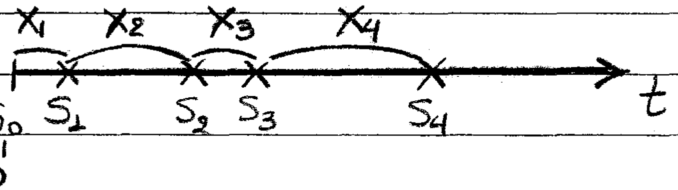
Μάθημα: 4ο — 21/3/2012

Διαδικασία Poisson
Βασικοί Ορισμοί - Ιδιότητες

① Στόχος

Μοντελοποίηση μιας διαδικασίας γεγονότων που συμβαίνουν στο χρόνο εντελώς τυχαία με ρυθμό λ.

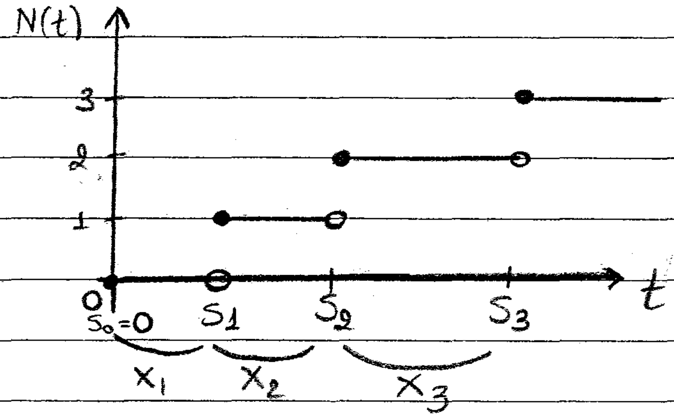


② Ορισμός I

Έστω $X_1, X_2, \ldots \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ ανεξάρτητες τ.μ.
και θέτουμε $S_0 = 0$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Η διαδικασία $\{N(t) : t \geq 0\}$ με $N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$ λέγεται διαδικασία Poisson με ρυθμό λ.



③ Κατανομή S_n, $N(t)$

$F_{S_n}(t) = P(S_n \leq t) =$ σ.κ. της Gamma(n, λ)

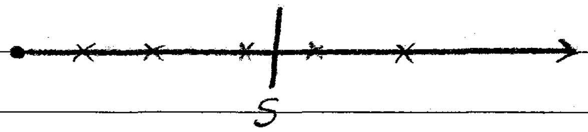
$$= \int_0^t \underbrace{\frac{\lambda^n}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-\lambda u}}_{\text{σ.π.π. της } S_n} du = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$$P(N(t)=n) = P(S_n \le t < S_{n+1}) = P(S_n \le t) - P(S_{n+1} \le t) =$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} - 1 + \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

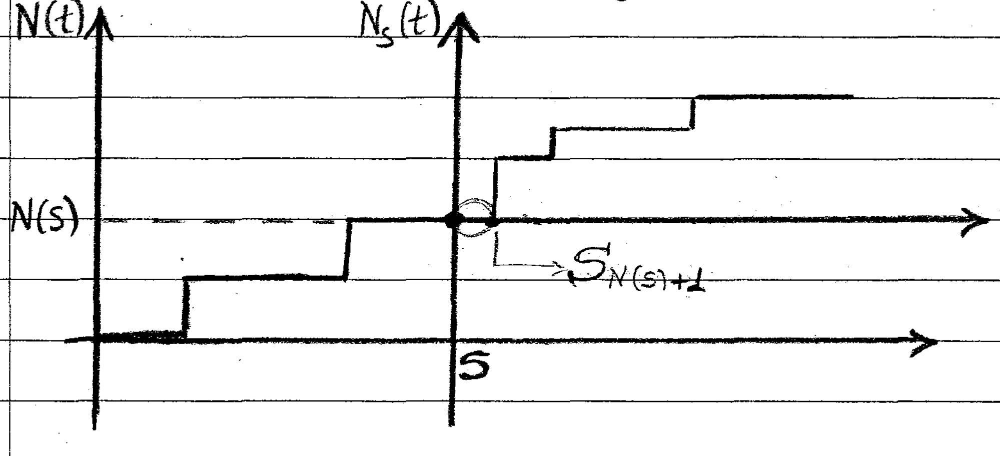
$$P(N(t)=n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n=0,1,\dots \Rightarrow N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$$

④ Ιδιότητα των Ανεξάρτητων Προσαυξήσεων



Θεώρημα

Η διαδικασία $N_s(t) = N(t+s) - N(s)$, $t \ge 0$ είναι διαδικασία Poisson ρυθμού λ και ανεξ. της $\{N(t) : 0 \le t \le s\}$.



Απόδειξη:

$$P(S_{N(s)+1} - s \ge x \mid N(t) : 0 \le t \le s) = P(S_{k+1} - s \ge x \mid N(s) = k, S_1 = s_1, S_2 = s_2, \dots, S_k = s_k)$$

$$= P(s_k + X_{k+1} - s \ge x \mid \;\; >> \;\;) =$$

$$= P(X_{k+1} \ge x - s_k + s \mid X_{k+1} > s - s_k)$$

$$\xrightarrow{\text{λόγω Αμνήμονης ιδιότητας}} = e^{-\lambda x}$$

Από εδώ έχουμε το συμπέρασμα:

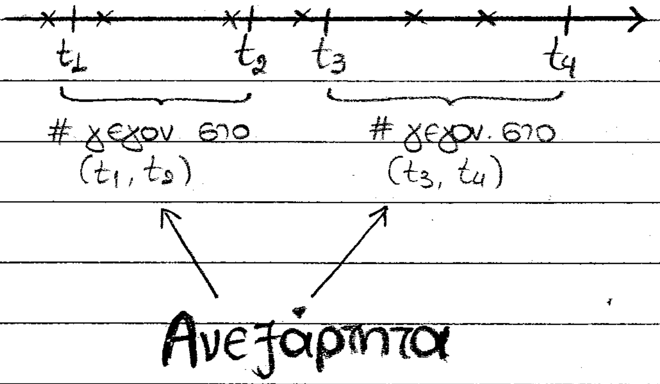
Αφού οι $X_{k+2}, X_{k+3}, \dots$ είναι ανεξάρτητοι από τους $X_1, X_2, \dots, X_{k+1}$.

Πόρισμα: Ιδιότητα ανεξάρτητων και ομογενών προσαυξήσεων

1) Ομογένεια: $N(t+s) - N(s) =$ # γεγον. στο $(s, t+s)$ $\sim Poisson(\lambda t)$

2) Ανεξαρτησία: Αν $t_1 \le t_2 \le t_3 \le t_4$ τότε

$N(t_4) - N(t_3)$, $N(t_2) - N(t_1)$ ανεξάρτητες



⑤ Ορισμός II

Έστω $\{N(t): t \ge 0\}$ στοχ. διαδικασία με τιμές στο $\{0, 1, \dots\}$ ώστε

1) Η $\{N(t)\}$ έχει ανεξ. και ομογεν. προσαυξήσεις

2) $P(N(t)=n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$, $n = 0, 1, \dots$

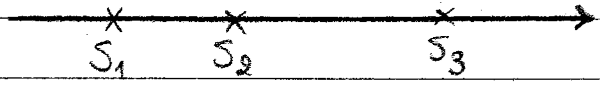
(δηλ. $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$).

Η $N(t)$ λέγεται διαδικασία Poisson με ρυθμό λ.

⑥ Ισοδυναμία Ορισμών I κ' II

I → II ✓ (από προηγούμενο θεώρημα)

II → I



Ορίζω $S_n = \inf\{t \ge 0 : N(t) = n\}$

και $X_n = S_n - S_{n-1}$

Αν δείξω ότι X_n, $n = 1, 2, \dots$ ανεξ. $Exp(\lambda)$ τότε έχω το I

$P(X_1 > t) = P(S_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t} \Rightarrow X_1 \sim Exp(\lambda)$

Επίσης, $P(X_n > t \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) =$

$P(X_n > t \mid S_1 = x_1, S_2 = x_1 + x_2, \dots, S_{n-1} = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) =$

$P($Στο διάστημα $(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}, x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + t)$ δεν συνέβησαν γεγονότα στη $N(t)) = e^{-\lambda t}$, οπότε

$X_n \sim Exp(\lambda)$

X_n ανεξ. των $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ $\Rightarrow$ Η $\{N(t)\}$ ικανοποιεί τον ορισμό I

(7) Ορισμός III

Έστω $\{N(t): t \geq 0\}$ στοχαστική διαδικασία με τιμές στο $\{0, 1, \dots\}$

1) $N(0) = 0$

2) Έχει ανεξάρτητες ομογεν. προσαυξήσεις

3) $$P(N(h)=n) = \begin{cases} 1 - \lambda h + o(h) & , n=0 \\ \lambda h + o(h) & , n=1 \\ o(h) & , n \geq 2 \end{cases}$$

για $h \to 0^+$ (όπου $f(h) = o(h)$ $h \to 0^+$ αν $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h)}{h} = 0$)

Τότε η $\{N(t)\}$ είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό λ

(8) Ισοδυναμία Ορισμών II κ' III

II → III : Αρκεί να αποδείξω το 3) του Ορισμού III.

Πράγματι,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{P(N(h)=0) - 1 + \lambda h}{h} =$$

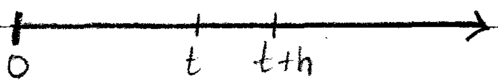
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{e^{-\lambda h} - 1 + \lambda h}{h} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(N(h)=0) - 1 + \lambda h = o(h).$$

Άρα: $P(N(h)=0) = 1 - \lambda h + o(h)$ και τα υπόλοιπα όμοια.

III → II : Αρκεί να δείξω ότι $p_n(t) = P(N(t)=n)$ δίνεται από την

$$p_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$



$p_n(t+h) = P(N(t+h)=n) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(N(t+h)=n / N(t)=k)\, P(N(t)=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} p_k(t) \cdot P(N(h)=n-k)$$

$$= (1-\lambda h + o(h))\, p_n(t) + (\lambda h + o(h))\, p_{n-1}(t) + \\ + o(h) \sum_{k=0}^{n-2} p_k(t)$$

Άρα: $p_n(t+h) = (1-\lambda h)\, p_n(t) + \lambda h\, p_{n-1}(t) + o(h)$

$$\Rightarrow \frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} = -\lambda \cdot p_n(t) + \lambda \cdot p_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

$$\overset{h \to 0^+}{\Rightarrow} p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda \cdot p_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Όμοια για $n=0$: $p_0'(t) = -\lambda \cdot p_0(t)$

Έχουμε: $\dfrac{p_0'(t)}{p_0(t)} = -\lambda$

$$\frac{d}{dt} \log p_0(t) = -\lambda$$

$$\Rightarrow p_0(t) = c \cdot e^{-\lambda t}$$

Όμως: $p_0(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow p_0(t) = e^{-\lambda t}$

Επίσης, $e^{\lambda t} p_n'(t) + \lambda \cdot e^{\lambda t} p_n(t) = \lambda \cdot e^{\lambda t} p_{n-1}(t)$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} p_n(t)\right) = \lambda \cdot e^{\lambda t} p_{n-1}(t)$$

Πολ/ζω με $e^{\lambda t}$ για να δημιουργήσω την παράγωγο του $e^{\lambda t} p_n(t)$

και προχωρούμε επαγωγικά, οπότε δείχνω

$$p_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Εναλλακτικά θέτω

$$P(t,z) = E[z^{N(t)}] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n$$

Τότε: $p_n'(t) z^n = -\lambda \cdot p_n(t) \cdot z^n + \lambda \cdot z \cdot p_{n-1}(t) \cdot z^{n-1}, \; n \geq 1$

$$++\; p_0'(t) z^0 = -\lambda p_0(t) \cdot z^0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t,z) = -\lambda p(t,z) + \lambda z p(t,z)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t,z) = -\lambda(1-z)\,p(t,z)$$

$$\Rightarrow \quad p(t,z) = c \cdot e^{-\lambda(1-z)t}$$

Όμως $c=1$ γιατί $p(0,z)=1$ οπότε

$$\Rightarrow \quad p(t,z) = \underbrace{e^{-\lambda(1-z)t}}_{e^{-\lambda t}\cdot e^{\lambda t z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^n}{n!}}}_{p_n(t)} z^n$$