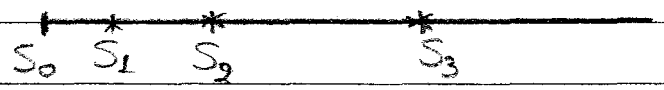
Μάθημα: 13ο — 9/5/2012

Ανανεωτική Εξίσωση
Στοιχειώδες, Ανανεωτικό Θεώρημα

① Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα



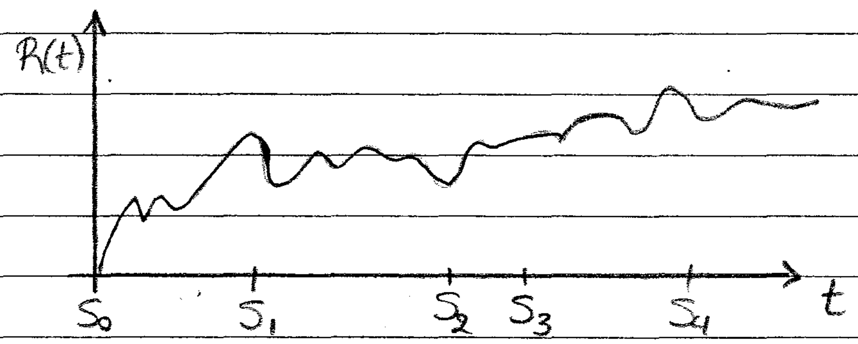
Έχουμε δει ότι $\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\tau}$, με πιθανότητα 1,

όπου τ: μέσος ενδιάμεσος χρόνος.

Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα (Σ.Α.Θ.)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[N(t)]}{t} = \frac{1}{\tau}, \quad \text{όπου } E[N(t)] = M(t)$$

② Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα με Αμοιβές



$\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία
$\{R(t)\}$ διαδικασία συσσώρευσης αμοιβής
X_n = n-οστός ενδιάμεσος χρόνος
S_n = χρόνος n-οστού γεγονότος
$R_n = R(S_n) - R(S_{n-1})$ = αμοιβή που συσσωρεύεται στον ενδιάμεσο χρόνο $\{X_n\}$.

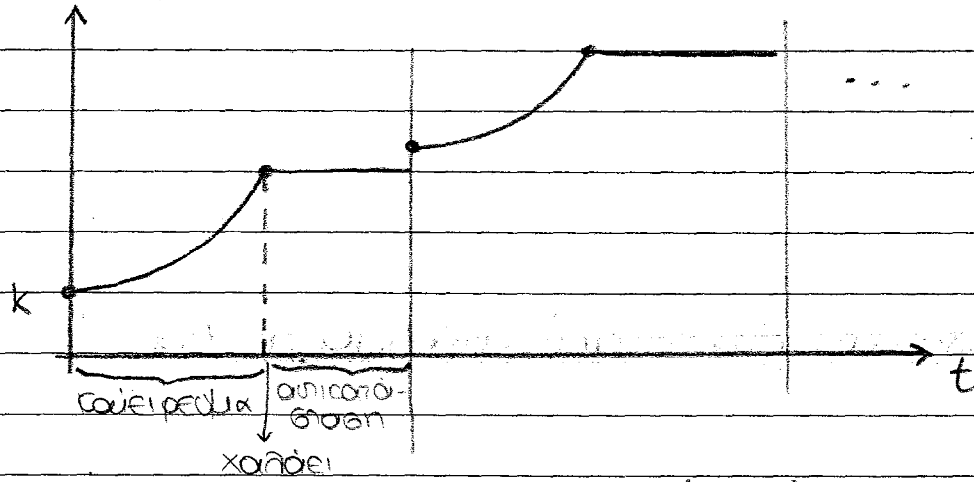
Αν $(X_1, R_1), (X_2, R_2), \ldots$ είναι ανεξάρτητα με κατανομή $F_{X,R}$ και μέσες τιμές $E[X_i] = \tau$, $E[R_i] = r$, τότε

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \begin{array}{c}\text{Μακροπρόθεσμη}\\ \text{μέση αμοιβή ανά}\\ \text{χρονική μονάδα}\end{array} = \frac{r}{\tau}$$

3) Παράδειγμα (προσοχή)

Ένα μηχάνημα καίει ρεύμα σύμφωνα με τη συνάρτηση κατανάλωσης $f(t)$, t μονάδες αφού έχει μπει σε λειτουργία.
Ο χρόνος ζωής του είναι $Exp(\lambda)$ κι όταν χαλάσει παίρνει c χρονικές μονάδες να αντικατασταθεί.
Το κόστος νέου μηχανήματος είναι K χρηματικές μονάδες.
Το κόστος ηλεκτρικού ρεύματος είναι h χρηματικές μονάδες ανά μονάδα κατανάλωσης.
Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος λειτουργίας μηχανήματος ανά χρονική μονάδα.

Απ:



Άρα ζητάμε το $\lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} \underset{\Sigma A\Theta}{=} \frac{E(R(X_1))}{E(X_1)}$

$E[R(t)]$: συνολικό κόστος στο $(0,t]$
Έχουμε:

$$E[X_1] = E[\overset{\text{Χρόνος}}{\text{Λειτουργίας}}] + E[\overset{\text{Χρόνος}}{\text{Αντικατάστασης}}] = \frac{1}{\lambda} + c$$

$$E[R(X_1)] = K + h\cdot E\left[\int_0^{X_1} f(u)du\right]$$

$$= K + h\cdot \int_0^\infty \int_0^x f(u)du \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx$$

Άρα: $\lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{K + h\cdot \int_0^\infty \int_0^x f(u)du \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx}{\frac{1}{\lambda} + c}$

4) Παράδειγμα

Στα ΚΤΕΛ Νομού Χ φθάνουν πελάτες για το δρομολόγιο $X \to Y$ σύμφωνα με Poisson με ρυθμό 1 πελάτη / πέντε λεπτά.
Υπάρχει λεωφορείο κάθε ώρα από 08^{00} - 20^{00} καθώς και 3 extra δρομολόγια στις 12^{30}, 16^{30} και 22^{00}.
Η βενζίνη για κάθε ταξίδι κοστίζει 100 ευρώ.
Κάθε πελάτης πληρώνει 5 ευρώ.
Μακροπρόθεσμο μέσο κέρδος ανά χρονική μονάδα = ;
(Υποθέτουμε ότι οι αφίξεις των πελατών διακόπτονται μεταξύ 22^{00} και 07^{00} της επόμενης).

Απ: $R(t)$ = Αμοιβή στο $(0,t]$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[\text{κέρδος σε 24 ώρες}]}{24}$$

$$E[\text{εισπράξεις από πελάτες σε 24 ώρες}] = 12 \cdot 15 \cdot 5 = 900 €$$

12: λ της Poisson (12 πελ./ώρα)
15: t = ώρες προσέλευσης των πελατών - σύμφωνα με την Poisson
5: Τιμή εισιτηρίου

$$E[\text{κόστος βενζίνης}] = 16 \text{ δρομολ.} \times 100 = 1600 \text{ ευρώ}$$

Άρα: $$\lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{900-1.600}{24} = \frac{-700}{24} \text{ ευρώ / ώρα}$$

5) Ανανεωτικός Συλλογισμός - Ανανεωτικές Εξισώσεις

Ανανεωτικός Συλλογισμός = Δέσμευση στο χρόνο πραγματοποίησης του 1ου γεγονότος

$\Downarrow$

Ανανεωτική Εξίσωση

$$\underbrace{H(t)}_{\text{άγνωστη συν/ση}} = \underbrace{D(t)}_{\text{γνωστή συν/ση}} + \int_0^t H(t-x)\, d\underbrace{G(x)}_{\text{γνωστή σ.κ.}}$$

6 Παράδειγμα: 1

$\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $\sim$ $\sim G(x)$ και μέση τιμή τ.

$H(t) = E[N(t)]$ η ανανεωτική συνάρτηση

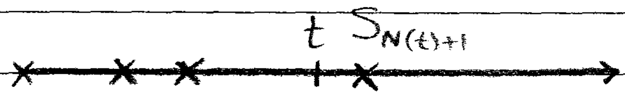
$H(t) = E[N(t)] = \int_0^\infty E[N(t) \mid S_1 = x]\, dG(x)$

Αλλά: $E[N(t) \mid S_1 = x] = \begin{cases} 0 & , t < x \\ 1 + H(t-x) & , x \le t \end{cases}$.

Άρα έχω: $H(t) = \int_0^t (1 + H(t-x))\, dG(x)$

$= G(t) + \int_0^t H(t-x)\, dG(x) \longleftarrow$ Ανανεωτική Εξίσωση

7 Παράδειγμα: 2

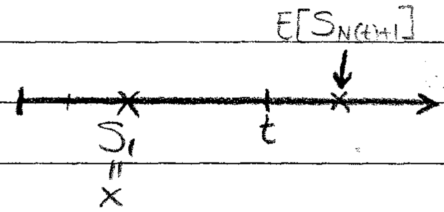


$H(t) = E[S_{N(t)+1}]$

Ανανεωτικός Συλλογισμός

$H(t) = E[S_{N(t)+1}] = \int_0^\infty E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = x]\, dG(x)$

$E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = x] = \begin{cases} x & , t < x \\ x + \underbrace{E[S_{N(t-x)+1}]}_{H(t-x)} & , x \le t \end{cases}$



$H(t) = \int_t^\infty x\, dG(x) + \int_0^t (x + H(t-x))\, dG(x) = \underbrace{\int_0^\infty x\, dG(x)}_{\tau} + \int_0^t H(t-x)\, dG(x)$

8 Λύση Ανανεωτικής Εξίσωσης

Ανανεωτ. Εξίσωση $\quad H(t) = D(t) + \int_0^t H(t-x)\, dG(x)$

$H(t) = D(t) + (H * G)(x)$

$\Downarrow$ L-S

$\tilde{H}(s) = \tilde{D}(s) + \tilde{H}(s) \cdot \tilde{G}(s)$

$\Downarrow$

$$\tilde{H}(s) = \tilde{D}(s)\cdot\frac{1}{1-\tilde{G}(s)} = \tilde{D}(s)\cdot\Big(1+\underbrace{\frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}}_{\tilde{M}_G(s)}\Big) = \tilde{D}(s)+\tilde{D}(s)\tilde{M}_G(s)$$

$\tilde{M}_G(s) \to$ Μετασχηματισμός L-S της Αναν. συν/σης που αντιστοιχεί στην $G(x)$

$$\Downarrow$$

<u>Λύση</u>: $H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-x)\,dM_G(x)$

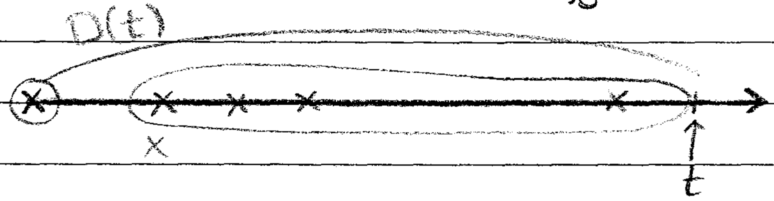
(9) <u>Ερμηνεία Ανανεωτικής Εξίσωσης - Λύσης</u>

Μπορώ να σκέφτομαι

$H(t)$ = επίδραση όλων των γεγονότων της $\{N(t)\}$ στη στιγμή t

Επίδραση τη στιγμή t από όλα τα γεγονότα = Επίδραση τη στιγμή t από το γεγ. στο S_0 + Επίδραση τη στιγμή t από τα υπόλοιπα $S_1, S_2, \ldots$

Ανανεωτική Εξίσωση $\Rightarrow$ $H(t) = D(t) + \int_0^t H(t-x)\,dG(x)$



Η επίδραση τη στιγμή t απ' όλα τα γεγονότα θα μπορούσε να μετρηθεί κι αλλιώς:

Επίδραση τη στιγμή t απ' όλα = επίδραση από το S_0 + επίδραση από το S_1 + επίδραση από το S_2 + ...

$$H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-x)\,dG(x) + \int_0^t D(t-x)\,dG^{*2}(x) + \int_0^t D(t-x)\,dG^{*3}(x) + \ldots$$

<u>Όμως</u>: $M_G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(t)$

<u>Άρα</u>: $H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-x)\,dM_G(x) \Longleftarrow$ Λύση Ανανεωτικής Εξίσωσης