Μάθημα: 3ο 19/3/2012

Η Εκθετική Κατανομή

① Η αμνήμονη ιδιότητα

Στόχος: Να μοντελοποιηθεί χρόνος ζωής με τ.μ. X

$X \geq 0$: μη-αρνητική

συνεχής, με ιδιότητα μη-γήρανσης.

$\equiv$ Αμνήμονη ιδιότητα

$\rightarrow P(X > t+s \mid X > s) = P(X > t)$

Έστω $f(t) = P(X > t)$ για μια τέτοια τ.μ.

Τότε $f(0) = 1 \rightarrow$ μη αρνητική (1)

$f(t)$ συνεχής $\rightarrow X$ συνεχής τ.μ. (2)

$$f(t) = \frac{P(X > t+s)}{P(X > s)} \iff f(t+s) = f(s) \cdot f(t) \quad \forall s, t \geq 0 \quad (3)$$

Αποδεικνύουμε ότι η μοναδική συν/ση που ικανοποιεί τις (1), (2), (3) είναι η $f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$ (εκθετική)

(*) στο τέλος του μαθ/τος 3 σελ (16)

$$f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1)^{1/2}$$

$$f(1) = f\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = f(1)^{1/3}$$

Οπότε: $f\left(\frac{1}{m}\right) = f(1)^{1/m}$, $m = 1, \dots$

$f(n) = f(1)^n$, $n = 0, 1, \dots$

Για n, m θετικούς ακέραιους: $f\left(\frac{n}{m}\right) = f\Big(\underbrace{\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m}}_{n\text{-φορές}}\Big) =$

$= f(1)^{\frac{n}{m}}$

Άρα: $f(t) = (f(1))^t \quad \forall t \in \mathbb{Q}, t > 0$

$= e^{\log(f(1))^t} = e^{-\lambda t}$, $\lambda = -\log f(1)$

(βάζουμε − γιατί $f(1) < 1$ και $\log f(1) < 0$ οπότε έτσι έχουμε θετικό εκθέτη)

Γενικά: $\forall t \in \mathbb{R},\ t \geq 0$ παίρνουμε $t_n \in \mathbb{Q}$ με $t_n \to t$

Τότε: $f(t) = \lim_{n\to\infty} f(t_n) = \lim_{n\to\infty} e^{-\lambda t_n} = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$

Η μοναδική κατανομή ε.μ. που είναι μη αρνητική, συνεχής και έχει την αμνήμονη ιδιότητα δίνει

$$P(X > t) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Άρα: Εκθετική Κατανομή
$$\begin{cases} F_X(t) = P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 : \text{συν. κατ.} \\ f_X(t) = \dfrac{dF_X(t)}{dt} = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, & t \geq 0 : \text{συν. π.π.} \end{cases}$$

2 Ιδιότητες της Εκθετικής Κατανομής (Βασικές)

$$E[X] = \int_0^\infty x \cdot f_X(x)\,dx = \frac{1}{\lambda}.$$

$$V[X] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Μετασχημ. L-S

$$\tilde{F}_X(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_X(t)\,dt = \lambda \cdot \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t}\,dt = \frac{\lambda}{\lambda+s}$$

$$E[X^n] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \tilde{F}_X(0) = \frac{n!}{\lambda^n}.$$

3 Ρυθμός Βλάβης (Hazard Rate)

Για μια τυχαία μεταβλητή μη-αρνητική και συνεχή ορίζεται ο ρυθμός βλάβης για ηλικία t

$$\lambda(t) = \lim_{dt \to 0^+} \frac{P(t < X \leq t + dt \mid X > t)}{dt}$$

{ πιθ. να είμαι t χρονών και να ζήσω ακόμα dt διάστημα προς αυτό το διάστημα

$$\lambda(t) = \frac{f_X(t)}{1 - F_X(t)}$$

Η εκθετική είναι η μόνη κατανομή με $\lambda(t) = \lambda$, λ σταθερό.

Παρατήρηση:
Γενικά ο ρυθμός βλάβης προσδιορίζει τη συν/ση κατανομής και την σ.π.π.
Πράγματι

$$\lambda_X(t) = \frac{f_X(t)}{1-F_X(t)} = \frac{-\frac{d}{dt}\overbrace{(1-F_X(t))}^{R_X(t)}}{\underbrace{(1-F_X(t))}_{R_X(t)}}$$

$$\Rightarrow \lambda_X(t) = -\frac{d}{dt}\log(1-F_X(t)) \Rightarrow \int_0^t \lambda_X(u)du = -\log(1-F_X(t)) + \log(1-F_X(0))$$

$$\Rightarrow F_X(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda_X(u)du} \quad \text{συν. κατ.}$$

$$f_X(t) = \lambda_X(t)\cdot e^{-\int_0^t \lambda_X(u)du} \quad \text{σ.π.π.}$$

4 Ιδιότητες της Εκθετικής Κατανομής

1) Έστω: $X_1 \sim Exp(\lambda_1)$ και X_1, X_2 ανεξ.
$X_2 \sim Exp(\lambda_2)$

Τότε:

$$P(\min(X_1, X_2) = X_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$P(\min(X_1, X_2) = X_2) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}.$$

Γενικεύεται για n τ.μ., $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ. με $X_i \sim Exp(\lambda_i)$, $i=1,2,\dots,n$

Πράγματι,

$$P(\min(X_1, \dots, X_n) = X_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n}$$

Απόδειξη: (για X_1, X_2)

$$P(\min(X_1, X_2) = X_1) = P(X_1 \le X_2) = \int_0^\infty \underbrace{P(X_1 \le X_2)}_{= e^{-\lambda_2 x_1}} \underbrace{f_{X_1}(x_1)}_{= \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1 x_1}} dx_1$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}.$$

2) Έστω $X_1 \sim Exp(\lambda_1)$ με X_1, X_2 ανεξ.
$X_2 \sim Exp(\lambda_2)$

Τότε: $\min(X_1, X_2) \sim Exp(\lambda_1 + \lambda_2)$

Γενικεύεται για n τ.μ.

Απόδειξη:

$$P(\min(X_1, X_2) > x) = P(X_1 > x, X_2 > x) = P(X_1 > x)\cdot P(X_2 > x)$$
$$= e^{-\lambda_1 \cdot x} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot x} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}, \quad x > 0$$

ΕΡΩΤΗΜΑ: ...

Έστω $X_1 \sim Exp(\lambda_1)$
$X_2 \sim Exp(\lambda_2)$

$$P(\min(X_1, X_2) = X_1 \mid \min(X_1, X_2) \in (x, x+\delta x))$$
$$\parallel$$
$$P(\min(X_1, X_2) = X_1) \; ; \quad \blacksquare$$

3) Έστω $X_1 \sim Exp(\lambda_1)$ με X_1, X_2 ανεξ.
$X_2 \sim Exp(\lambda_2)$

Ορίζω:
$$N = \begin{cases} 1, & \text{αν } \min(X_1, X_2) = X_1 \\ 2, & \text{αν } \min(X_1, X_2) = X_2 \end{cases}$$

Τότε: οι $\min(X_1, X_2)$ και N είναι ανεξάρτητες.

Απόδειξη

$$P(\min(X_1, X_2) > x, N = 1) = P(x < X_1 < X_2) =$$
$$= \int_x^\infty P(x_1 < X_2)\cdot f_{X_1}(x_1)\, dx_1 =$$
$$= \int_x^\infty e^{-\lambda_2 x_1} \cdot \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1 x_1}\, dx_1 =$$
$$= \lambda_1 \int_x^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x_1}\, dx_1 = \lambda_1 \cdot \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}}{\lambda_1+\lambda_2} =$$

$= P(N=1) \cdot P(\min(X_1, X_2) > x)$

Άρα: N, $\min(x_1, x_2)$ ανεξάρτητες

4) Ισχυρή Αμνήμονη: $P(X > t+Y / X > Y) = P(X > t)$, $X \sim Exp(\lambda)$

όπου Y τ.μ. ανεξ. της X με $Y \geq 0$.

Αμνήμονη: $P(X > s+t / X > s) = P(X > t)$

Απόδειξη Ισχυρής Αμνήμονης

$t \geq 0$, $P(X > t+Y \mid X > Y) = \dfrac{P(X > t+Y)}{P(X > Y)} =$

$$= \frac{\int_0^\infty e^{-\lambda(t+y)} f_Y(y)\,dy}{\int_0^\infty e^{-\lambda y} f_Y(y)\,dy} =$$

$$= e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

5) Άθροισμα Ισόνομων Εκθετικών

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξ. $Exp(\lambda)$.

$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma(n, \lambda)$

με σ.π.π. $f_S(x) = \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}$, $x > 0$

και σ.κ. $F_S(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda x} \dfrac{(\lambda x)^k}{k!}$

6) Τυχαίο Άθροισμα Εκθετικών

$X_1, X_2, \ldots$ ανεξ. $Exp(\lambda)$

$P(N=n) = (1-p)^{n-1} p$, $n = 1, 2, \ldots$ $(N \sim Geom)$

Τότε $S = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim Exp(\lambda p)$

(*) Τότε: $f(2) = f(1+1) = f(1) \cdot f(1) = f(1)^2$

$f(3) = f(2+1) = f(1) \cdot f(2) = f(1)^3$

$\vdots$

$f(n) = \ldots = f(1)^n$, $n = 0, 1, \ldots$