Μάθημα: 21ο 13/6/2012

Ασκήσεις

① Φυλλάδιο 4 / Άσκηση: 2

$\{N_1(t)\}$ διαδ. Poisson με $\lambda_1 = 3$

$\{N_2(t)\}$ $\lambda_2 = 2$

ανεξ.

$\{N(t)\}$ η υπέρθεση

$$E[N_1(t) \mid N(t)=10] = ;$$

Λύση:

$$E[N_1(t) \mid N(t)=10] = \sum_{n=0}^{10} n \cdot P(N_1(t)=n \mid N(t)=10) =$$

$$= \sum_{n=0}^{10} n \cdot \frac{P(N_1(t)=n,\ N(t)=10)}{P(N(t)=10)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{10} n \cdot \frac{P(N_1(t)=n,\ N_2(t)=10-n)}{P(N(t)=10)} \overset{N_1, N_2}{\underset{\text{ανεξ.}}{=}}$$

$$= \sum_{n=0}^{10} n \frac{P(N_1(t)=n)\, P(N_2(t)=10-n)}{P(N(t)=10)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{10} n \frac{\cancel{e^{-3t}} \frac{(3t)^n}{n!} \cancel{e^{-2t}} \frac{(2t)^{10-n}}{(10-n)!}}{\cancel{e^{-5t}} \frac{(5t)^{10}}{10!}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{10} n \underbrace{\binom{10}{n} \left(\frac{3}{5}\right)^n \left(\frac{2}{5}\right)^{10-n}}_{\text{συν/ση πιθ. της } Bin(10, \frac{3}{5})}$$

$$= 10 \cdot \frac{3}{5} = \frac{30}{5} = 6.$$

② Φυλλάδιο: 4 / Άσκηση: 3

$\{N(t)\}$ διαδ. Poisson ρυθμού λ $\xrightarrow{\text{τύπου } 1}$ με πιθ. $p \rightarrow \{N_1(t)\} \longrightarrow$

$\xrightarrow{\text{τύπου } 2}$ με πιθ. $1-p \rightarrow \{N_2(t)\} \longrightarrow$

$\longrightarrow T_1$: χρόνος 1ου γεγον. της $\{N_1(t)\}$

$\longrightarrow T_2$: $\{N_2(t)\}$

$$F_{T_1,T_2}(t_1, t_2) = P(T_1 \le t_1,\ T_2 \le t_2) = ;$$

Λύση:

$$\{S_n \le t\} = \{N(t) \ge n\}$$

$$F_{T_1,T_2}(t_1,t_2) = P(T_1 \le t_1, T_2 \le t_2) = P(N_1(t_1) \ge 1, N_2(t_2) \ge 1)$$
$$\underset{N_2(t)\ \text{ανεξ.}}{\overset{N_1(t)}{=}} P(N_1(t_1) \ge 1) P(N_2(t_2) \ge 1) = (1-e^{-\lambda p t_1})(1-e^{-\lambda(1-p)t_2})$$

③ Φυλλάδιο 4 / Άσκηση: 4

k είδη διαταρ.

Διαταραχή τύπου i → Poisson με ρυθμό λ_i

→ Βλάβη με πιθ. p_i

Όλα ανεξ.

T: χρόνος ζωής (μέχρι την 1^n βλάβη)

S: είδος διαταρ. που προκαλεί τη βλάβη.

$P(T>t, S=i) =$;

Λύση:

$P(T>t, S=i) = P(T>t) P(S=i / T>t)$ ή

$= P(S=i) P(T>t / S=i)$

$\{N_i(t)\}$ διαδ. Poisson των διαταρ. τύπου i με ρυθμό λ_i

$\{M_i(t)\}$ διαδ. των διαταρ. τύπου i που προκαλούν βλάβη είναι Poisson με ρυθμό $\lambda_i p_i$ (λόγω διάσπασης)

$\{M(t)\}$ η υπέρθεση των $\{M_i(t)\}$: διαδ. όλων των διαταρ. που προκαλούν βλάβη.

$\{M(t)\}$ είναι διαδ. Poisson ρυθμού $\sum \lambda_i p_i$

T ο χρόνος $1^{ου}$ γεγον. της $\{M(t)\} \sim \mathcal{E}xp(\sum_j \lambda_j p_j)$

S το είδος του $1^{ου}$ γεγον. της $\{M(t)\}$.

Από θεώρημα:

$$P(S=i / T>t) = \frac{\lambda_i p_i}{\sum_j \lambda_j p_j}$$

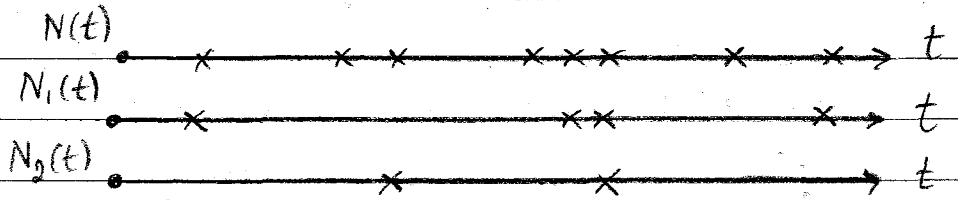
Άρα: $P(T>t, S=i) = e^{-\sum_j \lambda_j p_j \cdot t} \cdot \dfrac{\lambda_i p_i}{\sum_j \lambda_j p_j}$

4 Φυλλάδιο 4 | Άσκηση: 5

$\{N(t)\}$ διαδ. Poisson με ρυθμό λ

Κάθε γεγονός καταγραφ. με πιθ. $1/3$, ανεξάρτητα, στην $\{N_1(t)\}$.

Η $\{N_2(t)\}$ καταγράφει το 3ο, 6ο, 9ο, 12ο, ... γεγ. της $\{N(t)\}$.



(i) Η $\{N_2(t)\}$ είναι διαδ. Poisson;

(ii) $P(N_1(t)=3 \mid N_2(t)=1)$

Λύση:

(i) Η $\{N_2(t)\}$ δεν είναι διαδ. Poisson, διότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την Gamma$(3,\lambda)$

(ii)
$$P(N_1(t)=3 \mid N_2(t)=1) = \frac{P(N_1(t)=3,\ N_2(t)=1)}{P(N_2(t)=1)} =$$
$$= \frac{P(N_1(t)=3,\ N(t)=3 \text{ ή } 4 \text{ ή } 5)}{P(N(t)=3 \text{ ή } 4 \text{ ή } 5)}$$
$$= \frac{P(N_1(t)=3, N(t)=3)+P(N_1(t)=3, N(t)=4)+P(N_1(t)=3, N(t)=5)}{P(N(t)=3)+P(N(t)=4)+P(N(t)=5)}$$
$$= \dots$$

Π.χ. $P(N_1(t)=3,\ N(t)=5) = P(N_1(t)=3,\ N(t)-N_1(t)=2)$
$$= e^{-\lambda\frac{1}{3}t}\frac{(\lambda\frac{1}{3}t)^3}{3!}\, e^{-\lambda\frac{2}{3}t}\frac{(\lambda\frac{2}{3}t)^2}{2!}$$

5 Υπενθυμίσεις

$$\left.\begin{aligned} &M(t) = G(t) + (G*M)(t) \\ &M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(t) \\ &\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad G(t) \to M(t)$$

6) Φυλλάδιο 6 / 1η Άσκηση: 1

$G(t) \to U(0,1)$

$M(t) = E[N(t)] = e^t - 1 \quad , 0 \le t \le 1$

Λύση:

$M(t) = G(t) + \int_0^t M(t-x)\, dG(x) \quad , 0 \le t \le 1 \iff$

$M(t) = t + \int_0^t M(t-x)\, dx \quad , 0 \le t \le 1 \iff$

$M(t) = t + \int_0^t M(u)\, du \quad , 0 \le t \le 1 \overset{d/dt}{\iff}$

$M'(t) = 1 + M(t) \quad , 0 \le t \le 1 \iff$

$M'(t) - M(t) = 1 \quad , 0 \le t \le 1 \iff$

$e^{-t} M'(t) - e^{-t} M(t) = e^{-t} \quad , 0 \le t \le 1 \iff$

$\frac{d}{dt}\left(e^{-t} M(t)\right) = e^{-t} \quad , 0 \le t \le 1 \iff$

$e^{-t} M(t) = -e^{-t} + c \quad , 0 \le t \le 1$

Άρα: $M(t) = c \cdot e^t - 1 \quad , 0 \le t \le 1$

Όμως: $M(0) = 0 \Rightarrow c \cdot e^0 - 1 = 0 \Rightarrow c = 1$

Άρα: $M(t) = e^t - 1 \quad , 0 \le t \le 1$

7) Φυλλάδιο 6 / 1η Άσκηση: 2

$G(t)$ με σ.π.π. $g(t) = p \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} + (1-p)\mu \cdot e^{-\mu t} \quad , t \ge 0.$

$M(t) = ;$

Λύση:

$\tilde{G}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dG(t) = \int_0^\infty e^{-st} g(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st}(p\lambda e^{-\lambda t} + (1-p)\mu e^{-\mu t})\, dt$

$= p\lambda \frac{1}{s+\lambda} + (1-p)\mu \cdot \frac{1}{s+\mu}$

<u>Έχουμε:</u> $\tilde{M}(s) = \dfrac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)} = \dfrac{\dfrac{p\lambda}{s+\lambda} + \dfrac{(1-p)\mu}{s+\mu}}{1 - \dfrac{p\lambda}{s+\lambda} - \dfrac{(1-p)\mu}{s+\mu}} =$

$$= \frac{p\lambda(s+\mu)+(1-p)\mu(s+\lambda)}{(s+\lambda)(s+\mu) - p\lambda(s+\mu) - (1-p)\mu(s+\lambda)} =$$

$$= \frac{(p\lambda+(1-p)\mu)s + \lambda\mu}{s^2 + (\lambda+\mu)s + \cancel{\lambda\mu} - (p\lambda+(1-p)\mu)s - \cancel{\lambda\mu}}$$

$$= \frac{(p\lambda+(1-p)\mu)s+\lambda\mu}{s(s+\lambda(1-p)+\mu p)}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\lambda(1-p)+\mu p}$$

$$= \frac{(A+B)s + A(\lambda(1-p)+\mu p)}{s(s+\lambda(1-p)+\mu p)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} A+B = p\lambda + (1-p)\mu \\ A(\lambda(1-p)+\mu p) = \lambda\mu \end{array}\right\} \Rightarrow A, B \text{ γνωστά}$$

<u>Άρα:</u> $\tilde{M}(s) = A \cdot \dfrac{1}{s} + \dfrac{B}{\lambda(1-p)+\mu p} \cdot \dfrac{\lambda(1-p)+\mu p}{s+\lambda(1-p)+\mu p}$

$$\Rightarrow M(t) = At + \frac{B}{\lambda(1-p)+\mu p} \cdot \left(1 - e^{-(\lambda(1-p)+\mu p)t}\right)$$

<u>Αφού:</u>

$\tilde{F}(s)$		$F(t)$
$\frac{1}{s}$	$\longleftrightarrow$	t
$\frac{\lambda}{\lambda+s}$	$\longleftrightarrow$	$1-e^{-\lambda t}$
$\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$	$\longleftrightarrow$	$\sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$

(8) Φυλλάδιο 6 / Άσκηση: 3

$G(t)$ Gamma(r, λ)

$M(t) =$;

<u>Λύση:</u>

$1^η$ λύση (απόπειρα)

$$\tilde{G}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^r \Rightarrow \tilde{M}(s) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^r}{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^r} = \frac{\lambda^r}{(\lambda+s)^r - \lambda^r} =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{s}{\lambda}\right)^r - 1}$$ ← δύσκολη η αντιστροφή!

$2^η$ λύση:

$G(t)$ Gamma$(r,\lambda) \Rightarrow G^{*n}(t)$ Gamma(nr,λ)

$G^{*nr}(t) = P(S_{nr} \leq t) = P(N(t) \geq nr)$

↳ ο nr-οστός χρόνος γεγον. σε διαδ. Poisson ρυθμού λ

$$= \sum_{k=nr}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

Άρα: $M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=nr}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \sum_{k=0}^{nr-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right)$$