24/04/2013

Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα Ι

Μάθημα 17ο:

Ηλικία, Υπολειπόμενος και ο t-εξαρτώμενος χρόνος ανανέωσης

① **Βασικά Αποτελέσματα**

ΣΑΘΑ $\quad \lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R_n]}{E[X_n]}$

Αναν. Εξ. $\quad H(t) = D(t) + (H * G)(t)$

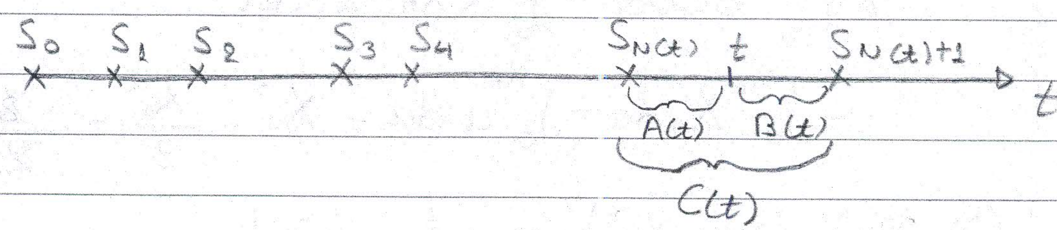
Λύση $\quad H(t) = D(t) + (D * M_G)(t)$.

ΒΑΘ $\quad \lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{\int_0^\infty D(t)\,dt}{\tau}$ ⟵ $E[X_n]$

② **Πλαίσιο:**

$\{N(t)\}$ αναν. διαδ. με ενδιαμ. χρ. $X_1, X_2, \ldots$

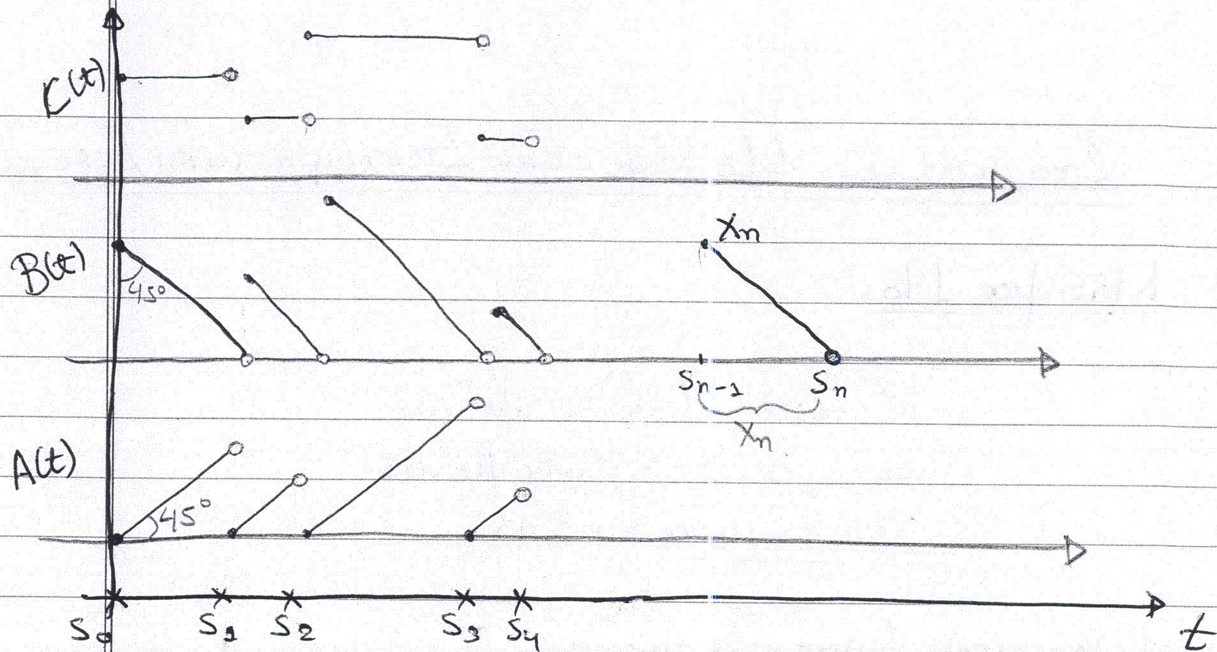
$E[X_i] = \tau < \infty \quad , \quad Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$



$A(t) = t - S_{N(t)}$: χρόνος από το τελ. γεγ. πριν το t ως το t
ηλικία, παρελθών χρόνος αναν., αναδρομικός χρ. αναν.

$B(t) = S_{N(t)+1} - t$: χρόνος από το t ως το επομ. γεγονός
υπολειπόμενος, προδρομικός χρόνος ανανέωσης

$C(t) = X_{N(t)+1}$: χρόνος μεταξύ του προηγ. & του επομ. γεγον. τη στιγμή t
t-εξαρτωμ. ή ολικός χρόνος αναν. τη στιγμή t



③ Μελέτη του B(t)

1| Μακροπρόθεσμος Μέσος του B(t) $= \lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t B(u)\,du]}{t} = \frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}$

2| Μέση τιμή της $B(t) = E[B(t)]$

3| Οριακή μέση τιμή της $B(t) = \lim_{t\to\infty} E[B(t)] = \frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}$

Υπολογισμοί:

1| Ορίζω $R(t) = \int_0^t B(u)\,du$

$$R_n = \int_{S_{n-1}}^{S_n} B(u)\,du = \int_0^{X_n} (X_n - u)\,du$$

$$= \int_0^{X_n} X_n\,du - \int_0^{X_n} u\,du = X_n^2 - \frac{X_n^2}{2} = \frac{X_n^2}{2}$$

$(X_n, R_n) = \left(X_n, \frac{X_n^2}{2}\right)$ ανεξ. , $n \geq 1$.

Άρα εφαρμόζω το ΣΑΘΑ

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t B(u)\,du]}{t} = \frac{E[R_n]}{E[X_n]} = \frac{E\left[\frac{X_n^2}{2}\right]}{E[X_n]} = \frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}$$

2/ $E[B(t)] = E[E[B(t) \mid X_1]] = \int_0^\infty E[B(t) \mid X_1 = u]\, dG(u)$

Όμως

$$E[B(t) \mid X_1 = u] = \begin{cases} u - t, & t < u \\ E[B(t-u)], & t \geq u. \end{cases}$$

Αν $H(t) = E[B(t)]$ τότε

$$H(t) = \int_0^t H(t-u)\, dG(u) + \underbrace{\int_t^\infty (u-t)\, dG(u)}_{D(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-u)\, dM_G(u)$$

3/ $G(t)$ υποτίθεται απεριοδική (συνήθως συνεχής)

Θα πρέπει να δείξω ότι

$D(t)$ γραφ. ως διαφ. 2 μονότονων, μη-αρνητ.

& $\int_0^\infty |D(t)|\, dt < \infty$.

$$D(t) = \int_t^\infty (u-t)\, dG(u) = \int_t^\infty u\, dG(u) - t\int_t^\infty dG(u)$$

$$= \int_0^\infty u\, dG(u) - \int_0^t u\, dG(u) - t(1 - G(t))$$

$$= \tau - \cancel{[uG(u)]_0^t} + \int_0^t G(u)\, du - t + \cancel{tG(t)}$$

$$= \tau - \int_0^t (1 - G(u))\, du$$

$$= \int_0^\infty (1-G(u))\, du - \int_0^t (1-G(u))\, du = \int_t^\infty (1-G(u))\, du.$$

φθίνουσα ως προς t.

Άρα $D(t)$ είναι φθιν., ≥ 0 και

$$\int_0^\infty |D(t)|\, dt = \int_0^\infty D(t)\, dt = \int_0^\infty \int_t^\infty (1-G(u))\, du\, dt.$$

$$= \int_0^\infty \int_t^\infty \int_u^\infty dG(x)\, du\, dt$$

$$\overset{0 \leq t \leq u \leq x}{=} \int_0^\infty \int_0^x \underbrace{\int_0^u dt}_{=u}\, du\, dG(x)$$

$$= \int_0^\infty \int_0^x u\,du\, dG(x)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty x^2\, dG(x) = \frac{1}{2} E[X_n^2] = \frac{1}{2}(\tau^2+\sigma^2) < \infty$$

Τελικά,

$$\lim_{t\to\infty} E[B(t)] = \frac{\int_0^\infty D(t)dt}{\tau} = \frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}.$$

④ Το ανανεωτικό παράδοξο

Διαισθητικά περιμένουμε

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t B(u)du]}{t} = \lim_{t\to\infty} E[B(t)] = \frac{\tau}{2}$$

Η αλήθεια είναι ότι $= \dfrac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau} > \dfrac{\tau}{2}$

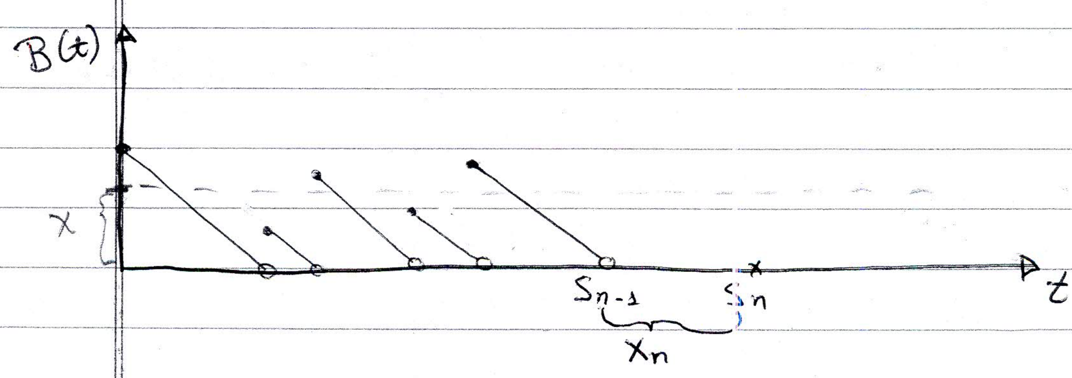
Μεταβλητότητα ενδιαμ. χρόνων $\Longrightarrow$ Αύξηση του μέσου υπολειπ. χρ. ανανέωσης.

⑤ Μελέτη της κατανομής του $B(t)$

$\{B(t)>x\}$: Ο υπολειπ. χρόνος ανανέωσης υπερβαίνει το x, τη στιγμή t.

1/ Μακροπρόθεσμο Μέσο Ποσοστό του χρόνου που ο υπολειπόμενος χρόνος υπερβαίνει το x.

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t 1_{\{B(u)>x\}}du]}{t} = \frac{\int_x^\infty (1-G(y))dy}{\tau}$$



2/ Πιθαν. τη στιγμή t $= P[B(t) > x]$
ο υπολειπ. χρονος υπερβ. το x

3/ Οριακή πιθανότητα $= \lim_{t\to\infty} P[B(t) > x]$
ο υπολειπ. χρόνος υπερβ. το x

Υπολογισμοί:

1/ $R(t) = \int_0^t 1\{B(u) > x\}\, du$

$$R_n = \int_{S_{n-1}}^{S_n} 1\{B(u) > x\}\, du = \begin{cases} X_n - x, & X_n \geq x \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$= \max(X_n - x, 0) = (X_n - x)^+$$

$(X_n, R_n) = (X_n, \max(X_n - x, 0))$ ανεξ. $n \geq 1$.

Το ΣΑΘΑ είναι εφαρμοσ.

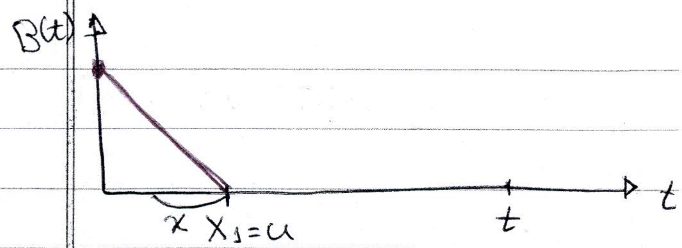
$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1\{B(u) > x\}\, du\right]}{t} = \frac{E[R_n]}{E[X_n]}$$

$E[X_n] = \tau$

$$E[R_n] = E[\max(X_n - x, 0)]$$
$$= \int_0^\infty (1 - P(\max(X_n - x, 0) \leq u))\, du$$
$$= \int_0^\infty (1 - P(X_n - x \leq u))\, du$$
$$= \int_0^\infty (1 - P(X_n \leq x + u))\, du$$
$$= \int_0^\infty (1 - G(x+u))\, du \overset{y = x+u}{=\!=} \int_x^\infty (1 - G(y))\, dy$$

2/ 3/ $H(t) = P(B(t) > x) = \int_0^\infty P(B(t) > x \mid X_1 = u)\, dG(u)$

$$P(B(t) > x \mid X_1 = u) = \begin{cases} 0, & u - x \leq t < u \\ 1, & t < u - x \\ \underbrace{P(B(t-u) > x)}_{H(t-u)}, & t \geq u \end{cases}$$



$$H(t)=\int_0^t H(t-u)\,dG(u)+\int_{t+x}^{\infty}1\,dG(u)$$
$$=\int_0^t H(t-u)\,dG(u)+\underbrace{1-G(t+x)}_{D(t)}$$

$D(t)$ φθιν, ≥ 0 και $\int_0^\infty |D(t)|\,dt=\int_0^\infty D(t)\,dt$

$$=\int_0^\infty (1-G(\overset{y}{\overbrace{t+x}}))\,dt=\int_x^\infty (1-G(y))\,dy<\int_0^\infty (1-G(y))\,dy=\tau<\infty$$

Από τη λύση της αναν. εξισ. έχουμε:

$$P(B(t)>x)=D(t)+\int_0^t D(t-u)\,dM_G(u)$$
$$\Downarrow$$
$$P(B(t)>x)=1-G(t+x)+\int_0^t (1-G(t-u+x))\,dM_G(u)$$

Το ΒΑΘ είναι εφαρμοσ. και άρα

$$\lim_{t\to\infty}P(B(t)>x)=\frac{\int_0^\infty D(t)\,dt}{\tau}=\frac{\int_x^\infty (1-G(y))\,dy}{\tau}$$

⑥ Κατανομή ισορροπίας της αναν. διαδικ.

$$F_{B(\infty)}(x)=\lim_{t\to\infty}P(B(t)\leq x)=1-\frac{\int_x^\infty (1-G(y))\,dy}{\tau}$$

$$=\frac{\int_0^x (1-G(y))\,dy}{\tau}$$ κατανομή ισορ. της αναν. διαδ.

$$E[B(\infty)]=\frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}$$

και σ.π.π. $f_{B(\infty)}(x)=\dfrac{1-G(x)}{\tau}$, $x>0$.