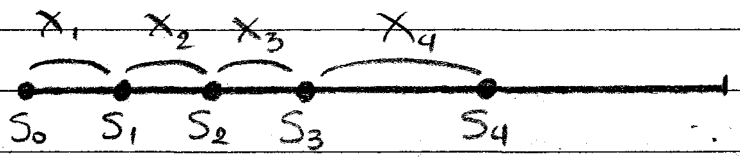
Μάθημα: 12ο 2/5/2012

Ανανεωτική Θεωρία - Ανανεωτική Συνάρτηση

① Υπενθυμίσεις



$X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητες και ισόνομες $\sim G(t)$

$S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$N(t) = \#$ γεγονότων στο $(0, t]$

$M(t) = E[N(t)]$

$F_{S_n}(t) = P(S_n \leq t) = G^{*n}(t)$

$p_n(t) = P(N(t)=n) = G^{*n}(t) - G^{*(n+1)}(t)$

$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(t)$

$$\Downarrow L\text{-}S$$

$\tilde{F}_{S_n}(t) = \tilde{G}(s)^n$

$\tilde{p}_n(s) = (\tilde{G}(s))^n - (\tilde{G}(s))^{n+1}$

$\tilde{M}(s) = \dfrac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}$

② Μετασχηματισμοί L-S

$aF(t) + bG(t) \longrightarrow a \cdot \tilde{F}(s) + b \cdot \tilde{G}(s)$

$(F * G)(t) \longrightarrow \tilde{F}(s) \cdot \tilde{G}(s)$

$F^{*n}(t) \longrightarrow \tilde{F}(s)^n$

$t \longrightarrow \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}$

$1 - e^{-\lambda t} \longrightarrow \int_0^{\infty} e^{-st} \underbrace{dF(t)}_{\lambda \cdot e^{-\lambda t} dt} = \dfrac{\lambda}{\lambda + s}$

③ Παράδειγμα 1: Υπολογισμός $\{M(t)\}$ για $\{N(t)\}$ Poisson λ

$X_i \sim Exp(\lambda)$

$\Downarrow$

$G(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

$\Downarrow$

$\tilde{G}(s) = \dfrac{\lambda}{\lambda + s}$

$\Downarrow$

$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1 - \tilde{G}(s)} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda+s}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda+s}} = \frac{\lambda}{s}$$

$\Downarrow$

$M(t) = \lambda t$

④ Παράδειγμα 2: Υπολογισμός $\{M(t)\}$

$X_i \sim Gamma(2, \lambda)$

$f_{X_i}(t) = \dfrac{\lambda^2}{(2-1)!} t^{2-1} \cdot e^{-\lambda t}, \quad t > 0$

$\tilde{G}(s) = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2$ (διότι $X_i = \underbrace{Exp(\lambda) + Exp(\lambda)}_{\text{ανεξ.}}$)

$\Downarrow$

$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1 - \tilde{G}(s)} = \frac{\lambda^2/(\lambda+s)^2}{1 - \frac{\lambda^2}{(\lambda+s)^2}} = \frac{\lambda^2}{(\lambda+s)^2 - \lambda^2} = \frac{\lambda^2}{s^2 + 2\lambda s} = \frac{\lambda^2}{s(s+2\lambda)} =$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{2\lambda + s}$$

Έχουμε: $\dfrac{\lambda^2}{s(2\lambda+s)} = \dfrac{A(2\lambda+s) + Bs}{s(2\lambda+s)} \Rightarrow \begin{matrix} A + B = 0 \\ 2\lambda A = \lambda^2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A = \frac{\lambda}{2} \\ B = -\frac{\lambda}{2} \end{matrix}$.

$$\Rightarrow \tilde{M}(s) = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{2\lambda + s} = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2\lambda}{2\lambda + s}$$

$$\Rightarrow M(t) = \frac{\lambda}{2} t - \frac{1}{4}\left(1 - e^{-2\lambda t}\right).$$

(Συνέλιξη Κατανομών: $P(X+Y \le t) = \int_0^t F_Y(t-x)\, dF_X(x)$

$\gg$ Πυκνότητες: $f_{X+Y}(t) = \int_0^t f_Y(t-x) f_X(x)\, dx$)

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα μπορούσαμε να καταλήξουμε και πιθανοθεωρητικά ως εξής:
Μπορώ να βλέπω την ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ μετρώντας "κάθε δεύτερο γεγονός" σε μια Poisson $\{N'(t)\}$ με ρυθμό λ.
(διότι κάθε ενδιάμεσος χρόνος της $N(t)$ είναι άθροισμα δυο ενδ. χρόνων της $\{N'(t)\}$)

Άρα: $P(N(t)=k) = P(N'(t)=2k) + P(N'(t)=2k+1)$

$$= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!} + e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$M(t) = E[N(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} k\, P(N(t)=k) = \frac{e^{-\lambda t}}{2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty} 2k\left(\frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!} + \frac{(\lambda t)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)$$

$$= \frac{e^{-\lambda t}}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2k\frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\frac{(\lambda t)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) - \frac{e^{-\lambda t}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t}}{2}\sum_{\substack{\cancel{j=0} \\ j=1}}^{\infty} \cancel{j}\,\frac{(\lambda t)^j}{\underset{(j-1)!}{\cancel{j!}}} - \frac{e^{-\lambda t}}{2}\sum_{\substack{j=0 \\ j\ \text{περιττός}}}^{\infty}\frac{(\lambda t)^j}{j!} =$$

$$\overset{i=j-1}{=} \frac{e^{-\lambda t}}{2}\lambda t\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^i}{i!} - \frac{e^{-\lambda t}}{2}\sum_{\substack{j=0 \\ j\ \text{περ.}}}^{\infty}\frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

$$= \frac{\lambda t}{2} - \frac{e^{-\lambda t}}{2}S_\pi \;,\quad S_\pi = \sum_{j\ \text{περ.}}\frac{(\lambda t)^j}{j!} \;,\quad S_\alpha = \sum_{j\ \text{άρτιος}}\frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

Από Συνδυαστική I έχουμε: $S_\alpha + S_\pi = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^j}{j!} = e^{\lambda t}$

$$S_\alpha - S_\pi = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(\lambda t)^j}{j!} = e^{-\lambda t}$$

Τελικά, $S_\pi = \dfrac{e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}}{2}$

και άρα $M(t) = \dfrac{\lambda t}{2} - \dfrac{e^{-\lambda t}}{2}\cdot\dfrac{e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}}{2} = \dfrac{\lambda}{2}t - \dfrac{1 - e^{2\lambda t}}{4}$

5 Παράδειγμα 3: Υπολογισμός της $\{M(t)\}$

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{με πιθ. } 1-r \\ Exp(\lambda), & \text{με πιθ. } r \end{cases}$$

$$G(t) = P(X_i \le t) = (1-r) + r(1-e^{-\lambda t}), \quad t \ge 0$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{G}(s) = (1-r) + r\frac{\lambda}{\lambda+s}$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)} = \frac{(1-r) + r\frac{\lambda}{\lambda+s}}{1-(1-r)-r\frac{\lambda}{\lambda+s}} = \frac{(1-r)(\lambda+s)+r\cdot\lambda}{r(\lambda+s)-r\cdot\lambda} = \frac{\lambda+(1-r)s}{r\cdot s} =$$

$$= \frac{\lambda}{r\cdot s} + \frac{1-r}{r}$$

$$\Downarrow$$

$$M(t) = \frac{1-r}{r} + \frac{\lambda}{r}t$$

Εναλλακτικά μπορώ να σκεφτώ ότι η ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με ενδιάμεσους χρόνους X_i προκύπτει από μια Poisson $\{N'(t)\}$ με ρυθμό λ, που όμως σε κάθε σημείο της μπορεί να έχουμε πολλαπλά γεγονότα. Επιπλέον για το πλήθος i των πολλαπλών γεγονότων την n-οστή φορά έχουμε:

$$P(Y_n = i) = r(1-r)^{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots \quad n \ge 1$$

πιθαν. i γεγον. στο n-οστό σημείο της

$$P(Y_0 = i) = r(1-r)^i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Έχουμε:

$$M(t) = E[N(t)] = E\left[Y_0 + \sum_{i=1}^{N'(t)} Y_i\right]$$

$$= E[Y_0] + E\left[\sum_{i=1}^{N'(t)} Y_i\right] = \frac{1-r}{r} + E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N'(t)} Y_i / N'(t)\right]\right]$$

Αλλά

$$E\left[\sum_{i=1}^{N'(t)} Y_i / N'(t) = n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i\right] = n\cdot E[Y_i] = \frac{n}{r}$$

Άρα: $E\left[\sum_{i=1}^{N'(t)} Y_i\right] = E\left[\frac{N'(t)}{r}\right] = \frac{\lambda t}{r}$

και τελικά

$$M(t) = \frac{1-r}{r} + \frac{\lambda t}{r}$$

6 Διακριτή Περίπτωση - Αναδρομικοί Τύποι

$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)} \Rightarrow \tilde{M}(s) - \tilde{M}(s)\tilde{G}(s) = \tilde{G}(s)$$

$$\Rightarrow \tilde{M}(s) = \tilde{G}(s) + \tilde{M}(s)\cdot\tilde{G}(s) \Rightarrow M(t) = G(t) + (M * G)(t)$$

Αν η X_n παίρνει τιμές στο $\{0,1,\dots\}$ (διακριτή) και $a_i = P(X_n = i)$ τότε μας ενδιαφέρει η τιμή της $M(t)$ μόνο για $t = 0,1,\dots$

Άρα, ενδιαφερόμαστε για την ακολουθία

$$M_n = M(n), \quad n = 0,1,\dots$$

M_n = μέσο # γεγονότων μέχρι τη στιγμή n

Τότε: $$M_n = \sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=0}^{n} M_{n-i}\, a_i = \sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=0}^{n} M_i\, a_{n-i} \quad (1)$$

και ισχύει $M(t) = M_{\lfloor t \rfloor}$, $\lfloor t \rfloor$ = ακέραιο μέρος του t.

7 Παράδειγμα 1 : Υπολογισμός $M(t)$ για διακριτή

Έστω:

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{με πιθ. } 1-a \\ 1, & \text{με πιθ. } a \end{cases}, \qquad a_i = \begin{cases} 1-a, & i=0 \\ a, & i=1 \\ 0, & i \geq 2 \end{cases}$$

$$M_0 = 1-a + (1-a)\cdot M_0 \Rightarrow M_0 = \frac{1-a}{a}.$$

Για $n \geq 1$: $M_n = 1 + (1-a)\cdot M_n + a\cdot M_{n-1}$

$$a M_n = a\cdot M_{n-1} + 1$$

$$M_n = M_{n-1} + \frac{1}{a}, \quad n \geq 1 \Rightarrow M_n = n\cdot\frac{1}{a} + \frac{1-a}{a} = \frac{n+1-a}{a}$$

$$M(t) = M_{\lfloor t \rfloor} = \frac{\lfloor t \rfloor + 1 - a}{a}$$

8 Παράδειγμα 2 : Υπολογισμός $M(t)$ για διακριτή

$$P(X_n = i) = \underbrace{(1-p)p^i}_{a_i}, \quad i = 0,1,\dots$$

Έστω: $A(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \qquad \bar{M}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n z^n.$

Η αναγωγική σχέση (1) μου δίνει:

$$M_n = \sum_{i=0}^{n} (1-\rho)\rho^i + \sum_{i=0}^{n} M_i \cdot \overbrace{a_{n-i}}^{(1-\rho)\rho^{n-i}}$$

$$M_n = 1-\rho^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} M_i a_{n-i}$$

πολλ/ζω με z^n, $n \geq 0$ και αθροίζω ως προς n

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n+1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} M_i \cdot a_{n-i} \cdot z^n$$

$$\Rightarrow \bar{M}(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{\rho}{1-\rho z} + \sum_{i=0}^{\infty} M_i \cdot z^i \cdot \underbrace{\sum_{n=i}^{\infty} a_{n-i} \cdot z^{n-i}}_{= A(z)}$$

$$= \frac{1}{1-z} - \frac{\rho}{1-\rho z} + A(z)\bar{M}(z)$$

Όμως:

$$A(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i = \sum_{i=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^i z^i = \frac{1-\rho}{1-\rho z}$$

$$\bar{M}(z)\left(1 - \frac{1-\rho}{1-\rho z}\right) = \frac{1}{1-z} - \frac{\rho}{1-\rho z} \Rightarrow \bar{M}(z) \cdot \frac{\cancel{1}-\rho z-\cancel{1}+\rho}{\cancel{1-\rho z}} = \frac{1-\cancel{\rho z}-\rho+\cancel{\rho z}}{(1-z)\cancel{(1-\rho z)}}$$

$$\Rightarrow \bar{M}(z)\rho(1-z) = \frac{1-\rho}{1-z}$$

$$\Rightarrow \bar{M}(z) = \frac{1-\rho}{\rho} \cdot \frac{1}{(1-z)^2}$$

Όμως $\sum_{n=0}^{\infty} M_n z^n = \bar{M}(z) = \frac{1-\rho}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left[{2 \atop n} \right] \cdot z^n$

$$\Rightarrow M_n = \frac{1-\rho}{\rho}\left[{2 \atop n} \right] = \frac{1-\rho}{\rho} \underbrace{\binom{2+n-1}{n}}_{\binom{n+1}{n} = \frac{(n+1)!}{n!\,1!} = n+1} = \frac{(1-\rho)(n+1)}{\rho}.$$

Επομένως για $t \in \mathbb{R}$:

$$M(t) = M_{\lfloor t \rfloor} = \frac{(1-\rho)(\lfloor t \rfloor + 1)}{\rho}$$