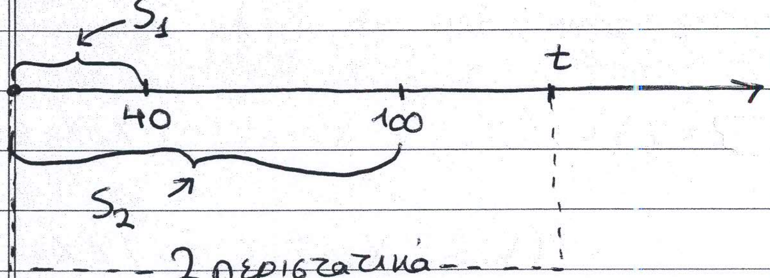
1/4/2013

## Ασκήσεις στη σ.δ Poisson

### ① Άσκηση

Περιστατικά φθάνουν σε εξωτερικά ιατρεία σύμφωνα με μια σ.δ Poisson.
Γνωρίζουμε ότι:

- Το 1ο περιστατικό έφτασε στα πρώτα 40'
- Το 2ο " " " 100'
- Μέχρι τη χρονική στιγμή $t$, $(t>100)$ δεν έφτασε άλλο περιστατικό.




Ποιος ο μέσος χρόνος άφιξης του 1ου περιστατικού | πληροφορία δοθέντος της πληροφορ. που διαθέτουμε.

**Λύση:**

$\{N(t)\}$ σ.δ Poisson των αφίξεων των περιστατικών ρυθμού $\lambda$.

$S_1, S_2, \ldots$ χρόνοι γεγονότων

$$E[S_1 \mid S_1 \leq 40, S_2 \leq 100, N(t)=2] = ?$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{S_1}(x \mid S_1 \leq 40, S_2 \leq 100, N(t)=2)\, dx$$

$$f_{S_1}(x|\ldots) = \frac{d}{dx} F_{S_1}(x|\ldots)$$

$$F_{S_1}(x \mid S_1 \le 40, S_2 \le 100, N(t)=2) =$$

$$= P(S_1 \le x \mid S_1 \le 40, S_2 \le 100, N(t)=2)$$ αν $x > 40 \Rightarrow F_{S_1} = 1$

$$= \frac{P(S_1 \le x, S_2 \le 100, N(t)=2)}{P(S_1 \le 40, S_2 \le 100, N(t)=2)}, \quad 0 \le x \le 40$$

Πρέπει να υπολογίσω για $0 \le x \le 40$, $t > 100$ την

$P(S_1 \le x, S_2 \le 100, N(t)=2)$

Αν τα μεταφράσω σε $N(t) \Rightarrow$ ανεξ. προσαυξ.
με ιδιοτ. δεσμ. χρόνων
σε $X_i$ ανεξάρτητα $\Rightarrow$ ανεξ. χρόνοι γεγονότων $\Rightarrow$ Διατεταγμένες από δείγμα ομοιόμορφων.

→ <u>1ος τρόπος</u> (= τα μεταφράζω όλα σε $X_i$)

$$P(S_1 \le x, S_2 \le 100, N(t)=2) =$$

$$= P(X_1 \le x, X_1 + X_2 \le 100, X_1 + X_2 \le t < X_1 + X_2 + X_3)$$

$t > 100$

$$= P(X_1 \le x, X_1 + X_2 \le 100, t < X_1 + X_2 + X_3)$$

$$= \int_0^x P(X_2 \le 100 - x_1, X_2 + X_3 > t - x_1)\, \lambda e^{-\lambda x_1} dx_1$$

$$= \int_0^x \int_0^{100-x_1} \underbrace{P(X_3 > t - x_1 - x_2)}_{e^{-\lambda(t-x_1-x_2)}} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)} dx_2 dx_1$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda t} \int_0^x \int_0^{100-x} dx_2 dx_1$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda t} \int_0^x (100 - x_1) dx_1$$

$$= \boxed{\lambda^2 e^{-\lambda t} \left(100x - \frac{x^2}{2}\right)}$$

→ 2ος τρόπος (= τα μεταφράζω όλα σε $N(t)$}

$$P(S_1 \le x,\ S_2 \le 100,\ N(t)=2) =$$

$$= P(N(x) \geq 1,\ \underbrace{N(100) \geq 2,\ N(t)=2}_{\Rightarrow N(100)=2})$$

$$= P(N(x)=1 \text{ ή } 2,\ N(100)=2,\ N(t)=2)$$ και σπάω το ενδεχόμενο σε δύο...

$$= P(N(x)=1, N(100)=2, N(t)=2) + P(N(x)=2, N(100)=2, N(t)=2)$$

$$= P(N(x)=1,\ N(100)-N(x)=1,\ N(t)-N(100)=0) \ +$$

$$+ P(N(x)=2,\ N(100)-N(x)=0,\ N(t)-N(100)=0) =$$

$$= e^{-\lambda x}\cdot\frac{(\lambda x)^1}{1!}\cdot e^{-\lambda(100-x)}\cdot\frac{(\lambda(100-x))^1}{1!}\cdot e^{-\lambda(t-100)} \ +$$

$$+ e^{-\lambda x}\cdot\frac{(\lambda x)^2}{2!}\cdot e^{-\lambda(100-x)}\cdot e^{-\lambda(t-100)} =$$

$$= \boxed{\lambda^2 e^{-\lambda t}\left(100x - \frac{x^2}{2}\right)}$$ • Καλύτερη ιδέα η μετάφραση σε $N(t)$

→ 3ος τρόπος (= χρησιμοπ. ιδιότητα δεσμευμένων χρόνων γεγονότ

$$P(S_1 \le x,\ S_2 \le 100,\ N(t)=2) =$$

$$= P(N(t)=2)\,P(S_1 \le x,\ S_2 \le 100 \mid N(t)=2)$$

$$= e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^2}{2!}\cdot P(U_{1:2} \le x,\ U_{2:2} \le 100)$$

$$= e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^2}{2!}\cdot\int_0^x\int_{u_1}^{100}\frac{2!}{t^2}\,du_2\,du_1$$

$$= \boxed{\lambda^2 e^{-\lambda t}\left(100x - \frac{x^2}{2}\right)}$$

ΑΡΑ: $P(S_1\le x, S_2\le 100, N(t)=2)=\lambda^2 e^{-\lambda t}\left(100x-\frac{x^2}{2}\right)$, $0\le x\le 40$

$\Downarrow$

$$F_{S_1}(x|S_1\le 40, S_2\le 100, N(t)=2)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{100x-\frac{x^2}{2}}{4000-\frac{40^2}{2}}, & 0\le x\le 40\\ 1, & x>40\end{cases}$$

και

$$f_{S_1}(x|\dots)=\begin{cases}\dfrac{100-x}{3200}, & 0<x<40\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

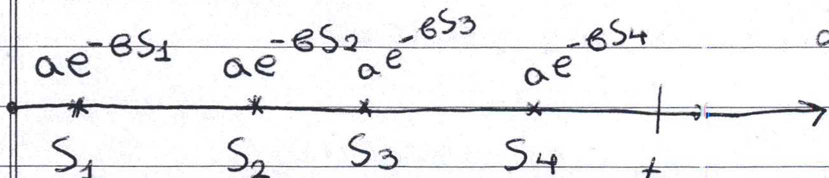
ΑΡΑ: $E[S_1|S_1\le 40, S_2\le 100, N(t)=2]=\int_0^{40} x\,\frac{100-x}{3200}\,dx = \dots = 18,33$

- Ανεξάρτητο του $\lambda$ και του $t$.
  Μας έφτανε η πληροφορία

② <u>Άσκηση</u>

Πελάτες φθάνουν σε ένα σύστημα σύμφωνα με σ.δ Poisson($\lambda$) και ο καθένας πληρώνει $a$ χρηματικές μονάδες. 1 χρηματική μονάδα που εισπράττεται $t$ μονάδες χρόνου αργότερα έχει τρέχουσα αξία $e^{-\theta t}=\gamma^t$.
↳ αποπληθωριστής

<u>Να βρεθεί η μέση τρέχουσα αξία των εισπράξεων στο $[0,t]$</u> $= c(t)$




π.χ.) $a=5$ € τιμή εισιτηρίου
αν $\gamma=0,8$, μετά από $t$ χρόνια $\longrightarrow$ $5\cdot 0,8^t$ €.
Τρέχουσα αξία

$$c(t) = E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} a e^{-\beta S_i}\right]$$

→ άθροισμα όπου $N(t)$ τ.μ ⇒ Δεσμεύω στο $N(t)$

$$= a\, E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} e^{-\beta S_i}\right]$$

$$= a\, E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} e^{-\beta S_i} \,\Big|\, N(t)\right]\right]$$

$$= a \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)\, E\left[\sum_{i=1}^{\overset{=n}{N(t)}} e^{-\beta S_i} \,\Big|\, N(t)=n\right]$$

$$= a \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)\, E\left[\sum_{i=1}^{n} e^{-\beta U_{i:n}}\right]$$

→ Συμμετρική συνάρτη
άρα....

όπου $(U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n})$ είναι οι διατεταγμένες τμ από τυχαίο δείγμα (=ανεξάρτητες και ισόνομες) από την ομοιόμορφη $Unif([0,t])$.

$$= a \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)\, E\left[e^{-\beta U_{1:n}} + e^{-\beta U_{2:n}} + \dots + e^{-\beta U_{n:n}}\right]$$

$$= a \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)\, n\, E\left[e^{-\beta U}\right]$$

$$U \sim Unif([0,t])$$

$$= a \cdot \lambda t \cdot E\left[e^{-\beta U}\right]$$

$$= a \lambda t \int_0^t e^{-\beta u} \underbrace{f_U(u)}_{1/t}\, du$$

$$= \lambda a \cdot \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta}$$

③ Άσκηση 3 / Φυλ 3

$\{N(t)\}$ σ.δ Poisson με ρυθμό $\lambda$
$S_1, S_2, \dots$ οι χρόνοι των γεγονότων

Μέσος χρόνος πραγματοποίησης τελευταίου γεγονότος πριν τη στιγμή $t$. $= E[S_{N(t)}]$

$$E[S_{N(t)}] = E\big[E[S_{N(t)} \mid N(t)]\big]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)\, E[\underbrace{S_{N(t)} \mid N(t)=n}]$$

$(S_n \mid N(t)=n) \overset{d}{=} U_{n:n}$ = Η μεγαλύτερη τ.μ από $n$ ανεξ. και ισόνομες τ.μ στο $[0,t]$.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)\, E[U_{n:n}]$$

$$\overset{*}{=} \frac{nt}{n+1}$$

* (Γενικά: $E[U_{i:n}] = \dfrac{it}{n+1}$)

$$= t\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= t\left(1 - e^{-\lambda t}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{(n+1)!}\right)$$

$$= t\left(1 - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda t}\cdot\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}}_{e^{\lambda t}-1}\right)$$

$$= t\left(1 - \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda t}\right)$$

$$= \boxed{t - \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}}$$

④ Άσκηση 4/Φυλ 3

$\{N(t)\}$ σ.δ Poisson

$S_1, S_2, \ldots$ χρόνοι γεγονότων

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i\right] \overset{?}{=}$$

$$= E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i \,\middle|\, N(t)\right]\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)\, E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i \,\middle|\, N(t)=n\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n) \cdot \underbrace{E\left[\sum_{i=1}^{n} U_{i:n}\right]}_{nE[U]}$$

$$nE[U] = \frac{nt}{2} \qquad \text{ή} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{it}{n+1} = \frac{nt}{2}$$

$$= E[N(t)] \cdot \frac{t}{2}$$

$$= \frac{\lambda t^2}{2}$$