Μάθημα: 18ο 30/5/2012

Ασκησεις 1ου Φυλλαδιου

Άσκηση: 1

Φοιτητής με n βιβλία αριθμημένα ως 1, 2, …, n
Το βιβλίο k έχει i τυπογραφικά λάθη με πιθανότητα $\frac{k^i}{(k+1)^{i+1}}$
$i=0,1,2,\dots \quad k=1,2,\dots,n$
Επιλέγει βιβλίο στην τύχη. Να βρεθούν:
i) μέση τιμή του # των λαθών
ii) διασπορά του # των λαθών

Λύση:

X: # τυπογραφικών λαθών
Y: βιβλίο που επιλέγει ο φοιτητής
Ψάχνουμε: $E[X]$, $Var[X]$.

Ισχύει ότι: $Y \sim U(\{1,2,\dots,n\})$

$$f_Y(k) = P(Y=k) = \frac{1}{n}, \quad k=1,\dots,n$$

$$P(X=i / Y=k) = \frac{k^i}{(k+1)^{i+1}} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^i \frac{1}{k+1} \qquad i=0,1,\dots \quad k=1,2,\dots,n$$

$$P(X/Y=k) \sim Geom\left(\frac{1}{k+1}\right).$$

Άρα: i) $E[X] = E[E[X|Y]] = \sum_{k=1}^{n} E[X/Y=k] \cdot f_Y(k) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} E[X/Y=k] \cdot \frac{1}{n} \quad (1)$$

$$E[X/Y=k] = \sum_{i=0}^{\infty} i\, P(X=i/Y=k) = \sum_{i=0}^{\infty} i \left(\frac{k}{k+1}\right)^i \frac{1}{k+1} \quad (2)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \overset{d/dx}{\Rightarrow} \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot x^{i-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \overset{x}{\Rightarrow} \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot x^i = \frac{x}{(1-x)^2} \overset{x=\frac{k}{k+1}}{\Rightarrow}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^i = \frac{\frac{k}{k+1}}{\left(1-\frac{k}{k+1}\right)^2} \overset{\cdot\frac{1}{k+1}}{\Rightarrow} \sum_{i=0}^{\infty} i \left(\frac{k}{k+1}\right)^i \frac{1}{k+1} = \frac{k/(k+1)^2}{1/(k+1)^2} \Rightarrow$$

$$E[X/Y=k] = k \quad (3)$$

<u>Άρα:</u> (1), (2), (3) $\Rightarrow E[X] = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{\cancel{n}} \frac{\cancel{n}(n+1)}{2}$

$$\Rightarrow E[X] = \frac{n+1}{2}$$

ii) $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

Για το $E[X^2]$ έχουμε:

$E[X^2] = E[E[X^2/Y]] = \sum_{k=1}^{n} E[X^2/Y=k] \cdot f_Y(k)$

όπου $E[X^2/Y=k] = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 P[X=i/Y=k] = \ldots$ (παρόμοια)

<u>Άσκηση: 2</u>

Κάλπη με α λευκά και b μαύρα σφαιρίδια.

Αφού τραβήξουμε ένα σφαιρίδιο το επανατοποθετούμε αν είναι λευκό. Αν είναι μαύρο βάζουμε στη θέση του λευκό.

X_n: = # λευκών σφαιριδίων αφού η διαδικασία επαναληφθεί n-φορές.

(α) Ν.δ.ο. $E[X_{n+1}] = \left(1 - \frac{1}{a+b}\right) E[X_n] + 1$

(β) Να βρεθεί κλειστός τύπος για την $E[X_n]$.

<u>Λύση:</u>

(α) $E[X_{n+1}] = E[E[X_{n+1}/X_n]] = \sum_{x=a}^{a+b} E[X_{n+1}/X_n=x] f_{X_n}(x)$

$$P(X_{n+1}=i/X_n=x) = \begin{cases} \frac{x}{a+b}, & i=x \\ \frac{(a+b)-x}{a+b}, & i=x+1 \end{cases}$$

$$E[X_{n+1}/X_n=x] = x \cdot \frac{x}{a+b} + (x+1)\frac{(a+b)-x}{a+b} =$$

$$= \frac{x^2 + x(a+b) + a + b - x^2 - x}{a+b} = \frac{x[(a+b)-1] + a+b}{a+b} =$$

$$= x\left[1 - \frac{1}{a+b}\right] + 1$$

<u>Άρα:</u> $E[X_{n+1}] = \sum_{x=a}^{a+b} \left[x\left(1 - \frac{1}{a+b}\right) + 1\right] \cdot f_{X_n}(x) =$

$$= \sum_{x=a}^{a+b} x\left(1-\frac{1}{a+b}\right) f_{X_n}(x) + \underbrace{\sum_{x=a}^{a+b} f_{X_n}(x)}_{=1}$$

$$= \left(1-\frac{1}{a+b}\right) E[X_n] + 1$$

(β) $E[X_{n+1}] = \left(1-\frac{1}{a+b}\right) E[X_n] + 1$

$$= \left(1-\frac{1}{a+b}\right)\left[\left(1-\frac{1}{a+b}\right) E[X_{n-1}] + 1\right] + 1$$

$$= \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^2 E[X_{n-1}] + \left(1-\frac{1}{a+b}\right) + 1$$

$$= \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^2 \left[\left(1-\frac{1}{a+b}\right) E[X_{n-2}] + 1\right] + \left(1-\frac{1}{a+b}\right) + 1$$

$$= \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^3 E[X_{n-2}] + \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{a+b}\right) + 1$$

Άρα:

$$E[X_n] = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n \underbrace{E[X_0]}_{a} + \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^{n-1} + \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^{n-2} + \dots$$

$$+ \left(1-\frac{1}{a+b}\right) + 1 . \Rightarrow$$

$$E[X_n] = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n \cdot a + \sum_{i=0}^{n-1} \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^i$$

$$= \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n a + \frac{1-\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n}{1-\left(1-\frac{1}{a+b}\right)}$$

$$= \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n a + (a+b)\left[1-\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n\right]$$

$$= \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n a + a + b - (a+b)\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n \Rightarrow$$

$$E[X_n] = a+b-b\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n .$$

°Άσκηση: 3.

Ρίψη νομίσματος

κεφαλή με πιθανότητα p

γράμματα με πιθανότητα $1-p$

Μέσο # ρίψεων μέχρι να παρατηρηθεί μια σειρά από r συνεχόμενες κεφαλές.

Λύση:

X: # ρίψεων μέχρι r συνεχόμενες κεφαλές

Y: ρίψη στην οποία εμφανίζονται $1^{η}$ φορά γράμματα

$$E[X] = E\big[E[X/Y]\big]$$

Έχουμε: $Y \sim \text{Geom}(1-p)$

$$f_Y(y) = P[Y=y] = p^{y-1}(1-p) \quad , y = 1, 2, \dots$$

Άρα: $$E[X] = \sum_{y=1}^{\infty} E[X/Y=y]\, p^{y-1}(1-p)$$

Έχουμε: $$\{X/Y=y\} = \begin{cases} r & , y \geq r+1 \\ y + X', & y \leq r \end{cases}$$ (δεν εμφαν. r συνεχ. κεφαλές άρα το πείραμα ξεκινά απ' την αρχή)

Άρα: $$E[X/Y=y] = \begin{cases} r, & y \geq r+1 \\ y + E(X), & y \leq r \end{cases}$$

Και: $$E[X] = \sum_{y=1}^{r} \big(y + E[X]\big) p^{y-1}(1-p) + \sum_{y=r+1} r \cdot p^{y-1}(1-p) =$$

$$= \sum_{y=1}^{r} y \cdot p^{y-1}(1-p) + \sum_{y=1}^{r} E[X] p^{y-1}(1-p) + \sum_{y=r+1}^{\infty} r \cdot p^{y-1}(1-p) =$$

$$= (1-p)\sum_{y=1}^{r} y \cdot p^{y-1} + E[X](1-p)\sum_{y=1}^{r} p^{y-1} + r(1-p)\sum_{y=r+1}^{\infty} p^{y-1}$$

Έχω: $$\sum_{y=0}^{r} p^y = \frac{1-p^{r+1}}{1-p} \xrightarrow{d/dp} \sum_{y=1}^{r} y \cdot p^{y-1} = \frac{-(r+1)p^r(1-p) + 1 - p^{r+1}}{(1-p)^2}$$

$$\sum_{y=1}^{r} p^{y-1} = \sum_{y=0}^{r-1} p^y = \frac{1-p^r}{1-p} \Big/ \sum_{y=r+1}^{\infty} p^{y-1} \underset{\equiv}{\overset{y=y-(r+1)}{=}} \sum_{y=0}^{\infty} p^{y+r} =$$

$$p^r \sum_{y=0}^{\infty} p^y = \frac{p^r}{1-p}.$$

Συνολικά έχουμε:

$$E[X] = \cancel{(1-p)}\,\frac{-(r+1)p^r(1-p)+(1-p^{r+1})}{(1-p)^{\cancel{2}}} +$$

$$E[X]\cancel{(1-p)}\,\frac{1-p^r}{\cancel{1-p}} + r\cancel{(1-p)}\,\frac{p^r}{\cancel{1-p}} \Rightarrow$$

$$E[X] - E[X](1-p^r) = \frac{-(r+1)p^r(1-p)+1-p^{r+1}}{(1-p)} + rp^r \Rightarrow \ldots$$

$$\Rightarrow E[X] = \frac{1-p^r}{p^r(1-p)}$$

Άσκηση: 4

X μη αρνητική ακέραια τ.μ. με πιθανογεννήτρια

$$P_X(z) = \frac{c}{6-z-z^2}.$$

(α) $c =$;

(β) $E[X] =$;

(γ) $f_X(x) = P(X=x) =$;

(δ) $P(X$ είναι άρτιος$) =$;

Λύση:

(α) $P_X(1) = 1 \Rightarrow \dfrac{c}{6-1-1^2} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{c=4}}$

(β) $E[X] = P_X'(1) = \left[-\dfrac{4(-1-2z)}{(6-z-z^2)^2}\right]_{z=1} = \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}.$

(γ) $P_X(z) = \dfrac{4}{6-z-z^2} = \dfrac{4}{(2-z)(3+z)} = \dfrac{A}{2-z} + \dfrac{B}{3+z}$ (1)

Για το A:

$(1) \xrightarrow{2-z} \dfrac{4}{3+z} = A + \dfrac{B(2-z)}{3+z} \xrightarrow{z=2} A = \dfrac{4}{5}.$

Για το B:

$(1) \xrightarrow{3+z} \dfrac{4}{2-z} = B + \dfrac{A(3+z)}{2-z} \xrightarrow{z=-3} B = \dfrac{4}{5}.$

Άρα: $P_X(z) = \dfrac{4/5}{2-z} + \dfrac{4/5}{3+z} = \dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{1/2}{1-\frac{z}{2}} + \dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{1/3}{1+\frac{z}{3}} =$

$$= \frac{4}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{4}{15}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)} =$$

$$= \frac{4}{10}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^i + \frac{4}{15}\sum_{i=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{3}\right)^i =$$

$$= \frac{4}{10}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i z^i + \frac{4}{15}\sum_{i=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^i\cdot z^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{4}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^i + \frac{4}{15}\left(-\frac{1}{3}\right)^i\right] z^i$$

Άρα: $P(X=i) = \frac{4}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^i + \frac{4}{15}\left(-\frac{1}{3}\right)^i, \quad i=0,1,2,\ldots$

(δ) $P(X \text{ άρτιος}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=2k) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{4}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} + \frac{4}{15}\left(-\frac{1}{3}\right)^{2k}\right]$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{15}\left(\frac{1}{9}\right)^k$$

$$= \frac{4}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{4}{15}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{4}{10}\cdot\frac{4}{3} + \frac{4}{15}\cdot\frac{9}{8} =$$

$$= \frac{16}{30} + \frac{9}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}.$$

Άσκηση: 5

$$\left.\begin{array}{l} X \sim Exp(\lambda) \\ Y \sim Exp(\lambda) \\ Z \sim Exp(\mu) \end{array}\right\} \text{ ανεξάρτητες } \lambda \neq \mu$$

$\tilde{F}_{X+Y+Z}(s) = ;$ $\qquad f_{X+Y+Z}(\omega) = ;$

Λύση:

$\tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s} = \tilde{F}_Y(s)$, $\qquad \tilde{F}_Z(s) = \frac{\mu}{\mu+s}$

$$\tilde{F}_{X+Y+Z}(s) \overset{\text{ανεξ.}}{=\!=} \tilde{F}_X(s)\cdot\tilde{F}_Y(s)\cdot\tilde{F}_Z(s) = \frac{\lambda^2\mu}{(\lambda+s)^2(\mu+s)}$$

Για την $f_{X+Y+Z}(\omega)$ έχουμε:

$$\tilde{F}_{X+Y+Z}(s) = \frac{\lambda^2\mu}{(\lambda+s)^2(\mu+s)} = \frac{A}{\lambda+s} + \frac{B}{(\lambda+s)^2} + \frac{\Gamma}{\mu+s} \quad (1)$$

Για το Γ:

$$(1) \xrightarrow{(\mu+s)} \frac{\lambda^2\mu}{(\lambda+s)^2} = \frac{A(\mu+s)}{\lambda+s} + \frac{B(\mu+s)}{(\lambda+s)^2} + \Gamma \xrightarrow{s=-\mu}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda^2\mu}{(\lambda-\mu)^2} = \Gamma \qquad (2)$$

Για το B:

$$(1) \xrightarrow{(\lambda+s)^2} \frac{\lambda^2\mu}{\mu+s} = A(\lambda+s) + B + \frac{\Gamma(\lambda+s)^2}{\mu+s} \qquad (4)$$

$$\xrightarrow{s=-\lambda} \frac{\lambda^2-\mu}{\mu-\lambda} = B \quad (3)$$

$$(4) \xrightarrow{s=0} \frac{\lambda^2\mu}{\mu} = A\lambda + B + \frac{\Gamma\lambda^2}{\mu} \xrightarrow{(2),(3)} A = -\frac{\lambda^2\mu}{(\mu-\lambda)^2}$$

Τελικά:

$$\tilde{F}_{X+Y+Z}(s) = -\frac{\lambda^2\mu}{(\mu-\lambda)^2}\frac{1}{\lambda+s} + \frac{\lambda^2\mu}{\mu-\lambda}\frac{1}{(\lambda+s)^2} + \frac{\lambda^2\mu}{(\lambda-\mu)^2}\cdot\frac{1}{\mu+s}$$

$$= -\frac{\lambda\mu}{(\mu-\lambda)^2}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+s} + \frac{\mu}{\mu-\lambda}\cdot\underbrace{\frac{\lambda^2}{(\lambda+s)^2}}_{\text{Gamma}(2,\lambda)} + \frac{\lambda^2}{(\lambda-\mu)^2}\cdot\frac{\mu}{\mu+s}$$

Άρα:

$$f_{X+Y+Z}(\omega) = -\frac{\lambda\mu}{(\mu-\lambda)^2}\lambda\cdot e^{-\lambda\omega} + \frac{\mu}{\mu-\lambda}\lambda^2\omega\cdot e^{-\lambda\omega} +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{(\lambda-\mu)^2}\mu\cdot e^{-\mu\omega}.$$