27/2/2013

Ασκήσεις Φυλλαδίου 1

(1) X χρόνος ζωής εξαρτήματος

$X \sim \exp(\lambda) \quad (f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x > 0)$

Επιθεωρητής ελέγχει το εξάρτημα κάθε t χρονικές μονάδες

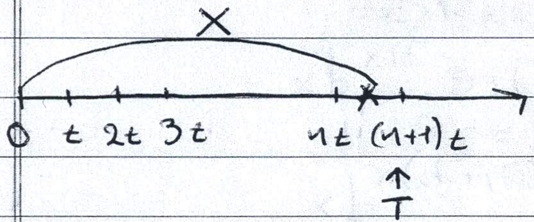
T: χρονική στιγμή που ο επιθεωρητής ανακαλύπτει ότι το εξάρτημα χάλασε.

$E(T) = ?$

Λύση:

$$E[T] = E[E[T|X]] = \int_0^\infty E[T|X=x]\, f_X(x)\, dx$$

όπου $E[T|X=x] = (n+1)t, \quad nt < x \leq (n+1)t$



Άρα
$$E[T] = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nt}^{(n+1)t} E[T|X=x]\, f_X(x)\, dx$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nt}^{(n+1)t} (n+1)t \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t \int_{nt}^{(n+1)t} \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t \left[-e^{-\lambda x}\right]_{nt}^{(n+1)t}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t e^{-\lambda n t} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t e^{-\lambda (n+1) t}}_{n' = n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, t\, e^{-\lambda n t} - \sum_{n'=1}^{\infty} n' t\, e^{-\lambda n' t}$$

$$= \cancel{\sum_{n=0}^{\infty} n t e^{-\lambda n t}} + \sum_{n=0}^{\infty} t e^{-\lambda n t} - \cancel{\sum_{n=0}^{\infty} n t e^{-\lambda n t}}$$

$$= t \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\lambda t}\right)^{n}$$

$$= t \, \frac{1}{1-e^{-\lambda t}}$$

<u>Παρατήρηση</u> (Αν ο επιθεωρητής κοιτάει συνέχεια το μηχάνημα, τότε η στιγμή/μέσος χρόνος που παρατηρεί ότι χάλασε, είναι ακριβώς η στιγμή/μέσος χρόνος που αυτό χάλασε)

Δηλαδή,

$$\lim_{t\to 0} E[T] = \lim_{t\to 0} \frac{t}{1-e^{-\lambda t}} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\lambda e^{-\lambda t}} = \frac{1}{\lambda} = E[X]$$

(2) - κάλπη με a λευκά και b μαύρα σφαιρίδια

- τραβάμε ένα σφαιρίδιο και: • αν είναι λευκό, το επανατοποθετούμε
  • αν είναι μαύρο, βάζουμε στη θέση του ένα λευκό.

- X_n: # λευκών σφαιριδίων στην κάλπη αφού το πείραμα επαναληφθεί n φορές.

α) Νδο: $E[X_{n+1}] = \left(1 - \frac{1}{a+b}\right) E[X_n] + 1$

β) Να βρεθεί κλειστός τύπος για την $E[X_n]$

<u>Λύση:</u>

α) $E[X_{n+1}] = E[E[X_{n+1} \mid X_n]] = \sum_{x=a}^{a+b} E[X_{n+1} \mid X_n = x]\, f_{X_n}(x)$

όπου $E[X_{n+1} \mid X_n = x] = x \underbrace{P[X_{n+1} = x \mid X_n = x]}_{\text{πιθ. να τραβήξω λευκό δεδ. ότι τα λευκά είναι } x} + (x+1) \underbrace{P[X_{n+1} = x+1 \mid X_n = x]}_{\text{πιθ. να τραβήξω μαύρο δεδ. ότι τα λευκά είναι } x}$

$$= x \cdot \frac{x}{a+b} + (x+1) \cdot \frac{(a+b-x)}{a+b}$$

$$= \frac{\cancel{x^2}+ax+bx-\cancel{x^2}+a+b-x}{a+b}$$

$$= \frac{x(a+b-1)+a+b}{a+b}$$

$$= x\left(1-\frac{1}{a+b}\right)+1$$

Άρα $E[X_{n+1}] = \sum_{x=a}^{a+b}\left[x\left(1-\frac{1}{a+b}\right)+1\right] f_{X_n}(x)$

$$= \sum_{x=a}^{a+b} x\left(1-\frac{1}{a+b}\right) f_{X_n}(x) + \sum_{x=a}^{a+b} f_{X_n}(x)$$

$$= \left(1-\frac{1}{a+b}\right)\underbrace{\sum_{x=a}^{a+b} x \cdot f_{X_n}(x)}_{E[X_n]} + \underbrace{\sum_{x=a}^{a+b} f_{X_n}(x)}_{1} = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)E[X_n]+1$$

β) $\boxed{E[X_n] = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)E[X_{n-1}]+1}$

$$E[X_n] = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)\left[\left(1-\frac{1}{a+b}\right)E[X_{n-2}]+1\right]+1$$

$$\boxed{E[X_n] = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^2 E[X_{n-2}] + \left(1-\frac{1}{a+b}\right)+1}$$

$$E[X_n] = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^2\left[\left(1-\frac{1}{a+b}\right)E[X_{n-3}]+1\right] + \left(1-\frac{1}{a+b}\right)+1$$

$$\boxed{E[X_n] = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^3 E[X_{n-3}] + \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{a+b}\right)+1}$$

Άρα: $E[X_n] = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n E[X_0] + \sum_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{1}{a+b}\right)$

$$E[X_n] = a\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n + \frac{1-\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n}{\cancel{1}-\left(\cancel{1}-\frac{1}{a+b}\right)}$$

$$E[X_n] = a\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n + a+b-(a+b)\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n$$

$$\boxed{E[X_n] = a+b-b\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n}$$

③

! Σε τέτοια προβλήματα, δεσμεύουμε ως προς την πρώτη φορά που συμβαίνει αυτό που "χαλάει" το πείραμα δηλαδή εδώ, να έρθουν γράμματα.

- ρίψη νομίσματος
- κεφαλή με πιθανότητα p

γράμματα με πιθανότητα $1-p$

<u>Να βρεθεί</u>: ο μέσος αριθμός ρίψεων μέχρι να παρατηρηθεί μια σειρά από r συνεχόμενες κεφαλές

X: # ρίψεων μέχρι r συνεχόμενες κεφαλές

$E[X] = ?$

Y: # ρίψης που εμφανίζεται για πρώτη φορά γράμματα

$Y \sim Geom(1-p)$

$f_Y(y) = p^{y-1}(1-p)$, $y=1,2,\dots$

$$E[X] = E[E[X|Y]] = \sum_{y=1}^{\infty} E[X|Y=y]\, f_Y(y) \quad \text{, όπου}$$

$$E[X|Y=y] = \begin{cases} r & , y \geq r+1 \\ y + E[X] & , y \leq r \end{cases}$$

Άρα $$E[X] = \sum_{y=1}^{r} (y + E[X])\, p^{y-1}(1-p) + \sum_{y=r+1}^{\infty} r\, p^{y-1}(1-p)$$

$$E[X] = (1-p)\sum_{y=1}^{r} y\, p^{y-1} + (1-p)\, E[X] \sum_{y=1}^{r} p^{y-1} + (1-p)\, r \sum_{y=r+1}^{\infty} p^{y-1}$$

όπου, $$\sum_{y=0}^{r} p^y = \frac{1-p^{r+1}}{1-p} \xrightarrow{d/dp} \sum_{y=1}^{r} y\, p^{y-1} = \frac{-(r+1)p^r(1-p) + 1 - p^{r+1}}{(1-p)^2}$$

και $$\sum_{y=1}^{r} p^{y-1} \underset{=}{\overset{y'=y-1}{=}} \sum_{y'=0}^{r-1} p^{y'} = \frac{1-p^r}{1-p}$$

και $\displaystyle\sum_{y=r+1}^{\infty} p^{y-1} \overset{y'=y-r-1}{=\!=\!=} \sum_{y'=0}^{\infty} p^{y'+r} = p^r \sum_{y'=0}^{\infty} p^{y'} = p^r \cdot \frac{1}{1-p}$

Άρα,

$$E[X] = \cancel{(1-p)} \cdot \frac{(r+1)p^r(1-p)+1-p^{r+1}}{(1-p)^{\cancel{2}}} + \cancel{(1-p)}\,E[X] \cdot \frac{1+p^r}{\cancel{1-p}} +$$

$$+ (1-p) r \frac{p^r}{1-p}$$

$$\Rightarrow (\cancel{1}-\cancel{1}+p^r)E[X] = \frac{-(r+1)p^r(1-p)+1-p^{r+1}+r(1-p)p^r}{1-p}$$

$$\Rightarrow p^r E[X] = \frac{-p^r \cancel{+p^{r+1}} + 1 \cancel{-p^{r+1}}}{1-p}$$

$$E[X] = \frac{1-p^r}{p^r(1-p)}$$

(4)

Χ μη αρνητική ακέραια τμ με πιθανογεννήτρια

$$P_X(z) = \frac{c}{6-z-z^2}$$

α) $c = ?$
β) $E[X] = ?$
γ) $f_X(x) = P[X=x]$, $x = 0, 1, 2, \dots$
δ) $P(X = \text{άρτιος})$

α) $P_X(1) = 1 \Rightarrow \dfrac{c}{6-1-1^2} = 1 \Rightarrow c = 4$

Άρα $P_X(z) = \dfrac{4}{6-z-z^2}$

β) $E[X] = P_X'(1)$

$$P_X'(z) = -\frac{4(-1-2z)}{(6-z-z^2)^2} = \frac{4+8z}{(6-z-z^2)^2}$$

$$E[X] = P_X'(1) = \frac{4+8}{(6-1-1)^2} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

γ) $P_X(z) = \frac{4}{(2-z)(3+z)} = \frac{A}{2-z} + \frac{B}{3+z} \quad (1)$

<u>Για το A:</u>

$$(1) \xRightarrow{\times(2-z)} \frac{4}{3+z} = A + \frac{B(2-z)}{3+z}$$

$$\xRightarrow{z=2} \frac{4}{5} = A$$

<u>Για το B:</u>

$$(1) \xRightarrow{\times(3+z)} \frac{4}{2-z} = \frac{A(3+z)}{2-z} + B$$

$$\xRightarrow{z=-3} \frac{1}{3} = B$$

$$P_X(z) = \frac{4/5}{2-z} + \frac{4/5}{3+z}$$

$$P_X(z) = \frac{4/10}{1-\frac{z}{2}} + \frac{4/15}{1+\frac{z}{3}}$$

$$P_X(z) = \frac{2}{5}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{4}{15}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)}$$

$$P_X(z) = \frac{2}{5}\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^x + \frac{4}{15}\sum_{x=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{3}\right)^x$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot z^x + \frac{4}{15} \left(-\frac{1}{3}\right)^x z^x \right)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{4}{15} \left(-\frac{1}{3}\right)^x \right]}_{P(X=x)} z^x$$

Άρα $P[X=x] = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{4}{15} \left(-\frac{1}{3}\right)^x$

δ) $P(X = \text{άρτιος}) = \sum_{k=0}^{\infty} P[X=2k]$

$x = 0, 1, 2, \ldots$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{2}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} + \frac{4}{15} \left(-\frac{1}{3}\right)^{2k} \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{2}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^k + \frac{4}{15} \left(\frac{1}{9}\right)^k \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{5} \left(\frac{1}{9}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{15} \left(\frac{1}{9}\right)^k$$

$$= \frac{2}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^k + \frac{4}{15} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^k$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{9}}$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}} + \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{\frac{8}{9}}$$

$$= \frac{8}{15} + \frac{9}{30}$$

$$= \frac{25}{30}$$

$$= \frac{5}{6}$$

(5)

$$\left.\begin{array}{l} X \sim \exp(\lambda) \\ Y \sim \exp(\lambda) \\ Z \sim \exp(\mu) \end{array}\right\}$$ ανεξάρτητες και $\lambda \neq \mu$

1) $\tilde{F}_{X+Y+Z}(s) = ?$

2) $f_{X+Y+Z}(\omega) = ?$

1) $\tilde{F}_X(s) = \dfrac{\lambda}{\lambda+s} = \tilde{F}_Y(s)$

$\tilde{F}_Z(s) = \dfrac{\mu}{\mu+s}$

$\tilde{F}_{X+Y+Z}(s) \overset{\text{ανεξ}}{=\!=} \tilde{F}_X(s)\,\tilde{F}_Y(s)\,\tilde{F}_Z(s) = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2 \cdot \dfrac{\mu}{\mu+s}$

2) $\tilde{F}_{X+Y+Z}(s) = \dfrac{A}{(\lambda+s)^2} + \dfrac{B}{\lambda+s} + \dfrac{\Gamma}{\mu+s}$

. . . .