Στοχαστικές Μέθοδοι στην Ε.Ε

13/2/2013

Ώρες γραφείου: Δευτ. - Τετ. - Παρ 2-3 μμ

E-class ≃ 40 ασκήσεις + θα γίνουν extra

Βιβλίο: Kulkarni: Modeling and Analysis of Stochastic Systems

Μέρη:
1) Διαδικασία Poisson (4 εβδ) — στοχαστικό ανάλογο του #. γεγονότων στο χρόνο
2) Ανανεωτική Θεωρία (5 εβδ)
3) Εισαγωγή στις Ουρές Αναμονής (3 εβδ)

(+ 1,5 εβδ) στην αρχή βασικά από ΠΘΙ.

Επανάληψη στις Πιθανότητες

Δεσμευμένη μέση τιμή

① Δεσμευμένη σ.π και σ.π.π

- (X,Y) τμ $\longrightarrow f_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$ σ.π, (X,Y) διακριτές

ΠΘ η X να βρίσκεται κοντά στο x και η Y κοντά στο y δια το αντίστοιχο εμβαδό

$$\longrightarrow f_X(x,y) = \lim_{\substack{dx \to 0^+ \\ dy \to 0^+}} \frac{P(x < X \leq x+dx,\ y < Y \leq y+dy)}{dx\,dy}$$

σ.π.π (X,Y) συνεχείς

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

δεσμευμένη σ.π/σ.π.π της X δοθ. ότι $Y=y$

② Δεσμευμένη μέση τιμή

$$E[X/Y=y] = m_{X|Y}(y) = \begin{cases} \sum_x x\, f_{X|Y}(x/y), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|Y}(x/y)\, dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

αριθμός που εξαρτάται από το y

Δεσμευμένη μέση τιμή της X δοθ. ότι $Y=y$.

$$E[X|Y] = m_{X|Y}(Y)$$

Τυχαία μεταβλητή συνάρτηση της Y,
"Δεσμευμένη μέση τιμή της X δοθείσης της Y"

Η καλύτερη προσέγγιση της X από συνάρτηση της Y

③ Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής

$$E[X] = E[E[X|Y]] = E[m_{X|Y}(Y)]$$

$$= \begin{cases} \sum_y m_{X|Y}(y)\, f_Y(y), & Y \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} m_{X|Y}(y)\, f_Y(y)\, dy, & Y \text{ συνεχής} \end{cases}$$

$$\| \quad E[X|Y=y]$$

ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιούμε.

(4) Παράδειγμα

Τυχαίο πείραμα: Ρίψη ζαριού $\longrightarrow$ 1ο στάδιο

Ρίψη νομίσματος όσες φορές δείξει το ζάρι $\Big\} \longrightarrow$ 2ο στάδιο

X = # γραμμάτων που έφερε το νόμισμα

Με ενδιαφέρει η $E[X] = ?$ (Το ερώτημα είναι που θα πρέπει να δεσμεύσουμε)

Y = Αποτελ. ρίψης του ζαριού

άθρ. για τις πιθανές τιμές του ζαριού — δεσμεύω στην Y — y δοκιμές πιθ επιτυχίας το $\frac{1}{2}$

$$E[X] = E[E[X|Y]] = \sum_{y} E[X|Y=y] \cdot f_Y(y) = \sum_{y=1}^{6} \frac{y}{2} \frac{1}{6} =$$

Μέση τιμή της $Bin(y, \frac{1}{2})$

$$= \frac{1}{12} \sum_{y=1}^{6} y = \frac{1}{\cancel{12}_{2}} \cdot \frac{\cancel{6} \cdot 7}{2} = \frac{7}{4}$$

(5) Παράδειγμα

Νόμισμα φέρνει $K \longrightarrow$ μθ p

$\Gamma \longrightarrow$ μθ $1-p$

X = # ρίψεων μέχρι την 1η K

$E[X] = ?$

Α' τρόπος

$$f_X(x) = P(X=x) = (1-p)^{x-1} p \quad , x = 1, 2, \ldots$$

$$E[X] = \sum_{x} x f_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x (1-p)^{x-1} p \overset{(*)}{=} \frac{1}{p}$$

$$\left(\sum_{x=0}^{\infty} t^x = \frac{1}{1-t} \overset{d/dt}{\Longrightarrow} \sum_{x=1}^{\infty} x t^{x-1} = \frac{1}{(1-t)^2} \right.$$

$$\overset{t=1-p}{\Longrightarrow} \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} = \frac{1}{p^2} \overset{\cdot p}{\Longrightarrow} \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} p = \frac{1}{p} \left. \right)$$

B΄ τρόπος

$Y =$ αποτελ. $1^{ης}$ ρίψης $\to$ Κ δηλ (1), $\to$ Γ δηλ (0)

$$E[X] = E[E[X|Y]] = \sum_{y=0}^{1} E[X|Y=y] P[Y=y]$$

$$= (1-p) \underbrace{E[X|Y=0]}_{1+E[X]} + p \underbrace{E[X|Y=1]}_{1}$$

$$\Longrightarrow E[X] = (1-p) \cdot (1+E[X]) + p1$$

$$= 1 + (1-p) E[X]$$

$$\Longrightarrow \boxed{E[X] = \frac{1}{p}}$$

6 Παράδειγμα

η καμήλα — η άτομα.
Διαλέγουν στην τύχη με κλειστά μάτια.
Όσοι βρουν το δικό τους αποχωρούν. Οι υπόλοιποι συνεχίζουν κ.ο.κ.

$R_n =$ # γύρων μέχρι να φύγουν όλοι, ξεκινώντας με η ~~άτομα~~

- $E[R_n] = ?$

- $E[R_1] = 1$
- $E[R_2] = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 1}_{\text{βρίσκουν κατευθείαν τα καπέλα τους στον 1ο γύρο}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(1+E[R_2]\right)}_{\text{Δεν τα βρήκαν την 1η φορά και ξανά από την αρχή.}}$

Άτομα: 1 2

Καπέλα: 1 2

2 1

$\Rightarrow E[R_2] = 2$

- $E[R_3] =$

$E[R_3 / \ ] = 1$

$E[R_3 / \ ] = 1 + E[R_2]$

	1 2 3	
1/6	1 2 3	πήραν όλοι τα καπέλα
1/6	$\boxed{1\ 3\ 2}$	1 πήρε το καπέλο του
1/6	$\boxed{2\ 1\ 3}$	
1/6	$\boxed{2\ 3\ 1}$	κανείς δεν παίρνει το καπέλο του
1/6	$\boxed{3\ 1\ 2}$	
1/6	$\boxed{3\ 2\ 1}$	1 πήρε το καπέλο του

$$E[R_3] = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{3}{6}\cdot\left(1+E[R_2]\right) + \frac{2}{6}\left(1+E[R_3]\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}E[R_3] = 1 + \frac{1}{2}\underset{2}{E[R_2]}$$

$$\Rightarrow E[R_3] = 3.$$

Υποψιαζόμαστε πως όσα άτομα είμαστε περίπου τόσοι γύροι θα χρειαστούν ($E[R_n] = n$)

* $M = \#$ ανθρώπων που φεύγουν στον 1ο γύρο

$$E[R_n] = E\left[E[R_n \mid M]\right]$$

$$= \sum_{m=0}^{n}\left(1+E[R_{n-m}]\right)P[M=m]$$

$$= 1 + \sum_{m=0}^{n} E[R_{n-m}]P[M=m]$$

Εικασία

$E[R_n]=n$

Για $n=1$ ισχύει $E[R_1]=1$

Έστω ότι ισχύει για μέχρι το $n-1$

$E[R_i]=i$, $1\leq i\leq n-1$

$$E[R_n]=1+\sum_{m=1}^{n}(n-m)P(M=m)+E[R_n]P[M=0]$$

$$=1+n\cdot(1-P[M=0])-\overset{(*)}{E[M]}^{''1}+E[R_n]P[M=0]$$

Άρα: $E[R_n](1-P[M=0])=n(1-P[M=0])$

$\Rightarrow E[R_n]=n$.

$$\boxed{\text{Άρα } E[R_n]=n,\ n=1,2,\dots}$$

(*) $M=\sum_{i=1}^{n} I_i$, $I_i=\begin{cases}1, & \text{αν ο } i \text{ πάρει το καπέλο του στον } 1^{\text{ο}} \text{ γύρο}\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$

$\Rightarrow E[M]=\sum_{i=1}^{n}E[I_i]=n\cdot\frac{1}{n}=1.$

⑦ ## Παράδειγμα

Φυλακισμένος διαλέγει 1 πόρτα από 3

1 → Άμεση ελευθερία

2 → Πίσω στο κελί σε 10 μέρες

3 → " " " " 30 μέρες

Και μετά αμνησία και ξανά πόρτα...

$\underbrace{\text{Μέσο χρόνο ώς την ελευθερία}}_{X}$

$E[X]=?$

• Y = Πόρτα της 1ης επιλογής

$$E[X] = \underbrace{P[Y=1]}_{=1/3} \underbrace{E[X \mid Y=1]}_{=0} + \underbrace{P[Y=2]}_{=1/3} \underbrace{E[X \mid Y=2]}_{=10+E[X]} + \underbrace{P[Y=3]}_{=1/3} \underbrace{E[X \mid Y=3]}_{=30+E[X]}$$

$$E[X] = \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}(10+E[X]) + \frac{1}{3}(30+E[X])$$

$\Longrightarrow E[X] = \ldots\ldots$

⑧ <u>Παράδειγμα</u>

• Οι A, B μονομαχούν (εναλλάξ) μέχρι να σκοτωθεί κάποιος

P(ευστοχίας A) = $\frac{1}{2}$

P(ευστοχίας B) = $\frac{1}{3}$

P(επιβίωσης του A | αρχίζει ο A).

E[# γύρων της μονομαχίας | αρχίζει ο A] = ;

P(επιβ A | αρχίζει ο A) = P_A = ?
P(επιβ B | αρχίζει ο A) = $1-P_A$ = ?
P(επιβ A | αρχίζει ο B) = $1-P_B$ = ?
P(επιβ B | αρχίζει ο B) = P_B = ?

E[# γύρων | αρχ ο A] = τ_A = ?

E[# γύρων | αρχ ο B] = τ_B = ?

ΘΟΠ

$$\left.\begin{aligned} P_A &= \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}(1-P_B) \\ P_B &= \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{2}{3}(1-P_A) \end{aligned}\right\} \overset{\text{Σύστημα}}{\Longrightarrow} P_A = ?,\ P_B = ?$$

ΘΔΜΤ (για το # των γύρων)

$$\left.\begin{aligned} \tau_A &= \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}(1+\tau_B) \\ \tau_B &= \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{2}{3}(1+\tau_A) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \tau_A = ?,\ \tau_B = ?$$