Μάθημα: 14ο

14/05/2012

Ανανεωτική Εξίσωση
Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα

① Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα με Αμοιβές

$R(t)$: αμοιβή στο $(0, t]$

$R_n = R(S_n) - R(S_{n-1})$: αμοιβή στο n-οστό ενδιάμεσο χρόνο X_n

$(X_n, R_n)_{n \geq 1}$ ανεξ. ισόνομα

Τότε: $\lim_{t \to \infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R]}{E[X]}$ Μακροπρόθεσμη Μέση Αμοιβή ανά χρονική μονάδα

② Ανανεωτική Εξίσωση-Λύση

$\underbrace{H(t)}_{\text{Άγνωστη συν/ση}} = \underbrace{D(t)}_{\text{Γνωστή συν/ση}} + \int_0^t H(t-x)\, d \underbrace{G(x)}_{\text{Γνωστή Σ.Κ.}}$, $H(t) = D(t) + (H * G)(t)$

Λύση $\longrightarrow$ $H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-x)\, d M_G(x)$

↳ Ανανεωτική συνάρτηση που αντιστοιχεί στην $G(x)$

③ Περιοδικές και Απεριοδικές Τυχαίες Μεταβλητές

X περιοδική με περίοδο $d \iff \sum_{k=0}^{\infty} P(X = kd) = 1$

X απεριοδική $\iff$ όχι περιοδική

π.χ. $0, 1, \sqrt{2}$ όχι περιοδική

Τιμές της X:
- $0, 1, 2, \ldots$ περιοδική $(d = 1)$
- $0, 1, \frac{3}{2}, \frac{6}{7}, \frac{5}{10}$ περιοδική $(d = \frac{1}{70})$
- $0, \sqrt{2}, 8\sqrt{2}$ περιοδική $(d = \sqrt{2})$

Συνήθεις διακριτές με τιμές $0, 1, 2, \ldots \longrightarrow$ περιοδικές κατανομές

Αν η X έχει συνεχές μέρος $\longrightarrow$ απεριοδική

4) Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα

Έστω $H(t) = D(t) + \int_0^t H(t-x)\, dG(x)$ ανανεωτική εξίσωση και $D(t)$ γράφεται ως διαφορά δυο μη-αρνητικών μονότονων και φραγμένων και $\int_0^\infty |D(t)|\, dt < \infty$ τότε:

αυτό θα χρησιμοποιήσουμε αύριο

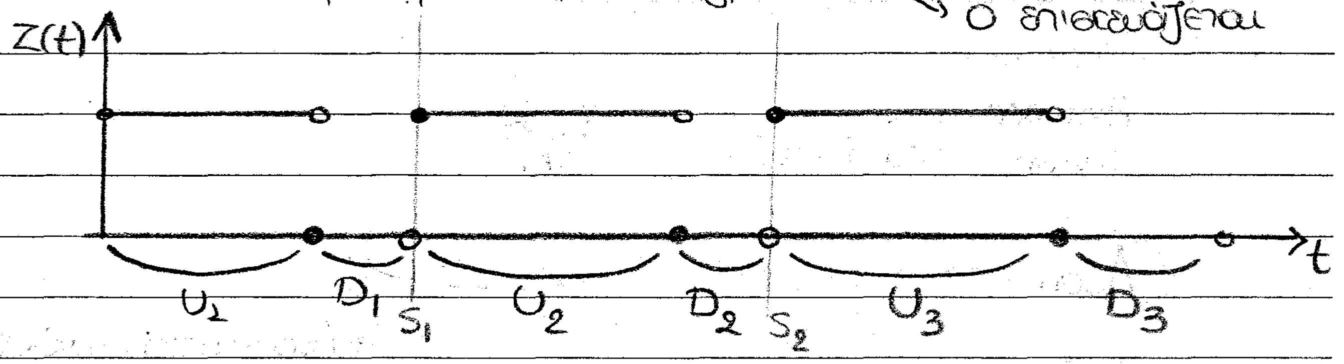
$$\boxed{G \text{ απεριοδική} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{\int_0^\infty D(t)\,dt}{\tau}}$$, τ μέση τιμή της $G(x)$

G περιοδική με περίοδο d $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} H(x+kd) = \frac{d}{\tau} \sum_{k=0}^{\infty} D(x+kd)$

5) Παράδειγμα: Εναλλασσόμενη Ανανεωτική Διαδικασία (προσοχή)

Μηχανή που υπόκειται σε βλάβες και επισκευές

$Z(t)$ = κατάσταση της μηχανής τη στιγμή t → 1 λειτουργεί / → 0 επισκευάζεται



U_i: i-οστός χρόνος λειτουργίας (Up)

D_i: » » επισκευής (Down)

$(U_i, D_i)_{i=1,2,\dots}$ ανεξ. + ισον. με συνεχή κατανομή $F_{U,D}(u,v)$ και μέσες τιμές $E[U_i] = E[U]$

$E[D_i] = E[D]$

Ερωτήματα:

1) Μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που η μηχανή λειτουργεί $= \lim_{t\to\infty} E\left[\frac{\int_0^t Z(u)\,du}{t}\right] = ;$

2) Πιθανότητα η μηχανή να λειτουργεί τη στιγμή t $= P(Z(t)=1) = ;$

3) Οριακή πιθανότητα η μηχανή να λειτουργεί $= \lim_{t\to\infty} P(Z(t)=1) = ;$

4) Ειδικές Περιπτώσεις (για τα ερωτήματα 1), 2), 3))

(α) $U \sim Exp(\mu)$, $D_i = c\,U_i$, c γνωστή σταθερά (β) $U_i \sim Exp(\mu)$, $D_i \sim Exp(\lambda)$ ανεξ.

Απ: 1) $R(t) = \int_0^t Z(u)\,du \leftarrow$ αμοιβή στο $(0,t]$.

$R_n = \int_{S_{n-1}}^{S_n} Z(u)\,du = U_n$, όπου $S_1, S_2, \dots$ είναι χρόνοι ανανέωσης σε ανανεωτική διαδικασία με συνάρτηση ενδιάμεσων χρόνων $G(x) = P(U_1 + D_1 \le x)$

Έχουμε: $(X_n, R_n) = (U_n + D_n, U_n)$, $n \ge 1$ ανεξάρτητα και ισόνομα ζεύγη

Άρα: από Σ.Α.Θ. με αμοιβές έχουμε:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t Z(u)\,du\right]}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R]}{E[X]}$$

$$= \frac{E[U]}{E[U]+E[D]}$$

2) Έστω $H(t) = P(Z(t)=1)$

Άρα $H(t) = \int_0^\infty P(Z(t)=1 \mid S_1 = x)\,dG(x)$

Όμως: $P(Z(t)=1 \mid S_1 = x) = \begin{cases} P(U_1 > t \mid U_1 + D_1 = x), & t < x \\ \underbrace{P(Z(t-x)=1)}_{H(t-x)}, & x \le t \end{cases}$

Άρα: $H(t) = \underbrace{\int_t^\infty P(U_1 > t \mid U_1 + D_1 = x)\,dG(x)}_{D(t)} + \int_0^t H(t-x)\,dG(x)$

Όμως: $D(t) = \int_0^\infty P(U_1 > t \mid U_1 + D_1 = x)\,\underset{f_{U+D}(x)\,dx}{\overset{\shortparallel}{dG(x)}} =$

$$= P(U_1 > t, U_1 + D_1 > t) = P(U_1 > t)$$
$$= 1 - P(U_1 \le t) = 1 - G_U(t)$$

↳ σ.κ. της U

Άρα η $H(t) = P(Z(t)=1)$ ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση

$$H(t) = \underbrace{1 - G_U(t)}_{D(t)} + \int_0^t H(t-x)\,dG(x)$$

με λύση $H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-x)\,dM_G(x) =$

$$= 1 - G_U(t) + \int_0^t (1 - G_U(t-x))\,dM_G(x)$$

3) $\lim_{t\to\infty} P(Z(t)=1) = \lim_{t\to\infty} H(t)$ (όπου $\lim_{t\to\infty} H(t) = \dfrac{\int_0^\infty D(x)dx}{\tau}$ με τις προϋποθέσεις του Β.Α.Θ.)

$D(t) = 1 - G_U(t) \longleftarrow$ μη αρνητική, φθίνουσα, φραγμένη (από το 1)

Επίσης, $\int_0^\infty |D(t)|dt = \int_0^\infty D(t)dt = \int_0^\infty (1 - G_U(t))\,dt = E[U]$

Άρα: $\lim_{t\to\infty} P(Z(t)=1) = \lim_{t\to\infty} H(t) \underset{\text{Β.Α.Θ.}}{\uparrow =} \dfrac{\int_0^\infty D(x)dx}{\tau} = \dfrac{E[U]}{E[U]+E[D]}$

Έχουμε δει: $\lim_{t\to\infty} \dfrac{E[\int_0^t Z(u)du]}{t} = \dfrac{E[U]}{E[U]+E[D]}$.

$$P(Z(t)=1) = 1 - G_U(t) + \int_0^t (1 - G_U(t-x))\,dM_G(x)$$

$$\lim_{t\to\infty} P(Z(t)=1) = \frac{E[U]}{E[U]+E[D]}.$$

4α) $U_i \sim Exp(\mu)$, $D_i = c \cdot U_i$

$E[U] = \frac{1}{\mu}$, $E[D] = c\cdot E[U] = \frac{c}{\mu}$

Άρα: 1) = 3) $= \dfrac{1}{1+c}$

2) $G_U(t) = 1 - e^{-\mu t}$ $t \geq 0$

$G(t) = P(U_i + D_i \leq t) = P((1+c)U_i \leq t) = P(U_i \leq \frac{t}{1+c})$

$= 1 - e^{-\frac{\mu}{1+c}t}$, $t \geq 0 \Rightarrow M_G(x) = \dfrac{\mu}{1+c}x$

Εναλλακτικά

$\tilde{G}(s) = \dfrac{\frac{\mu}{1+c}}{\frac{\mu}{1+c}+s} \Rightarrow \tilde{M}_G(s) = \dfrac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)} = \dfrac{\mu}{(1+c)s}$

Άρα: 2) $= e^{-\mu t} + \int_0^t e^{-\mu(t-x)}\frac{\mu}{1+c}dx = e^{-\mu t} + \frac{\mu}{1+c}\int_0^t e^{-\mu(t-x)}dx$

$= e^{-\mu t} + \frac{\cancel{\mu}}{1+c}\cdot\frac{1-e^{-\mu t}}{\cancel{\mu}} = \frac{1}{1+c} + \frac{c}{1+c}e^{-\mu t}$.