Μάθημα: 6ο

28/3/2012

Ιδιότητα Δεσμευμένων Χρόνων Γεγονότων

(1) Διατεταγμένες τ.μ.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες, ισόνομες και συνεχείς τ.μ. με
σ.κ. $F(x)$
σ.π.π. $f(x)$

$X_{k:n}$ = η: k-οστή μικρότερη τ.μ.

Ειδικά:
$$X_{1:n} = \min(X_1, \dots, X_n)$$
$$X_{n:n} = \max(X_1, \dots, X_n)$$

Έστω:
$F_{k:n}(x) = P(X_{k:n} \le x)$ η σ.κ. της $X_{k:n}$
$f_{k:n}(x)$ η σ.π.π. της $X_{k:n}$

Τότε:
$$F_{k:n}(x) = P(X_{k:n} \le x) = P\begin{pmatrix}\text{τουλάχιστον } k \text{ από τις} \\ X_1, X_2, \dots, X_n \text{ να είναι } \le x\end{pmatrix} =$$
$$= \sum_{j=k}^{n} P\begin{pmatrix}\text{ακριβώς } j \text{ από τις} \\ X_1, X_2, \dots, X_n \text{ να είναι } \le x\end{pmatrix} =$$
$$= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j (1-F(x))^{n-j}$$

$$f_{k:n}(x) = \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{P(x < X_{k:n} \le x+\delta x)}{\delta x} =$$
$$= \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{P\begin{pmatrix}k-1 \text{ από τις } X_1, \dots, X_n \text{ είναι } \le x \\ 1 \text{ είναι στο } (x, x+\delta x) \\ n-k \text{ είναι } > x+\delta x\end{pmatrix}}{\delta x} =$$
$$= \binom{n}{k-1}\binom{n-k+1}{1}\binom{n-k}{n-k} F(x)^{k-1} f(x) (1-F(x))^{n-k} =$$
$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F(x)^{k-1} \cdot f(x) \cdot (1-F(x))^{n-k}.$$

Η από κοινού πυκνότητα όλων

$$f_{(X_{1:n},\dots,X_{n:n})}(x_1,\dots,x_n) = n!\,f(x_1)\dots f(x_n)$$

για $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n$

2) Διατεταγμένες τ.μ. από Ομοιόμορφη Κατανομή

$U_1, U_2, \dots, U_n$ ανεξάρτητες κ' ισόνομες από την ομοιόμορφη κατανομή $Unif([0,t])$

Τότε:

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ \frac{x}{t} & , 0 \le x \le t \\ 1 & , x>t \end{cases} \quad \text{η σ.κ.}$$

$$f_U(x) = \frac{1}{t}, \quad x \in [0,t] \quad \text{η σ.π.π.}$$

Τότε:

1 (*) $$f_{(U_{1:n},U_{2:n},\dots,U_{n:n})}(x_1,x_2,\dots,x_n) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 \le x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n \le t$$

$$f_{U_{k:n}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{x}{t}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{t}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{n-k}, \quad 0 \le x \le t.$$

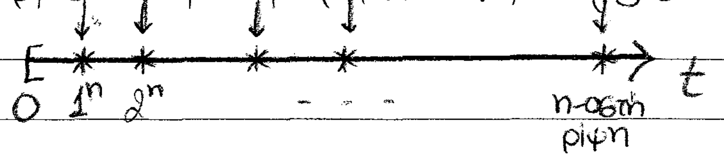
$$F_{U_{k:n}}(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j}\left(\frac{x}{t}\right)^{j}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{n-j}$$

2 (*) $$E[U_{k:n}] = \frac{k}{n+1}\,t$$

! Τις 1 (*), 2 (*) να τις θυμάστε!

Tip για να βγάλουμε την 2 (*):

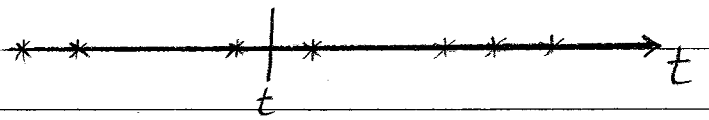
Ρίχνω n κέρματα ομοιόμορφα + δημιουργώ n+1 κενά.



Άρα $E[U_{k:n}] = \frac{k\,t}{n+1}$

3 Ερώτημα

Κατανομή του S_1 σε Poisson(λ) στοχαστική διαδικασία δεδομένου ότι $N(t)=1$ $=$;



Πρόταση:

$(S_1 / N(t)=1) \sim Uniform([0,t])$

Απόδειξη:

$\{S_n \le x\} = \{N(x) \ge n\}$

$$P(S_1 \le x / N(t)=1) = \frac{P(S_1 \le x, N(t)=1)}{P(N(t)=1)}$$

$$= \frac{P(N(x)\ge 1, N(t)=1)}{P(N(t)=1)} = \frac{P(N(x)=1, N(t)-N(x)=0)}{P(N(t)=1)}$$

$$\overset{\text{ανεξ. ομογ. προσαυξ.}}{=} \frac{e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^1}{1!}\, e^{-\lambda(t-x)}\frac{[\lambda(t-x)]^0}{0!}}{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^1}{1!}}$$

$$= \frac{x}{t}, \quad \text{για } 0 \le x \le t$$

σ.κ. της Unif([0,t])

4 Δεσμευμένη κατανομή των S_n

Θεώρημα

$(S_1, S_2, \dots, S_n / N(t)=n) \overset{d}{=} (U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n})$

όπου $U_{1:n}, \dots, U_{n:n}$ οι διατεταγμένες τ.μ. από n ανεξάρτητες ομοιόμορφες στο $[0,t]$.

d: έχουν την ίδια κατανομή (distribution)

Απόδειξη

Αρκεί να δείξω ότι η δεσμευμένη σ.π.π. των $(S_1, S_2, \dots, S_n)$ δεδομένου ότι $N(t)=n$ είναι η ίδια με τις $(U_{1:n}, \dots, U_{n:n})$

Έχω: $f_{(S_1,S_2,\dots,S_n/N(t)=n)}(x_1,x_2,\dots,x_n) =$

$$=\lim_{\substack{\delta x_i\to 0^+\\1\le i\le n}} \frac{P(x_1<S_1\le x_1+\delta x_1,\ x_2<S_2\le x_2+\delta x_2,\dots,x_n<S_n\le x_n+\delta x_n / N(t)=n)}{\delta x_1\,\delta x_2\dots\delta x_n}$$

$$=\lim_{\substack{\delta x_i\to 0^+\\1\le i\le n}} \frac{P(x_1<S_1\le x_1+\delta x_1,\dots,x_n<S_n\le x_n+\delta x_n, N(t)=n)}{\delta x_1\,\delta x_2\dots\delta x_n\cdot P(N(t)=n)} =$$

$$=\lim_{\substack{\delta x_i\to 0^+\\1\le i\le n}} \frac{e^{-\lambda x_1}\frac{(\lambda x_1)^0}{0!}\,e^{-\lambda \delta x_1}\frac{(\lambda\cdot\delta x_1)^1}{1!}\,e^{-\lambda(x_2-x_1-\delta x_1)}\frac{(\lambda(x_2-x_1-\delta x_1))^0}{0!}\cdots}{\delta x_1\,\delta x_2\dots\delta x_n\cdot e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}} =$$

$$=\frac{e^{-\lambda t}\cdot\lambda^n}{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}} = \frac{n!}{t^n}\ ;\quad 0\le x_1\le x_2\le\dots\le x_n\le t$$

⑤ Στην Πράξη

$P\left(\begin{matrix}\text{παράσταση}\\ \text{των } S_k\end{matrix}\ / N(t)=n\right)$ $_{1\le k\le n}$

$E\left(\begin{matrix}\text{παράσταση}\\ \text{των } S_k\end{matrix}\ / N(t)=n\right)$ $_{1\le k\le n}$

→ Στη θέση του S_k βάζω το $U_{k:n}$ και παραλείπω τη δέσμευση.

⑥ Παράδειγμα

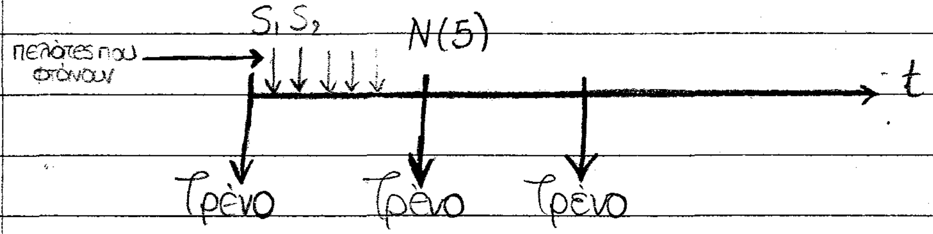
Έστω ότι πελάτες έρχονται σύμφωνα με Poisson(λ) στοχ. διαδ. Μέσος χρόνος άφιξης του 7ου πελάτη δεδομένου ότι σε 1 ώρα ήρθαν 9 πελάτες.

Απ: $E[S_7 / N(\underset{\text{λεπτά}}{60})=9] = E[U_{7:9}] = \frac{\overset{k}{7}\cdot \overset{t}{60}}{\underset{n}{9}+1} = 42$ λεπτά

7 Παράδειγμα

Πελάτες φθάνουν σε έναν σταθμό του μετρό σύμφωνα με Poisson με ρυθμό 40 πελάτες / λεπτό
Οι συρμοί περνάνε κάθε 5 λεπτά.
Να βρεθεί ο αναμενόμενος συνολικός χρόνος χαμένων λεπτών αναμονής μεταξύ αφίξεων δύο διαδοχικών συρμών.

Απ:



Συνολικός Χρόνος Αναμονής $= \sum_{i=1}^{N(5)} (5-S_i)$

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(5)}(5-S_i)\right] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N(5)}(5-S_i) \,\Big|\, N(5)\right]\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P(N(5)=n)\, E\left[\sum_{i=1}^{N(5)}(5-S_i) \,\Big|\, N(5)=n\right]$$

$$P(N(5)=n) = e^{-200}\frac{200^n}{n!}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(5)}(5-S_i) / N(5)=n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n}(5-U_{i:n})\right] = 5n - \sum_{i=1}^{n} E[U_{i:n}] =$$

$$= 5n - \sum_{i=1}^{n}\frac{i\cdot 5}{n+1} = 5n - \frac{5}{\cancel{n+1}}\,\frac{n\,\cancel{(n+1)}}{2} =$$

$$= 5n - \frac{5n}{2} = \frac{5n}{2}.$$

Άρα το ζητούμενο είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-200}\frac{(200)^n}{n!}\,\frac{5n}{2} = 500\cdot e^{-200}\underbrace{\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(200)^{n-1}}{(n-1)!}}}_{e^{200}} = 500 \text{ λεπτά}$$