Μάθημα: 19ο    6/6/2012

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ

## ΑΣΚΗΣΗ: 1

$\{N(t): t \geq 0\}$ διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda$

$P(N(t)=k / N(t+s)=k+m) = ;$, $t \geq 0$, $s \geq 0$, $k \geq 0$, $m \geq 0$

### ΛΥΣΗ:

$$P(N(t)=k / N(t+s)=k+m) = \frac{P(N(t)=k, N(t+s)=k+m)}{P(N(t+s)=k+m)} =$$

$$\underset{\text{προσαυξ.}}{\overset{\text{ανεξ}}{=}} \frac{P(N(t)=k, N(t+s)-N(t)=m)}{P(N(t+s)=k+m)}$$

$$\underset{\text{προσαυξ.}}{\overset{\text{ομογ.}}{=}} \frac{P(N(t)=k)\cdot P(N(t+s)-N(t)=m)}{P(N(t+s)=k+m)}$$

$$= \frac{P(N(t)=k)\cdot P(N(s)=m)}{P(N(t+s)=k+m)} =$$

$$= \frac{\cancel{e^{-\lambda t}} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot \cancel{e^{-\lambda s}} \frac{(\lambda s)^m}{m!}}{\cancel{e^{-\lambda(s+t)}} \frac{[\lambda(t+s)]^{k+m}}{(k+m)!}} \quad N(t) \sim Poisson(\lambda t)$$

$$= \frac{\cancel{\lambda^k} \cdot t^k \cdot \cancel{\lambda^m} \cdot s^m}{\cancel{\lambda^{k+m}} (t+s)^{k+m}} \cdot \frac{(k+m)!}{k!\,m!} =$$

$$= \binom{k+m}{k} \left(\frac{t}{t+s}\right)^k \left(\frac{s}{t+s}\right)^m$$

$$(N(t) \mid N(t+s)=k+m) \sim Bin\left(k+m, \frac{t}{t+s}\right)$$

## ΑΣΚΗΣΗ: 2

$\{N(t): t \geq 0\}$ διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda$

$P(N(t) \text{ περιττός}) = ;$, $t \geq 0$

### ΛΥΣΗ:

$$P(N(t) \text{ περιττός}) = \sum_{n \text{ περιττός}} P(N(t)=n) = \sum_{n \text{ περιττός}} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$P(N(t) \text{ περιττός}) + P(N(t) \text{ άρτιος}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} =$$

$$= e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = 1 \quad (1)$$

$$P(N(t)\ \text{άρτιος}) - P(N(t)\ \text{περιττός}) = \sum_{n\ \text{άρτιος}} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} - \sum_{n\ \text{περιττός}} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda t)^n}{n!} =$$

$$= e^{-\lambda t}\cdot e^{-\lambda t} = e^{-2\lambda t} \quad (2)$$

$(1)-(2) \Rightarrow 2P(N(t)\ \text{περιττός}) = 1 - e^{-2\lambda t} \Rightarrow$

$$P(N(t)\ \text{περιττός}) = \frac{1-e^{-2\lambda t}}{2}.$$

## ΑΣΚΗΣΗ: 3

Σύστημα έχει 2 εξαρτήματα και χαλάει μόλις κάποιο από αυτά χαλάσει

Χρόνος ζωής εξαρτήματος A $\sim Exp(\lambda)$ (σ.π.π. $f_1(t) = \lambda\cdot e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$)

Χρόνος » » B $\sim Gamma(n, \mu)$

(σ.π.π. $f_2(t) = \frac{\mu^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\mu t}$, $t \geq 0$)

Υποθέτουμε ότι οι χρόνοι ζωής είναι ανεξάρτητες τ.μ. να βρεθεί ο μέσος χρόνος ζωής του συστήματος.

**ΛΥΣΗ:**

X : χρόνος ζωής του εξαρτήματος A, $X \sim Exp(\lambda)$

Y : » » » » B, $Y \sim Gamma(n, \mu)$

T : χρόνος ζωής του συστήματος

Προσοχή όταν έχω minimum χρησιμοποιώ

$T = \min(X, Y)$

Άρα ψάχνω το $E[T]$.

$$E[T] = \int_0^{\infty} P(T > x)dx = \int_0^{\infty} P(\min(X,Y) > x)dx = \int_0^{\infty} P(X > x, Y > x)dx$$

$$\overset{X,Y\ \text{ανεξ.}}{=} \int_0^{\infty} P(X > x)P(Y > x)dx \quad (1)$$

Έχουμε:
- $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$
- $P(Y > x)$

Θεωρούμε μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\mu$

$Y$ = χρόνος που θα συμβεί το n-οστό γεγονός της Poisson

$$P(Y>x) = P\left(\substack{\text{το n-οστό γεγονός}\\ \text{να συμβεί μετά από χρόνο } x}\right) =$$

$$= P(N(x) \le n-1) = \sum_{i=0}^{n-1} P(N(x)=i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^i}{i!}$$

Άρα $(1) \Rightarrow E[T] = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^i}{i!} \, dx =$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\mu^i}{i!} \int_0^{\infty} e^{-(\mu+\lambda)x} x^i \, dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\mu^i}{\cancel{i!}} \frac{\cancel{i!}}{(\lambda+\mu)^{i+1}} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{(\lambda+\mu)^{i+1}}{i!} x^i e^{-(\lambda+\mu)x} \, dx}_{=1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\mu^i}{(\lambda+\mu)^{i+1}} = \frac{1}{\lambda+\mu} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^i =$$

$$= \frac{1}{\lambda+\mu} \cdot \frac{1-\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n}{1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}} = \frac{1}{\lambda+\mu} \cdot \frac{1-\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n}{\frac{\lambda}{\lambda+\mu}} =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left[1-\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n\right]$$

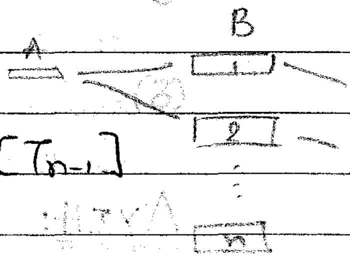
Β' τρόπος

$X \sim Exp(\lambda)$

$Y \sim Gamma(n, \mu)$

$Y_n = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$, όπου $Z_i \sim Exp(\mu)$, $i=1,\dots,n$

Σκέφτομαι το 2ο εξάρτημα σαν n συνιστώσες που λειτουργούν μια-μια. Δηλαδή, ξεκινάει η πρώτη όταν χαλάσει αυτή λειτουργεί η 2η κτλ.




$T_n = \min(X, Y_n)$

Έχουμε $E[T_n] = \underbrace{\frac{1}{\lambda+\mu}}_{\substack{\text{χρόνος μέχρι}\\ \text{να χαλάσει το}\\ \text{A ή το B1}}} + \overbrace{\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}^{\substack{\text{πιθ. να χαλάσει}\\ \text{πρώτα το A}}} \cdot 0 + \underbrace{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}_{\substack{\text{πιθ. να}\\ \text{χαλάσει το B1}}} E[T_{n-1}]$

Άρα: $E[T_n] = \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} E[T_{n-1}]$

$$= \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left[\frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} E[T_{n-2}]\right]$$

$$= \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2} E[T_{n-2}] =$$

$$= \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}\left[\frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} E[T_{n-3}]\right]$$

$$= \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^3} + \frac{\mu^3}{(\lambda+\mu)^3} E[T_{n-3}]$$

Άρα: $E[T_n] = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\mu^i}{(\lambda+\mu)^{i+1}} + \frac{\mu^{n-1}}{(\lambda+\mu)^{n-1}} \underbrace{E[T_1]}_{\frac{1}{\lambda+\mu}}$

$$E[T_n] = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\mu^i}{(\lambda+\mu)^{i+1}} + \frac{\mu^{n-1}}{(\lambda+\mu)^n} \Rightarrow$$

$$E[T_n] = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\mu^i}{(\lambda+\mu)^{i+1}} = \frac{1}{\lambda+\mu} \frac{1-\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n}{1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}} = \frac{1}{\lambda}\left[1-\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n\right].$$

## ΑΣΚΗΣΗ: 4

Πελάτες φτάνουν σε τράπεζα σύμφωνα με διαδικασία Poisson με ρυθμό 8 πελάτες την ώρα

(α) μέση τιμή και διασπορά # πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα σ' ένα 8ωρο

(β) πιθανότητα κανείς να μη μπει τα τελευταία 15 λεπτά μιας εργάσιμης μέρας

(γ) συνδιακύμανση # πελατών που μπαίνουν από 9:00-11:00 και # πελατών που μπαίνουν από 10.00-11.00 την ίδια μέρα.

(δ) συνδιακύμανση # πελατών που μπαίνουν 9:00-11.00 και # πελατών που μπαίνουν 10.00-11.00 την επόμενη μέρα.

## ΛΥΣΗ:

# πελατών που φθάνουν σε $t$ ώρες

$N(t) \sim Poisson(8t)$

(α) $E[\#\text{πελατών σε 8 ώρες}] = E[N(8)] = 64$

$Var[\#\text{πελατών σε 8 ώρες}] = Var[N(8)] = 64$

(β) $P\begin{pmatrix}\text{κανείς να μην μπει τα}\\ \text{15 πρώτα λεπτά}\end{pmatrix} \overset{\text{ομογ.}}{\underset{\text{προσ.}}{=}} P(N(\tfrac{1}{4})=0) = e^{-2}\frac{2^0}{0!} = e^{-2}$

(γ) $Cov(N(3)-N(1),\ N(3)-N(2)) =$

$Cov([N(3)-N(2)]+[N(2)-N(1)],\ N(3)-N(2)) =$

$Cov(N(3)-N(2),\ N(3)-N(2)) + \underbrace{Cov(N(2)-N(1),\ N(3)-N(2))}_{0} =$

$Var(N(3)-N(2)) \overset{\text{ομογ.}}{\underset{\text{προσ.}}{=}} Var[N(1)] = 8$

(δ) $\overset{\text{ανεξ.}}{\underset{\text{προσαυξ.}}{=}}$ 0

ΑΣΚΗΣΗ: 5

$\{N_1(t): t\geq 0\}$ Poisson διαδικασία με ρυθμό $\lambda_1$

$\{N_2(t): t\geq 0\}$ Poisson » με ρυθμό $\lambda_2$

$A_i$ : # γεγον. στην $\{N_i(t)\}$ πριν το 1° γεγον. στην άλλη διαδικασία, $i = 1, 2$

(α) συναρτήσεις πιθανότητας $A_i$

(β) $A_1$, $A_2$ ανεξάρτητες;

ΛΥΣΗ:

(α) $P(A_1=n) = \int_0^\infty P(A_1=n \mid X_2=x)\cdot \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2 x}\,dx$

όπου $X_2$: χρόνος μέχρι να συμβεί το 1° γεγον. στη $2^{η}$ διαδικ.

$X_2 \sim Exp(\lambda_2)$

$P(A_1=n) = \int_0^\infty P(N_1(x)=n)\cdot \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2 x}\,dx$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda_1 x}\frac{(\lambda_1 x)^n}{n!}\lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2 x}\,dx$$

$$= \lambda_2 \cdot \lambda_1^n \int_0^\infty \frac{1}{n!} x^n e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\,dx$$

$$= \frac{\lambda_2\cdot\lambda_1^n}{(\lambda_1+\lambda_2)^{n+1}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^{n+1}}{n!} x^n e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\,dx}_{=1} =$$

$$= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^n \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

Άρα $A_1 \sim Geom\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$

Όμοια: $P(A_2=n) = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^n \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \Rightarrow A_2 \sim Geom\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$

(β) Έστω $A_1 = 1 \Rightarrow A_2 = 0$

Επειδή το ένα δίνει πληροφορία για το άλλο δεν είναι ανεξάρτητα.