Μάθημα: 15ο 21/5/2012

Ηλικία, Υπολειπόμενος και ο t-εξαρτώμενος Χρόνος Ανανέωσης

① Πλαίσιο-Ορισμός

$X_1, X_2, \dots$ ανεξ. ισον. ≥ 0 τ.μ. $\sim G(x)$ συνεχής σ.κ.

$\tau = E[X_i] < \infty$

$\sigma^2 = Var[X_i] < \infty$

$S_0 = 0$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$: χρόνος n-οστού γεγονότος

$N(t) = \#$ γεγονότων στο $(0,t]$, $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία

Έστω t χρονική στιγμή

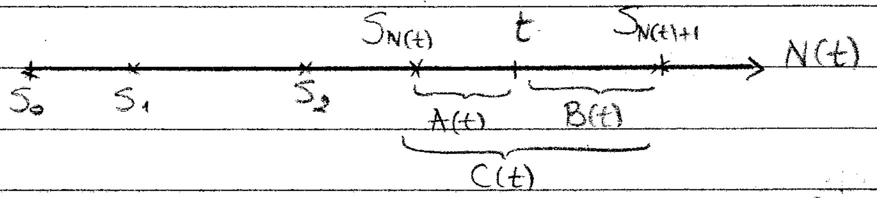
$S_{N(t)}$: χρόνος του τελευταίου γεγονότος πριν την t

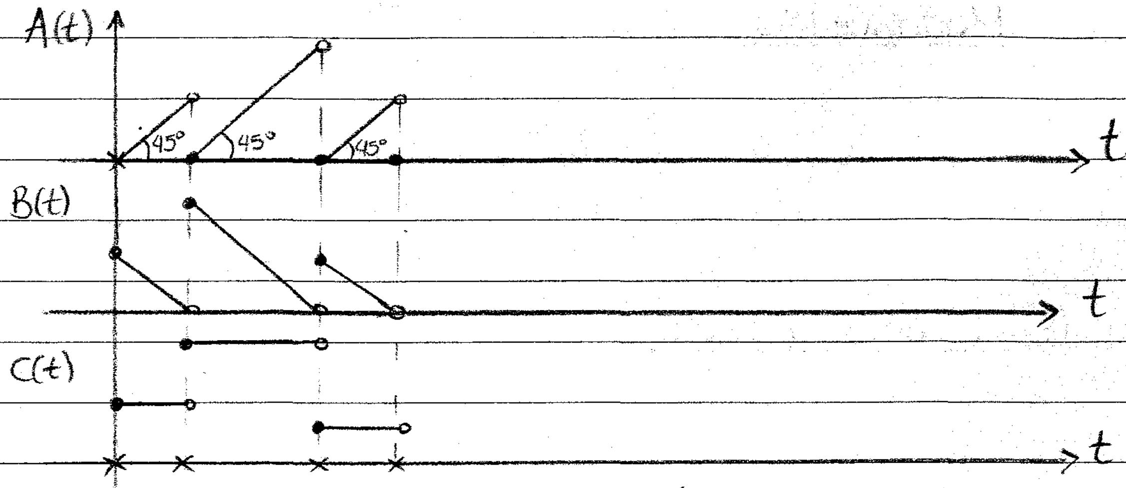
$S_{N(t)+1}$: » » επόμενου » μετά την t

$A(t) = t - S_{N(t)}$: χρόνος που μεσολάβησε από το προηγούμενο γεγονός και λέγεται ηλικία της $\{N(t)\}$ ή παρελθών ή αναδρομικός χρόνος ανανέωσης

$B(t) = S_{N(t)+1} - t$: χρόνος που θα μεσολαβήσει ως το επόμενο γεγονός και λέγεται υπολειπόμενος ή προδρομικός χρόνος ανανέωσης

$C(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)} = X_{N(t)+1}$: t-εξαρτώμενος ή ολικός χρόνος ανανέωσης τη στιγμή t.





② Τα 3 εργαλεία

1) Σ.Α.Θ. με αμοιβές:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[R(t)]}{t}=\frac{E[R_1]}{E(X_1)}$$

2) Ανανεωτική εξίσωση-λύση

$$H(t)=D(t)+\int_0^t H(t-x)\,dG(x)$$

$$H(t)=D(t)+\int_0^t D(t-x)\,dM_G(x)$$

3) Β.Α.Θ.

$$D(t)\ \text{"καλή"} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} H(t)=\frac{1}{\tau}\int_0^\infty D(t)\,dt$$

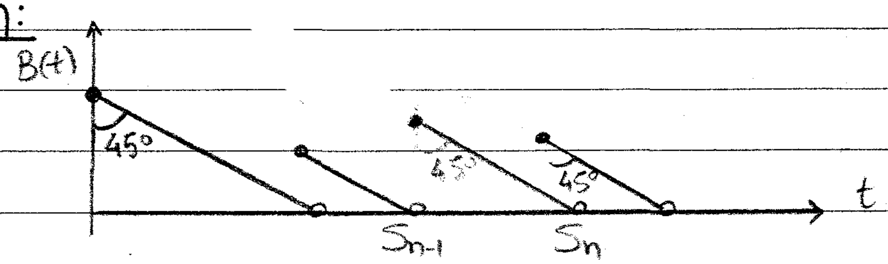
③ Μελέτη της $B(t)$

1) Μακροπρόθεσμος μέσος όρος της $B(t)$ $=\lim_{t\to\infty}\dfrac{E\left[\int_0^t B(u)\,du\right]}{t}=;$

2) Μέση τιμή της $B(t)=E[B(t)]=;$

3) Οριακή μέση τιμή της $B(t)=\lim_{t\to 0} E[B(t)]=;$

Λύση:



1) $R(t) = \int_0^t B(u)\,du$.

$$R_n = R(S_n) - R(S_{n-1}) = \int_{S_{n-1}}^{S_n} B(u)\,du = \frac{X_n^2}{2}$$

$(X_n, R_n) = \left(X_n, \frac{X_n^2}{2}\right)$, $n \geq 1$ είναι ανεξάρτητα

Σ.Α.Θ. με αμοιβές $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t B(u)du]}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} =$

$$= \frac{E[R_1]}{E[X_1]} = \frac{E\left[\frac{X_1^2}{2}\right]}{\tau}$$

$$= \frac{\tau^2 + \sigma^2}{2\tau}$$

2) $H(t) = E[B(t)]$

$$H(t) = E[B(t)] = \int_0^\infty E[B(t)/X_1 = x]\,dG(x)$$

Όμως: $E[B(t)/X_1 = x] = \begin{cases} x - t, & x > t \\ \underbrace{E[B(t-x)]}_{H(t-x)}, & x \leq t \end{cases}$

Άρα: $H(t) = \underbrace{\boxed{\int_t^\infty (x-t)\,dG(x)}}_{D(t)} + \int_0^t H(t-x)\,dG(x)$

Άρα: $H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-x)\,dM_G(x)$

με $D(t) = \int_t^\infty (x-t)\,dG(x)$

3) $\lim_{t\to\infty} E[B(t)] = \lim_{t\to\infty} H(t)$

Πρέπει να αποδείξω ότι η $D(t)$ γράφεται σαν διαφορά 2 μη-αρνητικών, μονότονων & φραγμένων συναρτήσεων με $\int_0^\infty |D(t)|\,dt < \infty$.

Έχουμε: $D(t)=\int_t^\infty (x-t)\,dG(x)=\int_t^\infty x\cdot dG(x) - t\int_t^\infty dG(x)$

$$=\underbrace{\int_0^\infty x\,dG(x)}_{\tau} - \int_0^t x\,dG(x) - t(1-G(t))$$

$$= \tau - [x\,G(x)]_0^t + \int_0^t G(x)\,dx - t(1-G(t))$$

$$= \tau - \cancel{t\cdot G(t)} + \int_0^t G(x)\,dx - t + \cancel{t\cdot G(t)}$$

$$= \underset{D_1(t)}{\tau} - \underbrace{\int_0^t (1-G(x))\,dx}_{D_2(t)} = \int_0^\infty (1-G(x))\,dx - \int_0^t (1-G(x))\,dx$$

$$\Rightarrow D(t) = \int_t^\infty (1-G(x))\,dx$$

Επίσης: $\int_0^\infty |D(t)|\,dt = \int_0^\infty D(t)\,dt$

$$=\int_0^\infty \int_t^\infty (1-G(x))\,dx\,dt$$

$$=\int_0^\infty \int_t^\infty \int_x^\infty dG(y)\,dx\,dt$$

$$\overset{0<t<x<y}{=} \int_0^\infty \int_0^y \overbrace{\boxed{\int_0^x dt}}^{=x}\,dx\,dG(y)$$

$$=\int_0^\infty \frac{y^2}{2}\,dG(y) = \frac{1}{2}E[X_1^2]$$

$$=(\tau^2+\sigma^2)/2 < \infty.$$

Άρα από ΒΑΘ: $\lim_{t\to\infty} E[B(t)] = \lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}$

(4) Αναγεννητικό Παράδοξο

Περιμέναμε ότι $\lim_{t\to\infty} E[B(t)] = \frac{\tau}{2}$ αλλά είναι λάθος

Το σωστό είναι $\lim_{t\to\infty} E[B(t)] = \frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau} = \frac{\tau}{2} + \frac{\sigma^2}{2\tau}$

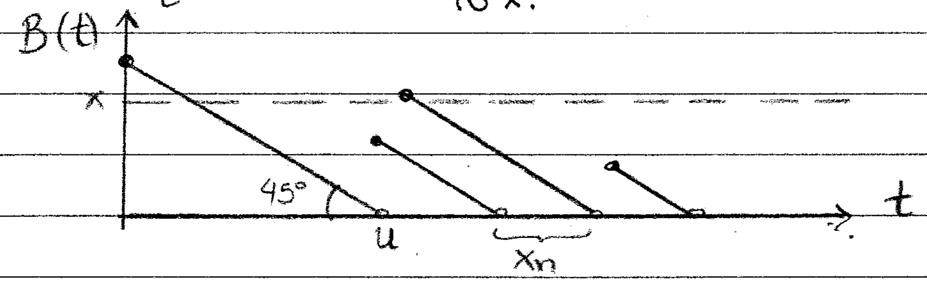
Άρα η διαίσθηση είναι σωστή μόνο όταν $\sigma^2=0$, δηλαδή όταν έχω σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους!

5) Μελέτη του $\{B(t) > x\}$

Έστω $x > 0$:

συνολ. χρόνος στο $[0,t]$ που ο υπολειπόμενος χρόνος υπερβαίνει το x

1) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{E\left[\boxed{\int_0^t 1_{\{B(u)>x\}}\,du}\right]}{t}$: Μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που ο υπολειπόμ. χρόνος ανανέωσης υπερβαίνει το x.



2) $P(B(t) > x)$

3) $\lim\limits_{t\to\infty} P(B(t) > x)$

Λύση:

1) $R(t) = \int_0^t 1_{\{B(u)>x\}}\,du$ — δείκτρια συν/ση

$R_n = (X_n - x)_+ = \max(X_n - x, 0)$

$(X_n, R_n) = (X_n, (X_n - x)_+)$ ανεξ. + ισόνομα ζεύγη, $n \geq 1$

Άρα: $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{E[R(t)]}{t} = \dfrac{E[R_1]}{\underset{\overset{\shortparallel}{\tau}}{E[X_1]}}$

$$E[R_1] = \int_0^\infty P(R_1 > t)\,dt = \int_0^\infty P(\max(X_1 - x, 0) > t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty P(X_1 - x > t)\,dt = \int_0^\infty P(X_1 > x + t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty (1 - G(x+t))\,dt = \int_x^\infty (1 - G(u))\,du$$

Επομένως $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{E\left[\int_0^t 1_{\{B(u)>x\}}\,du\right]}{t} = \dfrac{\int_x^\infty (1 - G(u))\,du}{t}$

2) $H(t) = P(B(t) > x)$

$H(t) = \int_0^\infty P(B(t) > x \mid X_1 = u)\,dG(u)$

$$P(B(t)>x \mid X_1=u)=\begin{cases} 1 & , t<u-x \Leftrightarrow u>t+x \\ 0 & , u-x\le t<u \Leftrightarrow t<u\le t+x \\ \underset{H(t-u)}{\underset{\shortparallel}{P(B(t-u)>x)}} & , u\le t \end{cases}$$

Άρα: $H(t)=\int_0^t H(t-u)\,dG(u)+\int_t^{t+x} 0\cdot dG(u)+\int_{t+x}^{\infty} 1\,dG(u)$

$$=D(t)+\int_0^t H(t-u)\,dG(u)$$

με $D(t)=\int_{t+x}^{\infty} dG(u)=\underbrace{1-G(t+x)}_{\text{μη αρνητική, μονότονη, φραγμένη}}$

Επιπλέον

$$\int_0^\infty D(t)\,dt=\int_0^\infty (1-G(t+x))\,dt=\int_x^\infty (1-G(u))\,du$$

$$\le \underset{\tau}{\underset{\shortparallel}{\int_0^\infty (1-G(u))\,du}} < \infty$$

Άρα: $P(B(t)>x)=D(t)+\int_0^t D(t-u)\,dM_G(u)$

$$=(1-G(t+x))+\int_0^t (1-G(t-u+x))\,dM_G(u)$$

και $\lim_{t\to\infty} P(B(t)>x)=\frac{1}{\tau}\int_0^\infty D(t)\,dt=\frac{\int_x^\infty (1-G(u))\,du}{\tau}$