Μάθημα: 7ο 2/4/2012

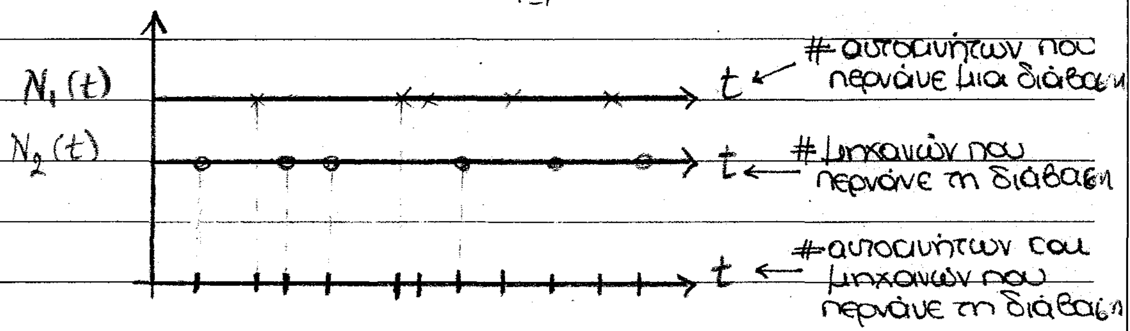
Υπέρθεση και Διάσπαση Στοχαστικών Διαδικασιών Poisson

1) Ορισμός

Έστω $\{N_i(t): t \geq 0\}$, $i=1,2,\dots$ ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_i, $i=1,2,\dots$

Η υπέρθεσή τους είναι η διαδικασία:

$$\{N(t): t \geq 0\} \text{ με } N(t) = \sum_{i=1}^{\infty} N_i(t)$$



2) Θεώρημα

Αν $\{N_i(t)\}$ ανεξ. στοχ. διαδ. Poisson με ρυθμούς λ_i, $i=1,2,\dots$ τότε η υπέρθεσή τους $\{N(t)\}$ είναι διαδ. Poisson ρυθμού $\sum_i \lambda_i$

Απόδειξη (για υπέρθεση 2 διαδ. με ρυθμούς λ_1, λ_2)

Θα αποδείξω ότι:

(i) $\{N(t)\}$ έχει ανεξ. και ομογ. προσαυξήσεις

(ii) $P(N(t)=n) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \dfrac{[(\lambda_1+\lambda_2)t]^n}{n!}$

Το (i) προφανές από τις αντίστοιχες ιδιότητες των $\{N_1(t)\}$, $\{N_2(t)\}$

(ii) Έχω: $P(N(t)=n) = P(N_1(t)+N_2(t)=n) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(N_1(t)=k,\ N_2(t)=n-k) \underset{N_1(t),N_2(t)}{\overset{\text{ανεξ.}}{=}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(N_1(t)=k)\, P(N_2(t)=n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1 t} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}\, e^{-\lambda_2 t} \frac{(\lambda_2 t)^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\,\frac{1}{n!}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\lambda_1 t)^n(\lambda_2 t)^{n-k}}_{(\lambda_1 t+\lambda_2 t)^n}$$

③ Τύποι γεγονότων

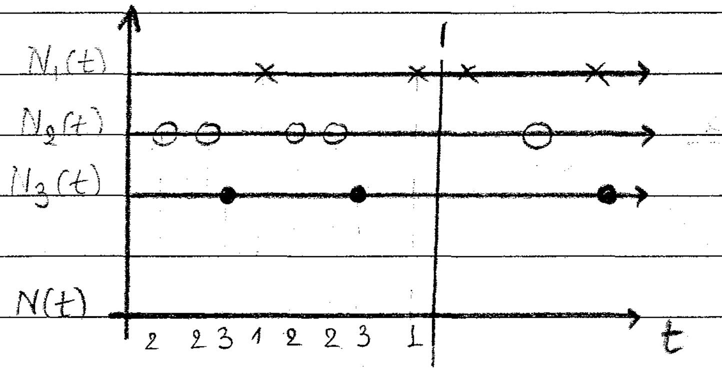
Έστω $\{N(t): t\geq 0\}$ ανεξ. διαδ. Poisson ρυθμού λ_i
κι έστω $\{N(t)\}$ η υπέρθεσή τους.

Έστω επίσης $Z_1, Z_2, \dots$ οι τύποι των γεγονότων της υπέρθεσης δηλ.
$Z_n = i$, αν το n-οστό γεγονός της υπέρθεσης προέρχεται από την $\{N_i(t)\}$.

Τότε:

$$\{Z_n : n\geq 1\} \text{ ανεξ. και } P(Z_n = i) = \frac{\lambda_i}{\lambda}, \quad \lambda = \sum_i \lambda_i$$

π.χ.



$\lambda_1 = 10$
$\lambda_2 = 30$
$\lambda_3 = 5$

Απόδειξη:

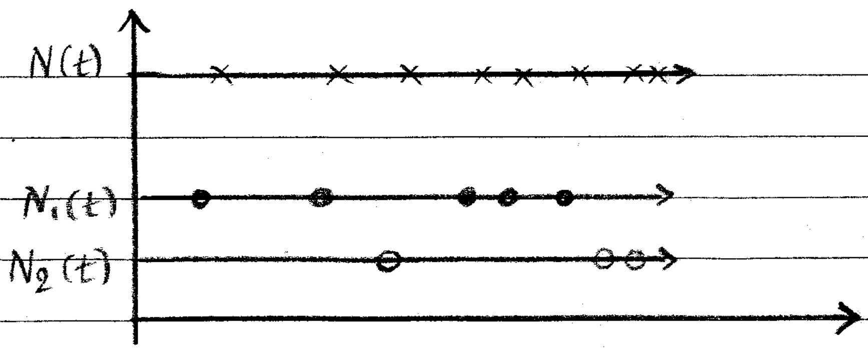
Η αμνήμων ιδιότητα της εκθετικής (Exp) δείχνει την ανεξαρτησία των Z_n.

Επίσης η $P(Z_1 = i) = P(\min(\underbrace{X_1, X_2, \dots}_{\text{ανεξ.}}) = X_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda}$.
$X_1 \sim Exp(\lambda_1)$, $X_2 \sim Exp(\lambda_2)$

④ Διάσπαση διαδικασίας Poisson

Έστω $\{N(t)\}$ στοχ. διαδ. Poisson ρυθμού λ
Έστω ότι κάθε γεγονός καταγράφεται ως τύπου i με πιθ. p_i ανεξ.
Αν $N_i(t) = \#$ γεγονότων τύπου i ως τη στιγμή t,
τότε:

$\{N_i(t)\}$ ανεξ. στοχ. διαδ. Poisson και η $\{N_i(t)\}$ έχει ρυθμό λ



Απόδειξη:

Ο χρόνος μέχρι το 1ο γεγονός της $\{N_i(t)\}$ είναι $\sum_{i=1}^{N} X_i$ με $X_i \sim Exp(\lambda)$ κ' $P(N=n) = (1-p_i)^{n-1} p_i$, $n = 1, 2, \ldots$

Έστω ότι έχουμε $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

Τότε ο μετασχηματισμός L-S : $\tilde{F}_{S_N}(s) = P_N(\tilde{F}_X(s))$

Όμως: $P_N(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p_i)^{n-1} p_i \cdot z^n =$

$$= p_i z \sum_{n=1}^{\infty} ((1-p_i)z)^{n-1} = \frac{p_i z}{1-(1-p_i)z}$$

$$\tilde{F}_X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda}{\lambda+s}$$

Άρα: $\tilde{F}_{S_N}(s) = \dfrac{p_i \frac{\lambda}{\lambda+s}}{1-(1-p_i)\frac{\lambda}{\lambda+s}} = \dfrac{\lambda p_i}{\lambda+s-(1-p_i)\lambda} = \dfrac{\lambda p_i}{\lambda p_i + s}$.

Άρα: το 1ο γεγονός της $N_i(t)$ συμβαίνει σε χρόνο $S_N \sim Exp(\lambda)$

Όμοια για ενδιάμεσο χρόνο μέχρι το 2ο γεγονός κ.ο.κ.

Άρα η $\{N_i(t)\}$ έχει ανεξ. ισον. $Exp(\lambda p_i)$ χρόνους μεταξύ των γεγονότων.

5 Μη ομογενής διάσπαση της Poisson

Θεώρημα

Έστω $\{N(t)\}$ στοχ. διαδ. Poisson με ρυθμό λ κι έστω ότι ένα γεγονός που συμβαίνει τη στιγμή t καταγράφεται με πιθανότητα $p(t)$

Έστω $N_1(t)$ = # καταγεγρ. γεγονότων ως τη στιγμή t.

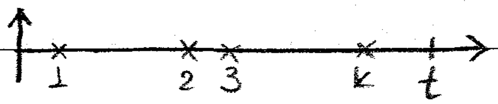
Τότε:

$$P(N_1(t)=n) = e^{-\Lambda(t)}\,\frac{\Lambda(t)^n}{n!}, \text{ όπου } \Lambda(t) = \lambda \int_0^t p(u)\,du$$

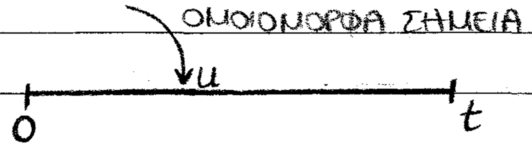
Απόδειξη:

$$P(N_1(t)=n) = \sum_{k=n}^{\infty} \underbrace{P(N(t)=k)}_{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}} \cdot P(N_1(t)=n / N(t)=k) \quad (1)$$

$k \geq n$: $P(N_1(t)=n / N(t)=k)$ (2)



Έχω:



$$\text{Πιθανότητα (καταγραφής)} = \int_0^t p(u)\cdot \overset{\frac{1}{t}}{\overset{\shortparallel}{f_u}}(u)\,du = \frac{1}{t}\int_0^t p(u)\,du = a$$

Άρα: $(2) = \binom{k}{n} a^n (1-a)^{k-n}$ (3)

Άρα: $(1) \wedge (3) \Rightarrow P(N_1(t)=n) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\binom{k}{n} a^n (1-a)^{k-n}$

$$= e^{-\lambda t} a^n \frac{(\lambda t)^n}{n!} \boxed{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{((1-a)\lambda t)^{k-n}}{(k-n)!}} = \quad = e^{(1-a)\lambda t}$$

$$= e^{-\lambda a t}\frac{(\lambda a t)^n}{n!}$$

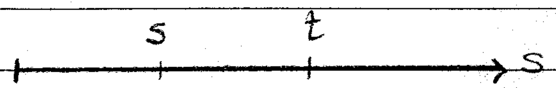
Έχω: $\lambda a t = \lambda \cdot \frac{1}{\cancel{t}}\int_0^t p(u)\,du \cdot \cancel{t}$

6 <u>Άσκηση</u> (προσοχή)

Έστω $\{N(t)\}$ Poisson με ρυθμό λ

$Cov(N(t), N(s)) = ;$

<u>Απ:</u>



Έστω <u>$s<t$</u> : $Cov(N(t), N(s)) = E[N(t)\cdot N(s)] = \overbrace{E[N(t)]}^{\lambda \cdot t} \cdot \overbrace{E[N(s)]}^{\lambda \cdot s}$

$$E[N(t)\cdot N(s)] = E[(N(s)+(N(t)-N(s)))N(s)] =$$

$$= E[N(s)^2] + E[(N(t)-N(s))N(s)] =$$

$$= Var[N(s)] + E[N(s)]^2 + E[N(t)-N(s)]\cdot E[N(s)] =$$

$$\overset{*}{=} \lambda s + \lambda^2 s^2 + \lambda(t-s)\lambda s$$

$$= \lambda s + \cancel{\lambda^2 s^2} + \lambda^2 ts - \cancel{\lambda^2 s^2}$$

Άρα $Cov(N(t), N(s)) = \lambda s$

Αν $X \sim Poisson(\alpha)$

$E(X) = \alpha$

$Var(X) = \alpha$

*