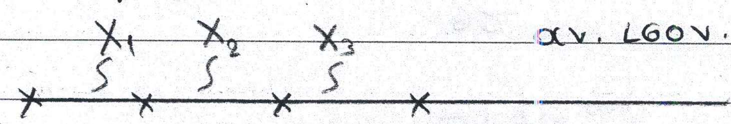
(Οικονόμου) 13/04/2013

# Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα I

## Μάθημα 18ο

## Ανανεωτική Θεωρία

Υπενθυμίσεις:



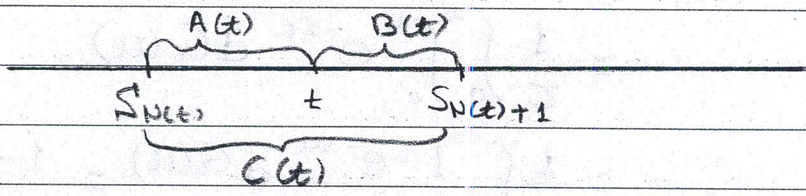

αν. ισον. $\sim G(x)$

Βασικοί υπολογισμοί:

$S_n,\ N(t),\ M(t)=E[N(t)]$

Βασικά αποτελέσματα:

ΣΑΘΑ, Αναν. Εξισ., ΒΑΘ




$$F_{B(\infty)}(x)=\lim_{t\to\infty}P(B(t)\le x)=\frac{\int_0^x(1-G(u))\,du}{\tau}$$

$$E[B(\infty)]=\lim_{t\to\infty}E[B(\infty)]=\frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}$$

$(\tau=E[X_i],\ \sigma^2=Var[X_i])$

$X_i$: ενδιαμ. χρόνος μεταξύ δύο γεγον.

$B(\infty)$: Χρόνος μεταξύ τυχαίας χρονικής στιγμής και επόμενου γεγονότος.

① Κατανομή ισορ. της αναν. διαδ. $B(\infty)$

σ.κ. $G_e(x) = F_{B(\infty)}(x) = \dfrac{\int_0^x (1-G(u))\,du}{\tau}, \quad x > 0$

σ.π.π. $g_e(x) = f_{B(\infty)}(x) = \dfrac{1-G(x)}{\tau}, \quad x > 0$

LS $\tilde{G}_e(s) = \tilde{F}_{B(\infty)}(s) = \dfrac{1-\tilde{G}(s)}{\tau s}$

Αποδ.:

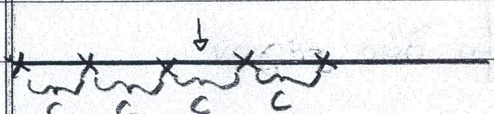
$$\tilde{G}_e(s) = \tilde{F}_{B(\infty)}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dF_{B(\infty)}(t)$$
$$= \int_0^\infty e^{-st} \cdot \frac{1-G(t)}{\tau}\, dt$$
$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty e^{-st} \int_t^\infty dG(u)\, dt$$
$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty \int_0^u e^{-st}\, dG(u)$$
$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty \frac{1-e^{-su}}{s}\, dG(u) = \frac{1-\tilde{G}(s)}{\tau s}$$

② Σχέση G και Ge

1) $X = c$

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \geq c \end{cases} \Rightarrow X_e \sim Unif([0,c])$$

$$G_e(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x}{c}, & 0 \leq x \leq c \\ 1, & x > c \end{cases}$$




αναλυτικά έχουμε:

Αποδ.:

$$\tilde{G}(s) = E[e^{-sX}] = e^{-sc}$$
$$\Rightarrow \tilde{G}_e(s) = \frac{1-\tilde{G}(s)}{\tau s} = \frac{1-e^{-sc}}{c s} = \int_0^c e^{-st}\frac{1}{c}\, dt$$

**2/ $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$**

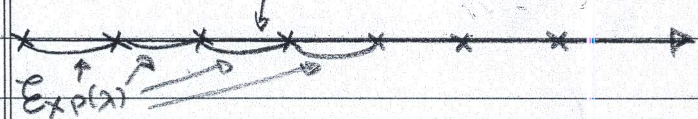
$$G(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases} \Longrightarrow \underline{X_e \sim \mathcal{E}xp(\lambda)}$$

Αποδ:

$$\tilde{G}(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$$

$$\Longrightarrow \tilde{G}_e(s) = \frac{1-\tilde{G}(s)}{\tau s} = \frac{1-\frac{\lambda}{\lambda+s}}{\frac{1}{\lambda}\cdot s} = \frac{\frac{s}{\lambda+s}}{\frac{s}{\lambda}} = \frac{\lambda}{\lambda+s}$$

**3/ $X \sim Gamma(2,\lambda)$** $\Longrightarrow X_e \sim$ μίξη με πιθ. 1/2 $Gamma(2,\lambda)$ $\mathcal{E}xp(\lambda)$




$$g_e(x) = \frac{1}{2}\lambda\cdot e^{-\lambda x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda^2}{1!}x e^{-\lambda x}, \quad x>0$$

Αποδ:

$$\tilde{G}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2$$

$\Downarrow$

$$\tilde{G}_e(s) = \frac{1-\tilde{G}(s)}{\tau s} = \frac{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2}{\frac{2}{\lambda}\cdot s} = \frac{\frac{(\lambda+s)^2-\lambda^2}{(\lambda+s)^2}}{\frac{2s}{\lambda}} = \frac{\frac{(2\lambda+s)\cancel{s}}{(\lambda+s)^2}}{\frac{2\cancel{s}}{\lambda}}$$

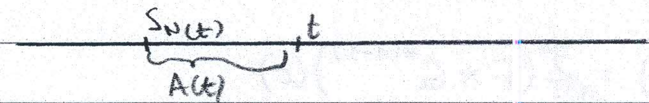
$$= \frac{2\lambda^2+\lambda s}{2(\lambda+s)^2} = \frac{A}{\lambda+s} + \frac{B}{(\lambda+s)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+s} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2$$

$\Longrightarrow \ldots$

**③ Οριακή κατανομή της ηλικίας**

$A(t) = t - S_{N(t)}$ ηλικία




**Κλειδί:** $\{A(t) > x\} = \{$όχι γεγ. στο $[t-x, t]\}$

$= \{B(t-x) > x\}$

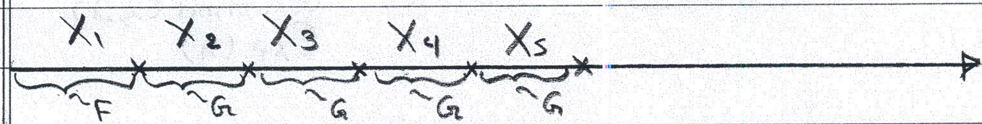
κλειδί

$$F_{A(\infty)}(x) = \lim_{t\to\infty} P(A(t)\le x) = 1 - \lim_{t\to\infty} P(A(t)>1) \overset{\text{κλειδί}}{=} 1 - \lim_{t\to\infty} P(B(t-x)>x)$$

$$= \lim_{t\to\infty} P(B(t-x)\le x) = \lim_{t\to\infty} P(B(t)\le x) = \frac{\int_0^x (1-G(u))\,du}{\tau} = \widehat{G}_e(x)$$

$$E[A(\infty)] = \lim_{t\to\infty} E[A(t)] = \frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}$$

## ④ Η γενική ανανεωτική διαδ.




$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ανεξ.
$X_1 \sim F$
$X_2, \ldots, X_n \sim G$

$N(t) = \#$ γεγον. στο $(0,t]$ ← γεν. αναν. διαδ.

$S_n =$ χρόνος του $n^{ου}$ γεγον.
$N(t) = \#$ γεγον. στο $(0,t]$
$M(t) = E[N(t)]$

Εδώ εντοπίζουμε το πρόβλημα

$$F_{S_n}(t) = P(S_n\le t) = P(X_1+X_2+\ldots+X_n\le t) = (F * G^{*(n-1)})(t)$$

$$P_0(t) = P(N(t)=0) = P(S_1>t) = 1-P(S_1\le t) = 1-F(t)$$

$$P_n(t) = P(N(t)=n) = P(S_n\le t< S_{n+1}) = P(S_n\le t) - P(S_{n+1}\le t)$$

$$= (F * G^{*(n-1)})(t) - (F * G^{*n})(t), \quad n\ge 1$$

$$M(t) = E[N(t)] = E\left[\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{S_n\le t\}}\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n\le t) = \sum_{n=1}^{\infty} (F * G^{*(n-1)})(t)$$

$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{F}(s)}{1-\tilde{G}(s)}$$

▶ Συχνά σε εφαρμογές παίρνουμε $F = G_e$

Τότε

$$M(t) = \frac{t}{\tau} \longleftarrow \text{Μέση τιμή της } G(t)$$

<u>Απόδειξη:</u>

$$F = G_e \Longrightarrow \tilde{F}(s) = \tilde{G}_e(s) = \frac{1-\tilde{G}(s)}{\tau s}$$

$$\Longrightarrow \tilde{M}(s) = \frac{\tilde{F}(s)}{1-\tilde{G}(s)} = \frac{1}{\tau s}$$

$$\Longrightarrow M(t) = \frac{1}{\tau} \cdot t$$

⑤ <u>Άσκηση (Φυλ. 7/2)</u>

$\{N(t)\}$ αναν. διαδ.

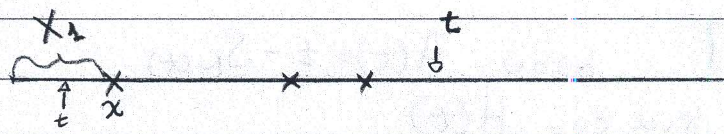
$G(t)$ καταν. ενδιάμ. χρόνων

$H(t) = E[N(t)(N(t)-1)]$

1/ Να γραφεί μια αναν. εξισ. για την $H(t)$

2/ Να βρεθεί η $H(t)$

<u>Λύση:</u>




$$H(t) = E[N(t)(N(t)-1)] = \int_0^{\infty} E[N(t)(N(t)-1) \mid X_1 = x]\, dG(x)$$

Όμως

$$E[N(t)(N(t)-1) \mid X_1 = x] = \begin{cases} 0 & , 0 \le t < x \\ \underbrace{E[(1+N(t-x))N(t-x)]}_{\substack{\| \\ E[N(t-x)(N(t-x)-1)] + 2E[N(t-x)] \\ \| \\ H(t-x) + 2M(t-x)}} & , t \ge x \end{cases}$$

$$(N(t) \mid X_1 = x) \overset{d}{=} 1 + N(t-x)$$

ισχύει για $t \ge x$

Άρα,

$$H(t)=\int_0^t H(t-x)\,dG(x)+\underbrace{2\int_0^t M(t-x)\,dG(x)}_{D(t)}$$

$$D(t)=2(M*G)(t)=2\sum_{n=1}^{\infty} G^{(*n+1)}(t)=2(M(t)-G(t))$$

Η ανάν. εξίσωση για την $H(t)$:

$$H(t)=\underbrace{2(M(t)-G(t))}_{D(t)}+\int_0^t H(t-x)\,dG(x).$$

Η λύση είναι

$$H(t)=D(t)+\int_0^t D(t-x)\,dM(x)=D(t)+(D*M)(t)$$

$$=2(M(t)-G(t))+2(M*M)(t)-2(M*G)(t)$$

$$=2(\cancel{M(t)-G(t)})+2(M*M)(t)-2\cancel{(M*G)(t)}$$

$$=2M^{*2}(t)$$

⑥ <u>Άσκηση Φυλ. 7/5</u>

Ανάδ. διαδ. $\{N(t)\}$

καταν. ενδιάμ. χρ. $G(t)$

$E[X_i^k]=\mu_k'$, $k\geq 1$

$i$ ενδιάμεσος χρόνος

$H(t)=E[A(t)^2]$, όπου $A(t)=t-S_{N(t)}$

1/ Αναν. εξίσ. για την $H(t)$

2/ $\lim_{t\to\infty} E[A(t)^2]=;$

<u>Λύση:</u>

$$H(t)=E[A(t)^2]=\int_0^\infty E[A(t)^2\mid X_1=x]\,dG(x)$$

όμως

$$E[A(t)^2\mid X_1=x]=\begin{cases} t^2, & t<x \\ \underbrace{E[A(t-x)^2]}_{H(t-x)}, & t\geq x\end{cases}$$

(<u>κλειδί</u>: $(A(t)\mid X_1=x)\overset{d}{=}A(t-x)$ όταν $t\geq x$)

Άρα

$$H(t) = \underbrace{\underbrace{\int_t^\infty t^2 \, dG(x)}_{t^2(1-G(t))}}_{D(t)} = \int_0^t H(t-x)\, dG(x)$$

Ικανοποιούνται οι υποθέσεις για την $D(t)$ του ΒΑΘ.

Άρα

$$\lim_{t\to\infty} E[A(t)^2] = \lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{\int_0^\infty D(t)\,dt}{\tau G} = \frac{\mu_3'}{3\mu_1'}$$

$$\int_0^\infty D(t)\,dt = \int_0^\infty \int_0^\infty t^2 \, dG(x)\,dt = \int_0^\infty \int_0^x t^2 \, dt \, dG(x)$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^3}{3} \, dG(x) = \frac{1}{3}\mu_3' \ , \quad \tau = \mu_1'$$