Μάθημα: 20ο 11/6/2012

Ασκήσεις στην Διαδικασία Poisson

① Άσκηση 1 / Φυλλάδιο 3

$\{N(t)\}$ διαδ. Poisson ρυθμού λ

$P(N(1)=1, N(2)=2, N(3)=3, \ldots, N(n)=n) =$

$P(N(1)=1, N(2)-N(1)=1, N(3)-N(2)=1, \ldots, N(n)-N(n-1)=1) \overset{\text{ανεξ. προσαυξ.}}{=}$

$P(N(1)=1)P(N(2)-N(1)=1)P(N(3)-N(2)=1)\ldots P(N(n)-N(n-1)=1) \overset{\text{ομογ. προσαυξ.}}{=}$

$P(N(1)=1)P(N(1)=1)P(N(1)=1)\ldots P(N(1)=1) = (P(N(1)=1))^n =$

$= \left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!}\right)^n = e^{-n\lambda}\lambda^n.$

② Άσκηση 2 / Φυλλάδιο 3

$\{N(t)\}$ Poisson ρυθμού λ

$E[N(1)N(2)N(3)] = ;$

Λύση:

$E[N(1)N(2)N(3)] = E[N(1)(N(2)-N(1)+N(1))(N(3)-N(2)+N(2)\overbrace{)}^{-N(1)+N(1)}] =$

$E[N(1)(N(2)-N(1))(N(3)-N(2))] + E[N(1)(N(2)-N(1))^2] +$

$+E[N(1)^2(N(2)-N(1))] + E[N(1)^2(N(3)-N(2))] +$

$+E[N(1)^2(N(2)-N(1))] + E[N(1)^3] \overset{\text{ανεξ. προσαυξ.}}{=}$

$E[N(1)]E[N(2)-N(1)]E[N(3)-N(2)] + E[N(1)]E[(N(2)-N(1))^2] +$

$+E[(N(1))^2]E[N(2)-N(1)] + E[N(1)^2]E[N(3)-N(2)] +$

$+E[N(1)^2]E[N(2)-N(1)] + E[N(1)^3] \overset{\text{ομογ. προσαυξ.}}{=}$

$(E[N(1)])^3 + 4E[N(1)]\cdot E[N(1)^2] + E[N(1)^3].$ (1)

Άρα χρειαζόμαστε $E[N(1)], E[N(1)^2], E[N(1)^3]$.

$E[N(1)] = \lambda\cdot 1 = \lambda$

$E[N(1)^2] = Var(N(1)) + (E[N(1)])^2 = \lambda + \lambda^2.$

$E[N(1)^3] = \sum_{x=0}^{\infty} x^3 e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x^3\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x(x-1)!} =$

$= \sum_{x=1}^{\infty} x^2\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{(x-1)!} \overset{x-1=k}{=} \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+1}}{k!} =$

$= \lambda\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2 \underbrace{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}_{\text{σ.κ. Poisson}} = \lambda\cdot E[(N(1)+1)^2] =$

$$= \lambda\left[E[N(1)^2] + 2E[N(1)] + 1 \right] =$$
$$= \lambda(\lambda+\lambda^2+2\lambda+1) = \lambda^3+3\lambda^2+\lambda$$

Άρα: (1) $\Rightarrow E[N(1)N(2)N(3)] = (\lambda^3+3\lambda^2+\lambda)+4\lambda(\lambda+\lambda^2)+\lambda^3$.

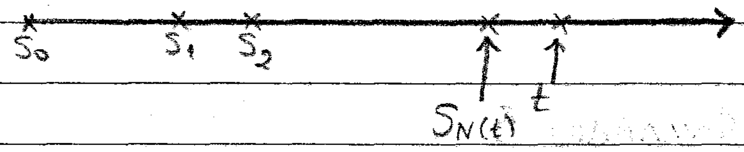
③ ΑΣΚΗΣΗ 3 / ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3

$\{N(t)\}$ Poisson ρυθμού λ

$S_1, S_2, \dots$ χρόνοι γεγον.

$S_{N(t)}$: χρόνος τελευταίου γεγον. πριν το t

$E[S_{N(t)}] =$;



Λύση:

Λάθος Λύση: $E[S_{N(t)}] = E[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i] = E[E[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \mid N(t)]]$

i ενδιάμ. χρόνος

Έχω: $E[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \mid N(t)=n] = E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \frac{n}{\lambda}$

λάθος ($N(t)$, X όχι ανεξ.)

Άρα: $E[S_{N(t)}] = E[\frac{N(t)}{\lambda}] = \frac{1}{\lambda} E[N(t)] = \frac{1}{\cancel{\lambda}} \cdot \cancel{\lambda} \cdot t = t$

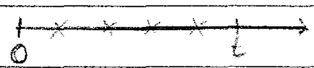
Σωστή Λύση: $E[S_{N(t)}] = E[E[S_{N(t)} \mid N(t)]]$

Όμως: $E[S_{N(t)} \mid N(t)=n] = E[S_n \mid N(t)=n]$

Επίσης: $(S_1, S_2, \dots, S_n \mid N(t)=n) \stackrel{d}{=} (U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n})$

διατεταγμ. τ/μ. από τη $U(0,t)$

Άρα: $E[S_n \mid N(t)=n] = E[U_{n:n}]$ (γενικά $E[U_{i:n}] = \frac{i}{n+1} t$)



Άρα: $E[S_{N(t)} \mid N(t)=n] = \frac{nt}{n+1}$

Άρα: $E[S_{N(t)}] = \sum_{n=0}^{\infty} E[S_{N(t)} \mid N(t)=n) P(N(t)=n)]$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt}{n+1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = t e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{(\lambda t)^n}{(n+1)!} =$$

$$= t\cdot e^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{(\lambda t)^{k-1}}{k!} =$$

$$= \frac{t}{\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k}}{k!} = \frac{1}{\lambda}\Big(E[N(t)-1] -$$

$$- (0-1)e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{0}}{0!}\Big) =$$

$$= \frac{1}{\lambda}(\lambda t - 1 + e^{-\lambda t}) = t - \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}$$

<u>Αλλιώς:</u>

$$E[S_{N(t)}] = t\cdot e^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{(\lambda t)^{k-1}}{k!} = t\cdot e^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty}\cancel{k}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{\cancel{k!}\,(k-1)} -$$

$$- t e^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{k!} =$$

$$= t\cdot e^{-\lambda t}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{x}}{x!} - t\cdot e^{-\lambda t}\frac{1}{\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k}}{k!} =$$

$$= t\cdot e^{-\lambda t}e^{\lambda t} - \frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\lambda t}(e^{\lambda t}-1) = t - \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}.$$

4 <u>ΑΣΚΗΣΗ 4 | ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3</u>

$\{N(t)\}$ Poisson με ρυθμό λ

$S_1, S_2, \ldots$ χρόνοι γεγον.

$$E\Big[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i\Big] = E\Big[E\Big[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i \,\Big|\, N(t)\Big]\Big]$$

<u>Αλλά:</u> $E\Big[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i \,\Big|\, N(t)=n\Big] = E\Big[\sum_{i=1}^{n} S_i \,\Big|\, N(t)=n\Big] = E\Big[\sum_{i=1}^{n} U_{i:n}\Big] \overset{*}{=}$

$$= E\Big[\sum_{i=1}^{n} U_i\Big] = n\,E[U_i] = \frac{nt}{2}$$

* Εναλλακτικά: $\sum_{i=1}^{n} E[U_{i:n}] = \sum_{i=1}^{n}\frac{it}{n+1} = \frac{t}{\cancel{n+1}}\,\frac{n\cancel{(n+1)}}{2} = \frac{nt}{2}.$

<u>Άρα:</u> $E\Big[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i\Big] = E\Big[\frac{N(t)t}{2}\Big] = \frac{t}{2}E[N(t)] = \frac{\lambda t^2}{2}.$

ή εναλλακτικά:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i \,\middle|\, N(t)=n\right] P(N(t)=n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt}{2}\, e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} = \frac{t}{2}\cdot \lambda t = \frac{\lambda t^2}{2}.$$

→ μέση τιμή του $N(t)$

(5) Άσκηση 5 | Φυλλάδιο 3

Αφίξεις πελατών σύμφωνα με διαδ. Poisson ρυθμού λ.

Χρόνος παραμονής πελ. $\sim Exp(\mu)$

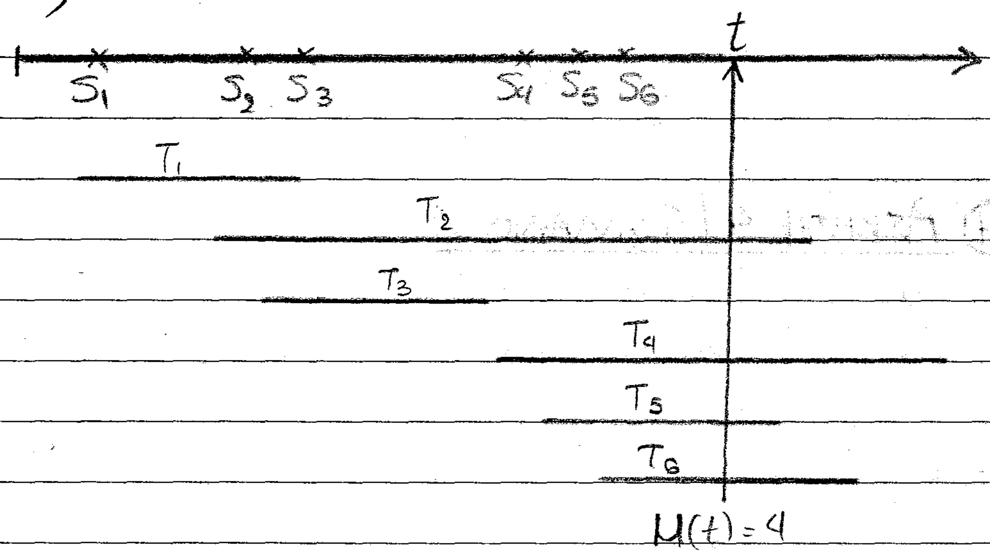
$N(t) = \#$ αφίξεων ως τη στιγμή t

$S_1, S_2, \ldots$ χρόνοι αφίξεων πελατών

$T_1, T_2, \ldots$ χρόνοι παραμονής πελατών

$M(t) = \#$ παρόντων πελατών τη στιγμή t.

$E[M(t)] =$;



1ος τρόπος:

Με ιδιότητα μη-ομογ. διαδ. Poisson

Έστω πελάτης που έρχεται τη στιγμή u καταγράφεται (= παραμένει τη στιγμή t στο σύστημα) με πιθ. $p(u)$

Τότε: $M(t) = \#$ καταγ. πελατών τη στιγμή $t \sim Poisson\left(\lambda\int_0^t p(u)\,du\right)$

Όμως: $p(u) = P($παραμονής τη στιγμή t ενός πελάτη που φθάνει τη στιγμή $u) =$

$= P($χρόνος παραμ. $> t-u) = e^{-\mu(t-u)}$

Άρα: $E[M(t)] = \lambda\int_0^t p(u)\,du = \lambda\int_0^t e^{-\mu(t-u)}\,du = \frac{\lambda}{\mu}\left(1-e^{-\lambda t}\right)$.

2^{os} τρόπος:

$$M(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} 1_{\{\text{ο πελ. } i \text{ να παραμένει τη στιγμή } t\}} = \sum_{i=1}^{N(t)} 1_{\{S_i + T_i > t\}}$$

$$E[M(t)] = E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} 1_{\{S_i+T_i>t\}}\right] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} 1_{\{S_i+T_i>t\}} \mid N(t)\right]\right].$$

<u>Αλλά:</u> $E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} 1_{\{S_i+T_i>t\}} \mid N(t)=n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} 1_{\{U_{i:n}+T_i>t\}}\right] =$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{n} 1_{\{U_i+T_i>t\}}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E\left[1_{\{U_i+T_i>t\}}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(U_i+T_i>t)$$

<u>Όμως:</u> $P(U_i+T_i>t) = \int_0^t P(x+T_i>t) f_{U_i}(x)\,dx =$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t P(T_i>t-x)\,dx = \frac{1}{t}\int_0^t e^{-\mu(t-x)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{t}\cdot\frac{1-e^{-\mu t}}{\mu}$$

<u>Άρα:</u> $E[M(t)] = E\left[N(t)\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1-e^{-\mu t}}{\mu}\right] = \frac{1}{\cancel{t}}\cdot\frac{1-e^{-\mu t}}{\mu}\,\lambda \cancel{t}$

6 <u>ΑΣΚΗΣΗ 1 | ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4</u>

$\{N(t)\}$ διαδ. Poisson με ρυθμό λ

Γεγονός → τύπου 1 με πιθ. $1/3$
Γεγονός → τύπου 2 με πιθ. $2/3$

$N_i(t) = \#$ γεγ. τύπου i στο $(0,t]$ $\quad i=1,2$

$P(N_1(3)=5,\ N(3)=11 \mid N_2(1)=4) =;$

<u>ΛΥΣΗ:</u>

$$P(N_1(3)=5,\ N_2(3)=6 \mid N_2(1)=4) = \frac{P(N_1(3)=5,\ N_2(3)=6,\ N_2(1)=4)}{P(N_2(1)=4)} =$$

$$\underset{N_1(t),\,N_2(t)}{\overset{\text{ανεξ.}}{=}} \frac{P(N_1(3)=5)\,P(N_2(1)=4,\ N_2(3)=6)}{P(N_2(1)=4)} =$$

$$= \frac{P(N_1(3)=5)\,P(N_2(1)=4,\ N_2(3)-N_2(1)=2)}{P(N_2(1)=4)}$$