \frac{E[Q]+1}{\mu}$$

$$\Downarrow$$

$$E[Q] = \frac{\lambda(1-\rho)}{\theta} + \rho(E[Q]+1)$$

$$\Downarrow$$

$$E[Q] = \frac{\lambda}{\theta} + \frac{\rho}{1-\rho}$$

Τελικά όλοι πληρώνουν $1/\theta$ παραπάνω...

$$E[S] = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

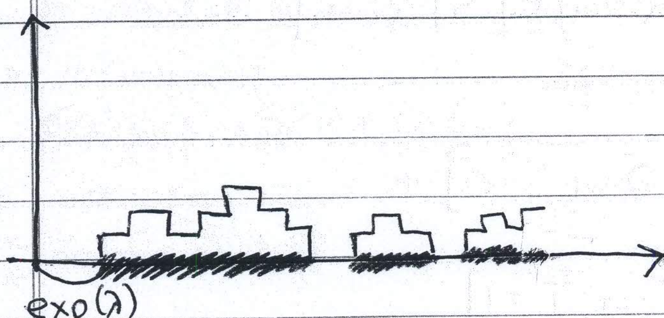
⑥ Επέκταση σε συστήματα με γενικούς χρόνους εξυπηρέτησης

M/G/1/1 – Εντελώς ανάλογο με M/M/1/1

M/G/∞ – Εντελώς ανάλογο με M/M/∞

M/G/1
- Poisson(λ) διαδ. αφ ξ
- Γενικοί χρόνοι εξυπηρ. $X \sim G(x)$
- 1 υπηρέτης
- ∞ χωρητικότητα
- FCFS

– Πιο δύσκολο



$$E[Q] = \lambda E[S]$$

$$E[S] = \underbrace{P[Q^- = 0]}_{1-\rho}\, \overbrace{E[S \mid Q^- = 0]}^{E[X]} + P[Q^- \geq 1]\, \underbrace{E[S \mid Q^- \geq 1]}_{E[X_e] + E[Q^- \mid Q^- \geq 1] E[X]}$$

Τα μαγειρέψουμε και...

$$\Longrightarrow E[Q] = \lambda(1-\rho)E[X] + \lambda\rho E[X_e] + \lambda E[\underbrace{Q^- \cdot 1[Q^- \geq 1]}_{Q^- \,\overset{d}{=}\, Q}]\, E[X]$$

X_e είναι ο υπολειπόμ. χρόνος ανανέωσης σε ανανεωτ. διαδ. με ενδιάμ. χρόνους $\sim G(x)$

$$E[Q] = \lambda(1-\rho)E[X] + \lambda\rho E[X_e] + \rho E[Q]$$

$$\Rightarrow E[Q] = \lambda E[X] + \frac{\lambda\rho E[X_e]}{1-\rho}$$

$$E[S] = E[X] + \frac{\rho}{1-\rho} E[X_e]$$

$$\boxed{E[X_e] = \frac{E[X^2]}{2E[X]}}$$