10/4/2013

Ανανεωτική Θεωρία

① Ολοκλήρωμα L-S

Αν έχουμε X τμ με σ.κ $F(x)$, X μεικτή τμ με σ.π $p(x)$, σ.π.π $f(x)$.

$$P(X \in B) = \sum_{x \in B} p(x) + \int_B f(x)\,dx$$

πεπερασμένα ή το πολύ αριθμήσιμα σημεία.

και έστω $g(x)$ συνάρτηση. Τότε:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dF(x) = \begin{cases} \mathrm{I}, & \text{τμ διακριτή} \\ \mathrm{II}, & \text{τμ συνεχής} \\ \mathrm{I}+\mathrm{II}, & \text{τμ μεικτή} \end{cases}$$

$$= \underbrace{\sum_x g(x)p(x)}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx}_{\mathrm{II}}$$

② Μετασχηματισμός L-S

X τμ με σ.κ $F(x)$, τότε:

$$\tilde{F}_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx}\,dF(x)$$

$$= E[e^{-sX}]$$

③ Βασικά ζεύγη $F(t)$ και $\tilde{F}(s)$

Συνάρτηση		Μετασχηματισμός L-S
$aF(t)+bG(t)$	$\longleftrightarrow$	$a\tilde{F}(s)+b\tilde{G}(s)$
$(F*G)(t)$	$\longleftrightarrow$	$\tilde{F}(s)\tilde{G}(s)$
$F(t)=t,\ t\geq 0$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s}$
$F(t)=1-e^{-\lambda t},\ t\geq 0$	$\longleftrightarrow$	$\frac{\lambda}{\lambda+s}$

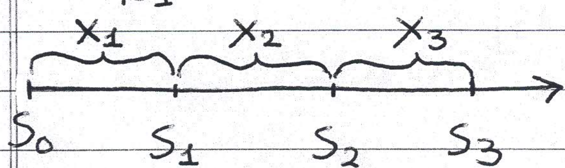
④ Ορισμοί

παριστάνουν ένα χρόνο

$X_1, X_2, \ldots$ ανεξ, ισον τμ ≥ 0 με σ.κ $G(t)$, τότε:

$S_0=0$

$S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i,\ n\geq 1$



πότε συμβαίνουν τα γεγον.

η $\{S_n : n\geq 0\}$ λέγεται ανανεωτική ακολουθία

και η $\{N(t)\}$ με $N(t)=\sup\{n\geq 0 : S_n \leq t\}$

$=\#$ γεγονότων μέχρι το t

λέγεται ανανεωτική διαδικασία.

Η συνάρτηση $M(t) = E[N(t)]$ λέγεται ανανεωτική συνάρτηση.

⑤ Βασικοί υπολογισμοί

$X_i \sim G(t)$ σ.κ

$$F_{S_n}(t) = P(S_n \le t)$$

$$= P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le t\right)$$

$$= (G * G * G * \ldots * G)(t)$$

Στην Poisson επειδή είχα την exp, αυτή η συνέλιξη υπολογιζόταν. Εδώ.... σκούραινα τα πράγματα.

$$= G^{(*n)}(t)$$

→ (G συνέλιξη) n φορές

Υπενθύμιση: $X \sim G$, $Y \sim F$

$$(G*F)(t) = \int_0^{\infty} G(t-x)\,dF(x)$$

$0 \leftarrow$ (κανονικά $\int_{-\infty}^{\infty}$ αλλά έχω τ.μ. ≥ 0.)

$$\| $$

$$P(X+Y \le t) = \int G(t-x)\,dF(x)$$

$$p(t) = P(N(t)=n) = P(S_n \le t < S_{n+1})$$

$$= P(S_n \le t) - P(S_{n+1} \le t)$$

$$= G^{(*n)}(t) - G^{(*n+1)}(t)$$

$$M(t) = E[N(t)] = E\Big[\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{1\cdot\{S_n \le t\}}_{\text{Δείκτρια συνάρτηση}}\Big]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \le t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} G^{(*n)}(t)$$

Άρα:

$$F_{S_n}(t) = G^{(*n)}(t)$$

$$P_n(t) = P(N(t)=n) = G^{(*n)}(t) - G^{(*n+1)}(t), \quad n \ge 0$$

$$P_0(t) = P(N(t)=0) = 1 - G(t)$$

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{(*n)}(t)$$

Ο μετασχ L-S τις συνελίξεις τις πάει σε γινόμενα! (Βολεύει)

Θεωρούμε ότι $G^{(*0)} = 1$

⑥ Αντίστοιχοι μετασχ L-S

$$\tilde{F}_{S_n}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF_{S_n}(t) = (\tilde{G}(s))^n$$

$$\tilde{P}_n(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dP_n(t)$$

$$= \tilde{G}(s)^n - \tilde{G}(s)^{n+1}, \ n \geq 1$$

ή

$$= 1 - \tilde{G}(s), \ n = 0$$

$$\tilde{M}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dM(t) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}$$

Επίσης: Αν γνωρίζω τη $M(t)$ βρίσκω και τη $G(t)$.

⑦ Υπολογισμοί $F_{S_n}(t)$, $P_n(t)$, $M(t)$ για συγκεκριμένη $G(t)$

Βήμα 1ο: $\tilde{G}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dG(t)$

Βήμα 2ο: $\tilde{F}_{S_n}(s)$, $\tilde{P}_n(s)$, $\tilde{M}(s)$

Βήμα 3ο: Αντιστροφή των μετασχηματισμών με:

$$t, t \geq 0 \longleftrightarrow \frac{1}{s}$$

$$1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0 \longleftrightarrow \frac{\lambda}{\lambda + s}$$

⑧ Η $M(t)$ προσδιορίζει τη $G(t)$

$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{M}(s) - \tilde{M}(s)\tilde{G}(s) = \tilde{G}(s)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\tilde{G}(s) = \frac{\tilde{M}(s)}{1+\tilde{M}(s)}}$$

→ Νόμος μεγάλων αριθμών
→ Κεντρικό οριακό Θεώρημα.

(9) Υπενθυμίσεις από Θ. Πιθανοτήτων

ΝΜΑ: $X_1, X_2, \dots$ ανεξ, ισον με $E[X_i]=\mu$

$$\Longrightarrow P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \mu\right) = 1$$

ΚΟΘ: $X_1, X_2, \dots$ ανεξ, ισον με $E[X_i]=\mu$, $Var[X_i]=\sigma^2$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x) \quad \left(\text{συνάρτηση κατανομής της } \mathcal{N}(0,1)\right)$$

(10) Οριακά Θεωρήματα στην Ανανεωτική Θεωρία (Δε μας βοηθούν πολύ υπολογιστικά)

Έστω $X_1, X_2, \dots$ ανεξ, ισον, ≥ 0 τμ ενδιαμέσων χρόνων ανανεωτικής διαδικασίας

$\{N(t)\}$ με $E[X_i]=\tau$, $Var[X_i]=\sigma^2$.

ΝΜΑ: $\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\tau} \Longrightarrow \boxed{P\left(\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\tau}\right) = 1}$

$N(t) \simeq 1$

$\frac{N(t)}{t} \simeq \frac{1}{\tau}$

ΚΟΘ: $\boxed{\lim_{t\to\infty} P\left(\frac{N(t) - \frac{t}{\tau}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\tau^3}}} \leq x\right) = \Phi(x)}$

(Για απόδειξη του ΚΟΘ, βλ τις σημειώσεις 2011-2012, δε θα την κάνουμε τώρα γτ. είναι πολύ τεχνική...)

Απόδειξη ΝΜΑ:

$S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}$ με πθ 1

$$\Longrightarrow \frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} \quad \text{με πθ 1}$$

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{ΝΜΑ}} \tau \quad \text{με πθ 1}$$

$$\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \underbrace{\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)}}_{} \xrightarrow{\text{με πθ 1}} \tau$$

Άρα $\lim_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} = \tau \iff \lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\tau}$ με πθ 1

(11) Παράδειγμα:

Έστω ανανεωτ. διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων

$$G(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \; t \geq 0 \; (\exp(\lambda))$$

$$\tilde{G}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda}{\lambda+s}$$

$$\tilde{F}_{S_n}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$$

$$\Longrightarrow F_{S_n}(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$$\tilde{P}_n(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n - \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$P_n(t) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \; n = 0, 1, \ldots$$

$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda+s}}{1-\frac{\lambda}{\lambda+s}} = \frac{\lambda}{s}$$

$$\Rightarrow M(t) = \lambda t, \; t \geq 0$$

12 Παράδειγμα:

Έστω ανάν. διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιαμ. χρόνων $G(t)$ Gamma$(2,\lambda)$

$M(t) = ?$

$$\tilde{G}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \, dG(t)$$

α' τρόπος, αντικαθιστώ και κάνω πράξεις

αλλιώς με L-S

$$= \int_0^\infty e^{-st} \frac{\lambda^2}{(2-1)} t^{2-1} e^{-\lambda t} \, dt$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2 \quad \left(\text{Gamma}(2,\lambda) = \text{Exp}(\lambda) * \text{Exp}(\lambda)\right)$$

$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)} = \frac{\frac{\lambda^2}{(\lambda+s)^2}}{1-\frac{\lambda^2}{(\lambda+s)^2}} = \frac{\lambda^2}{(\lambda+s)^2-\lambda^2} = \frac{\lambda^2}{s(s+2\lambda)} =$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2\lambda} = (*)$$

Στις περισσότερες περιπτώσεις ο μετασχ. είναι ρητός και κάνω ανάλυση σε απλά κλάσματα.

$$\text{Άρα: } \frac{\lambda^2}{s(s+2\lambda)} = A \cdot \frac{1}{s} + B \cdot \frac{1}{s+2\lambda}$$

$$\xRightarrow{\cdot s} \frac{\lambda^2}{s+2\lambda} = A + B \cdot \frac{s}{s+2\lambda}$$

$$\xRightarrow{s=0} \boxed{\frac{\lambda}{2} = A}$$

Επίσης $\frac{\lambda^2}{s(s+2\lambda)} = A\cdot\frac{1}{s} + B\cdot\frac{1}{s+2\lambda}$

$$\xRightarrow{\cdot(s+2\lambda)} \frac{\lambda^2}{s} = A\cdot\frac{s+2\lambda}{s} + B$$

$$\xRightarrow{s=-2\lambda} \boxed{-\frac{\lambda}{2} = B}$$

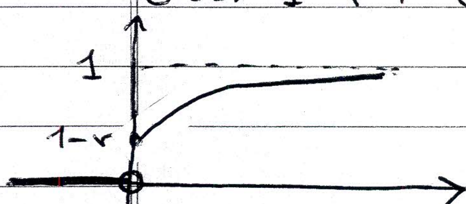
$$(*) = \frac{\lambda}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\cdot\frac{2\lambda}{s+2\lambda}$$

$$\xRightarrow[\text{L-S}]{\text{αντιστρ. μετασχ.}} \boxed{M(t) = \frac{\lambda}{2}\cdot t - \frac{1}{4}\left(1-e^{-2\lambda t}\right), \quad t\geq 0}$$

13 Παράδειγμα:

Έστω $\{N(t)\}$ ανάν. διαδικασία με σ.κ ενδιάμεσων χρόνων

$G(t) = 1-r+r(1-e^{-\lambda t}), \quad t\geq 0$



$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{με πθ } 1-r \\ \exp(\lambda), & \text{με πθ } r \end{cases}$$

$$\tilde{G}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dG(t)$$

$$= e^{-s\cdot 0}\cdot(1-r) + \int_0^{\infty} e^{-st}\cdot r\lambda e^{-\lambda t}\, dt$$

$$= (1-r) + r\cdot\frac{\lambda}{\lambda+s}$$

$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)} = \frac{(1-r)+r\cdot\frac{\lambda}{\lambda+s}}{r-r\cdot\frac{\lambda}{\lambda+s}}$$

$$= \frac{(1-r)(\lambda+s)+r\lambda}{\cancel{r\lambda}+rs-\cancel{r\lambda}}$$

$$= \frac{\lambda + s - \cancel{r\lambda} - rs + \cancel{r\lambda}}{rs}$$

$$= \frac{\lambda}{r} \cdot \frac{1}{s} + \frac{(1-r)}{r}$$

$$\Longrightarrow \boxed{M(t) = \frac{\lambda}{r} \cdot t + \frac{1-r}{r} \quad t \geq 0}$$