Άσκηση Φυλλάδιο 3 8/4/2013

(2) $\{N(t)\} \sim Poisson(\lambda)$ // $E[N(1)\cdot N(2)\cdot N(3)] = ?$

$$= E[N(1)\cdot\{(N(2)-N(1))+N(1)\}\{(N(3)-N(2))+(N(2)-N(1))+N(1)\}]$$

$$= E[N(1)\cdot(N(2)-N(1))(N(3)-N(2))] + E[N(1)(N(2)-N(1))^2] +$$

$$+ E[(N(1))^2(N(2)-N(1))] + \dots + E[(N(1))^3]$$

$$= E[N(1)\cdot E[N(2)-N(1)]\cdot E[N(3)-N(2)] + E[N(1)]\cdot E[N(1)^2] + E[N(1)]E[N(1)^2]$$

$$= \dots\dots =$$

σχολ

$$= (E[N(1)])^3 + 4\cdot E[N(1)]\cdot E[(N(1))^2] + E[(N(1))^3]$$

- $E[N(1)] = \lambda\cdot 1 = \lambda$
- $E[(N(1))^2] = Var(N(1)) + (E[N(1)])^2 = \lambda + \lambda^2$
- $E[(N(1))^3] = \sum_{x=0}^{\infty} x^3\cdot e^{-\lambda}\cdot \frac{\lambda^x}{x!}$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x^2\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

Θέτω: $x-1=k$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2 e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{k+1}}{k!}$$

$$= \lambda\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2 e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \lambda\cdot E[(N(1)+1)^2]$$

$= \lambda \cdot \{ E[(N(1))^2] + 2E[N(1)] + 1 \}$

$= \lambda \cdot \{ \lambda + \lambda^2 + 2\lambda + 1 \}$

$\Rightarrow E[N(1) \cdot N(2) \cdot N(3)] = (\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda) + 4\lambda(\lambda + \lambda^2) + \lambda^3$

<u>Φυλλάδιο 4</u>

① $\{N(t)\} \sim \text{Poisson}(\lambda)$

γεγονότα τύπου 1 με πιθ $1/3 \to N_1(t) \sim \text{Poisson}(\lambda/3)$
" " 2 " " $2/3 \to N_2(t) \sim \text{Poisson}(2\lambda/3)$
<u>ανεξάρτητες</u>

$N(t) \to$ υπέρθεση $N_1(t) + N_2(t)$

$P(N_1(3)=5, N(3)=11 \mid N_2(1)=4) =$

$$= \frac{P(N_1(3)=5, N(3)=11, N_2(1)=4)}{P(N_2(1)=4)}$$

$$= \frac{P(N_1(3)=5, N_2(3)=6, N_2(1)=4)}{P(N_2(1)=4)}$$

$$= \frac{P(N_1(3)=5) \cdot P(N_2(1)=4, N_2(3)=6)}{P(N_2(1)=4)}$$

$$= \frac{P(N_1(3)=5) \cdot P(N_2(1)=4, N_2(3)-N_2(1)=2)}{P(N_2(1)=4)}$$

ανεξ προσαυξ $= \dfrac{P(N_1(3)=5) \cdot P(N_2(1)=4) \cdot P(N_2(3)-N_2(1)=2)}{P(N_2(1)=4)}$

$\left.\begin{matrix}\text{ανεξ}\\\text{ροσαυ}\end{matrix}\right\} = \dfrac{P(N_1(3)=5)\,P(N_2(1)=4)\,P(N_2(2)=2)}{P(N_2(1)=4)}$

$= \ldots$

② $\{N_1(t)\} \sim Poisson(3)$
$\{N_2(t)\} \sim Poisson(2)$
$\{N(t)\}$ η υπέρθεση $\sim Poisson(3+2)$

$E[N_1(t) \mid N(t)=10] =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(N_1(t)=n \mid N(t)=10)$

$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \dfrac{P(N_1(t)=n, N(t)=10)}{P(N(t)=10)}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \dfrac{P(N_1(t)=n, N_2(t)=10-n)}{P(N(t)=10)}$

$\text{ανεξ}\} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \dfrac{P(N_1(t)=n)\cdot P(N_2(t)=10-n)}{P(N(t)=10)}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \dfrac{\cancel{e^{-3t}} \cdot \frac{(3\cancel{t})^n}{n!} \cdot \cancel{e^{-2t}} \cdot \frac{(2\cancel{t})^{10-n}}{(10-n)!}}{\cancel{e^{-5t}} \cdot \frac{(5\cancel{t})^{10}}{10!}}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \underbrace{\binom{10}{n} \left(\frac{3}{5}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{10-n}}_{\text{σπ Bin}}$

$= 10 \cdot \dfrac{3}{5} = 6$

③ $\{N(t)\} \sim Poisson(\lambda)$

γεγον τύπου $1 \to p$
" " $2 \to 1-p$

ανεξ $\begin{cases} N_1(t) \to \#\text{ τύπου } 1 \sim Poisson(\lambda p) \\ N_2(t) \to \#\text{ τύπου } 2 \sim Poisson(\lambda(1-p)) \end{cases}$

T_1, T_2 οι χρόνοι πρώτων γεγονότων

$F_{T_1,T_2}(t_1,t_2) = P(T_1 \le t_1, T_2 \le t_2)$

$= P(N_1(t_1) \geq 1, N_2(t_2) \geq 1)$

$\overset{\text{ανεξ}}{=} P(N_1(t_1) \geq 1) \cdot P(N_2(t_2) \geq 1)$

$= (1 - e^{-\lambda p t_1}) \cdot (1 - e^{-\lambda(1-p) t_1})$

④ κ είδη διαταραχών

διαταραχή τύπου $i \sim Poisson(\lambda_i)$
→ προκαλεί βλάβη με πθ p_i (ανεξ)

$\{N_i(t)\}$ διαδ. Poisson (λ_i), διαταραχές τύπου i

$\{M_i(t)\}$ διαδ Poisson $(\lambda_i p_i)$, διαταραχή τύπου i που προκάλεσε βλάβη.

$T \to$ χρόνος ζωής συστήματος

$\{M(t)\}$ υπέρθεση των $M_i(t) \sim Poisson\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i\right)$
Δηλαδή να πάθει βλάβη από οποιοδήποτε είδος βλάβης

$T \rightarrow$ πρώτο γεγονός της $\{M(t)\}$
$S \rightarrow$ είδος βλάβης

$P(T>t, S=i) =$

$= P(T>t) \cdot P(S=i \mid T>t)$

$$= \left(1 - e^{-\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i\right)t}\right) \cdot \frac{\lambda_i p_i}{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i}$$

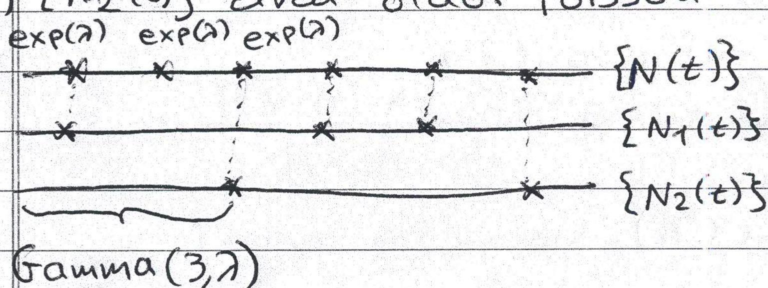
5) $\{N(t)\} \sim \text{Poisson}(\lambda)$

κάθε γεγονός καταγράφεται με πθ 1/3

$\rightarrow \{N_1(t)\} \sim \text{Poisson}(\lambda/3)$

$\{N_2(t)\} \rightarrow$ καταγράφει 3ο, 6ο, 9ο γεγονός κτλ

a) $\{N_2(t)\}$ είναι διαδ. Poisson?



Η $\{N_2(t)\}$ δεν καταγράφει ανεξάρτητα από τις προηγούμενες

Η $\{N_2(t)\}$ <u>δεν</u> είναι διαδ. Poisson.

β) $P(N_1(t)=3 \mid N_2(t)=1) =$

$$= \frac{P(N_1(t)=3, N_2(t)=1)}{P(N_2(t)=1)}$$

$$= \frac{P(N_1(t)=3, N(t)=3 \text{ ή } 4 \text{ ή } 5)}{P(N(t)=3 \text{ ή } 4 \text{ ή } 5)}$$

$$= \frac{P(N_1(t)=3, N(t)=3) + \overbrace{P(N_1(t)=3, N(t)=4)}^{\circledast} + P(N_1(t)=3, N(t)=5)}{\underbrace{P(N(t)=3)}_{e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^3}{3!}} + P(N(t)=4) + P(N(t)=5)}$$

$\circledast$ $P(N_1(t)=3, N(t)=4) = P(N_1(t)=3, \text{\# γεγ. που δεν έχουν καταγραφεί} = 1)$

$$= P(N_1(t)=3) \cdot P(\text{\# γεγ. που δεν έχουν καταγραφεί ως τότε} = 1)$$

$$= P(N_1(t)=3) \cdot P(\underbrace{\text{\# γεγ. που δεν έχουν καταγραφεί ως τότε}}_{\sim \text{Poisson}} = 1)$$

$$= e^{-\frac{\lambda}{3}t} \cdot \frac{(\frac{\lambda}{3}t)^3}{3!} \cdot e^{-\frac{2\lambda}{3}t} \cdot \frac{(\frac{2}{3}\lambda t)^1}{1!}$$