11/3/2013

Δεσμευμένη κατανομή των χρόνων των γεγονότων μιας σ.δ Poisson, δεδομένου του αριθμού των γεγονότων σε διάστημα.

① **Ερώτημα**

$P(S_k \leq x \mid N(t)=n) = ?$, $0 \leq x \leq t$, $0 \leq k \leq n$

$E[S_k \mid N(t)=n] = ?$, ‶

② **Διατεταγμένες τμ**

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τμ

$X_{k:n}$ = κ-οστή μικρότερη / κ-οστή διατεταγμένη τμ των $X_1, \ldots, X_n$

πχ) $X_{1:n} = \min(X_1, \ldots, X_n)$
$X_{n:n} = \max(X_1, \ldots, X_n)$

Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες

- $$\begin{aligned} F_{X_{n:n}}(x) &= P(X_{n:n} \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \ldots, X_n \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x) \ldots P(X_n \leq x) \\ &= F_{X_1}(x) F_{X_2}(x) \ldots F_{X_n}(x) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} F_{X_{1:n}}(x) &= P(X_{1:n} \leq x) = 1 - P(X_{1:n} > x) \\ &= 1 - (1 - F_{X_1}(x))(1 - F_{X_2}(x)) \ldots (1 - F_{X_n}(x)) \end{aligned}$$

3 Διατεταγμένες τμ. τυχαίου δείγματος

παίρνω παρατηρήσεις από μια κατανομή.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ συνεχείς, ανεξ, ισον $\sim F(x)$ σ.κ

$f(x)$ σ.π.π

$F_{k:n}(x) = P(X_{k:n} \leq x)$

$= P(\text{τουλάχιστον } k \text{ από τις } X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ είναι } \leq x)$

↳ (Θέλω σε n δοκιμές να έχω τουλ. k επιτυχίες. Δηλ σαν n δοκιμές Bernoulli όπου η $X_i \leq x$ είναι η επιτυχία με πθ. $F(x)$)

$$= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j (1-F(x))^{n-j}$$

Αν θέλαμε θα μπορούσαμε και να παραγωγίσουμε, αλλά είναι αντιδιαισθητικό.

σ.π.π $\quad f_{X_{k:n}} = \lim\limits_{\delta x \to 0^+} \dfrac{P(x \leq X_{k:n} \leq x+\delta x)}{\delta x}$

$$= \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{P\begin{pmatrix} \text{ακριβώς } k-1 \text{ από τις } X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ να είναι } \leq x \\ \text{" } 1 \text{ " " " να } \in (x, x+\delta x] \\ \text{" } n-k \text{ " " " να είναι } > x+\delta x \end{pmatrix}}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{\boxed{\binom{n}{k-1}\binom{n-k+1}{1}\binom{n-k}{n-k}} (F(x))^{k-1} \boxed{P(x < X \leq x+\delta x)(1-F(x+\delta x))^{n-k}}}{\delta x}$$

$\to \dfrac{n! \, \cancel{(n-k+1)}!}{(k-1)! \, \cancel{(n-k+1)}! \, (n-k)!}$

και $\delta x \to 0^+$

$\to f(x)(1-F(x))^{n-k}$

Άρα $f_{X_{k:n}}(x) = \dfrac{n!}{(k-1)! \, 1! \, (n-k)!} F(x)^{k-1} f(x) \cdot (1-F(x))^{n-k}$

Η από κοινού σ.ππ των $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$

$$f_{(X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n})}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n! f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_n) \quad x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$$

↳ σε κάθε άλλη περίπτωση ση δεν έχει νόημα, ισούται με 0.

πχ) $(X_1, X_2, X_5) = \begin{matrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{matrix}$

$X_{1:3} = 1, \quad X_{2:3} = 4, \quad X_{3:3} = 5$

(4) Διατεταγμένες τμ από ομοιόμορφη κατανομή

$X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ, ισον $\sim$ Uniform $[0, t]$

σ.π.π $f(x) = \frac{1}{t}, \quad 0 \le x \le t$

σ.κ $F(x) = \frac{x}{t}, \quad 0 \le x \le t$

Να θυμόμαστε οπωσδήποτε αυτούς τους δύο τύπους!

$$\boxed{\begin{gathered} \rightarrow f_{(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n})}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 \le x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n \le t \\ \rightarrow E[X_{k:n}] = \frac{kt}{n+1}, \quad 0 \le k \le n \end{gathered}}$$

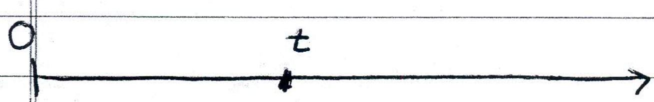
$E[X_{1:1}] = \frac{t}{2}$

$E[X_{1:2}] = \frac{t}{3}, \quad E[X_{2:2}] = \frac{2t}{3}$

(5) Δεσμευμένη κατανομή του S_1 δοθέντος ότι $N(t)=1$

$\{N(t)\}$ σδ Poisson ρυθμού λ

S_1 = χρόνος 1ου γεγονότος.



$P(S_1 \le x / N(t) = 1) = ?, \quad 0 \le x \le t$

↳ είναι σαν να λέμε ότι ακολουθεί την ομοιόμορφη στο $[0, t]$

$$= \frac{P(S_1 \le x, N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)}$$

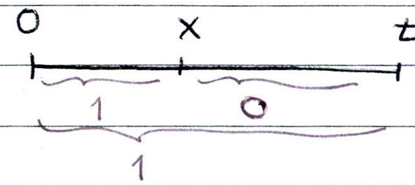
Μεταφράζουμε το $S_1 \le x$ σε σχέση με το $N(x)$.

$$= \frac{P(N(x) \ge 1, N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)}$$

Δηλ $\{S_n \le t\} = \{N(t) \ge n\}$

$$= \frac{P(N(x)=1,\ N(t)=1)}{P(N(t)=1)}$$

$$= \frac{P(N(x)=1,\ N(t)-N(x)=0)}{P(N(t)=1)}$$



ανεξ. προσαυξ.

$$= \frac{P(N(x)=1)\,P(N(t)-N(x)=0)}{P(N(t)=1)}$$

ομογ. προσαυξ.

$$= \frac{P(N(x)=1)\,P(N(t-x)=0)}{P(N(t)=1)}$$

$$= \frac{\cancel{e^{-\lambda x}}\cdot\frac{(\lambda x)^1}{1!}\cdot\cancel{e^{-\lambda(t-x)}}\cdot\frac{[\lambda(t-x)]^0}{0!}}{\cancel{e^{-\lambda t}}\cdot\frac{(\lambda t)^1}{1!}}$$

$$= \frac{x}{t}\ ,\quad 0 \le x \le t$$

κατά κατανομή ίδια

$$\Rightarrow (S_1 \mid N(t)=1) \overset{d}{=} U_1 \sim U([0,t])$$

⑥ Δεσμευμένη κατανομή του S_κ δοθέντος $N(t)=n$

$\{N(t)\}$ σ.δ Poisson ρυθμού λ

S_κ: χρόνος κ-οστού γεγονότος

$$(S_1, S_2, \dots, S_n \mid N(t)=n) \overset{d}{=} (U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n})$$

από κοινού κατανομή διατεταγμένων τ.μ. n ανεξ, ισόν. Uniform([0,t])

Για ομοιόμορφες

* $f_{(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n})}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{n!}{t^n}\ ,\quad 0 \le x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n \le t$

* $E[X_{k:n}] = \frac{kt}{n+1}$

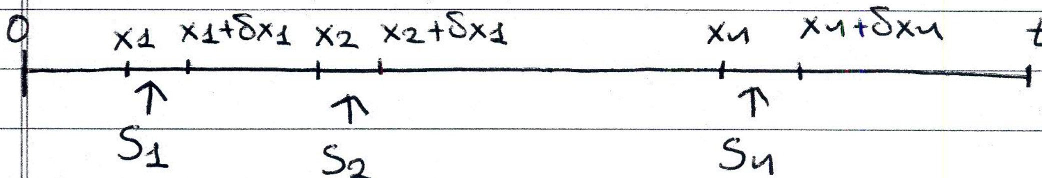
Απόδειξη:

Ανδο:

σ.π.π $$f_{(S_1,S_2,\dots,S_n|N(t)=n)}(x_1,x_2,\dots,x_n)=\frac{n!}{t^n},\quad 0\le x_1\le x_2\le\dots\le x_n\le t$$

Έχω: $$f_{(S_1,S_2,\dots,S_n|N(t)=n)}(x_1,x_2,\dots,x_n)=$$

$$=\lim_{\delta x_1,\delta x_2,\dots,\delta x_n\to 0^+}\frac{P(x_1<S_1\le x_1+\delta x_1,\dots,x_n<S_n\le x_n+\delta x_n|N(t)=n)}{\delta x_1\,\delta x_2\dots\delta x_n}$$



$$=\lim_{\delta x_1,\dots,\delta x_n\to 0^+}\frac{\cancel{e^{-\lambda x_1}}\cdot\cancel{e^{-\lambda\delta x_1}}\cdot\frac{(\lambda\delta x_1)^1}{1!}\cdot\cancel{e^{-\lambda(x_2-x_1-\delta x_1)}}\cdots\cdots\cancel{e^{-\lambda(t-x_n-\delta x_n)}}}{\delta x_1\,\delta x_2\dots\delta x_n\cdot\cancel{e^{-\lambda t}}\cdot\frac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

$$=\frac{n!}{t^n},\quad 0\le x_1\le x_2\le\dots\le x_n\le t$$

Πρακτικά αν θέλω να υπολογίσω μια πιθανότητα

$P((S_1,S_2,\dots S_n)\in A|N(t)=n)=$ πετάω τη δέσμευση και τις αντικαθιστώ με διατεταγμένες ομοιόμορφες

$=P((U_{1:n},\dots,U_{n:n})\in A)$

και

$$E[f(S_1,\dots,S_n)|N(t)=n]=E[f(U_{1:n},U_{2:n},\dots,U_{n:n})]$$

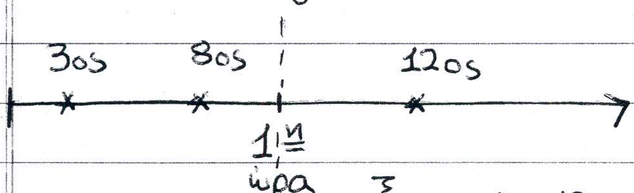
(7) Παράδειγμα:

Πελάτες φθάνουν σε ένα κατάστημα σύμφωνα με σ.δ Poisson με ρυθμό 19 πελάτες / ώρα.

Ο $3^{ος}$ πελάτης θα περιμένει τον φίλο του που είναι ο κ-οστός πελάτης.

i) Ο μέσος χρόνος που θα περιμένει για τον φίλο του δεδομένου ότι στην $1^η$ ώρα λειτουργίας του καταστήματος ήρθαν 9 πελάτες.

Να λυθεί για κ=8 και κ=12.



9 πελάτες → ξεκινούν όλα από την αρχή και για τον 12ο είναι το ίδιο με το να είναι ο 3ος πελάτης της 2ης ώρας.

ο 8ος από 9 ομοιόμορφες — ο 3ος από 9 ομοιόμορφες

i) 1) $\kappa=8 \rightsquigarrow E[S_8 - S_3 / N(1)=9] = E[U_{8:9} - U_{3:9}]$

$$= \frac{8\cdot 1}{9+1} - \frac{3\cdot 1}{9+1}$$

$$= \frac{5}{10} \text{ ώρες},$$ Δηλ. μισή ώρα θα περιμένει για τον φίλο του

2) $\kappa=12 \rightsquigarrow E[S_{12} - S_3 / N(1)=9] = E[S_{12} / N(1)=9] - E[U_{3:9}]$

$$= \frac{3}{19} + 1 - \frac{3\cdot 1}{9+1}$$

$= \dots\dots$