Μάθημα: 8ο 14/3/2012

Μέθοδοι από τις Πιθανότητες
Πιθανογεννήτριες-Μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjes

① Πιθανογεννήτρια - Ορισμός

X μη-αρνητική διακριτή ακέραια τ.μ. με σ.π. $p_n = P(X=n)$, $n=0,1,\dots$

Τότε η πιθανογεννήτρια της X:

$$P_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot P(X=n) = E[z^X].$$

② Ιδιότητες Πιθανογεννήτριας

1) Η $P_X(z)$ συγκλίνει τουλάχιστον για $|z| \le 1$.

2) $P_X(1) = 1$

3) $P(X=n) = \dfrac{P_X^{(n)}(0)}{n!}$ ⟵ Η $P_X(z)$ προσδιορίζει την σ.π. p_n

4) $P_X(z) = P_Y(z) \iff P(X=n) = P(Y=n),\ \forall n$

5) $P_X^{(n)}(1) = \underbrace{E[\underbrace{X(X-1)(X-2)\dots(X-n+1)}_{n\text{-παράγοντες}}]}_{n\text{-τάξης καθοδική παραγοντική ροπή}}$

Π.Χ. $E[X] = P_X'(1)$

$E[X(X-1)] = E[X^2] - E[X] = P_X''(1)$

$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 =$

$= P_X''(1) + P_X'(1) - (P_X'(1))^2.$

6) $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες και $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Αν έχω X, Y ανεξ. τότε $f_{X+Y}(n) = \sum_{k=0}^{n} f_X(k) \cdot f_Y(n-k)$ και το υπολογίζω

Όμως για n ανεξ. τ.μ. τα πράγματα δυσκολεύουν.

Έτσι, θα χρησιμοποιήσω πιθανογεννήτριες!

Ισχύει: $P_{S_n}(z) = E[z^{X_1+X_2+\dots+X_n}] = E[z^{X_1} \cdot z^{X_2} \dots z^{X_n}] =$

$= E[z^{X_1}] \cdot E[z^{X_2}] \dots E[z^{X_n}] = P_{X_1}(z) P_{X_2}(z) \dots P_{X_n}(z)$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν το **n** ήταν τυχαίο ή είχαμε άπειρο πλήθος τ.μ. δε θα ίσχυε η μετάβαση.

7) $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με πιθανογεννήτρια $P_X(z)$.

N ακέραια, μη αρνητική, ανεξάρτητη των X_i με πιθανογεννήτρια $P_N(z)$

$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$

Έχω: $P(S_N=0) = P(N=0) + P(N=1)\cdot P(X=0) + P(N=2)\cdot P(X=0)^2 + \dots$

$$P(S_N=1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(N=k)\cdot \binom{k}{1} P(X=1)P(X=0)^{k-1}.$$

$\vdots$

Πολύ δύσκολο στον υπολογισμό.

Προσπαθώ πάλι να δουλέψω με πιθανογεννήτριες.

$$P_{S_N}(z) = E[z^{S_N}] = E[E[z^{S_N}/N]]$$

N ανεξ. των X_i

$$E[z^{S_N}/N=n] = E[z^{S_n}/N=n] = E[z^{X_1}z^{X_2}\dots z^{X_n}/N=n] = E[z^{X_1}\cdot z^{X_2}\dots z^{X_n}] = E[z^{X_1}]\dots E[z^{X_n}] = (P_X(z))^n$$

Άρα: $P_{S_N}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} E[S_N/N=n]\cdot P(N=n) =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (P_X(z))^n \cdot P(X=n) = P_N(P_X(z))$$

3) Βασικά Αθροίσματα

- $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ $\quad |z|<1$ $\quad$ (γεωμετρική σειρά) $\quad$ (1)
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$ $\quad$ (2)
- $(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k$ $\quad$ (διώνυμο του Νεύτωνα) $\quad$ (3)
- $\frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} z^k$, $\quad |z|<1$, όπου $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n+k-1}{k}$. $\quad$ (4)

(4) Παράδειγμα 1°

N = # ατυχημάτων που φθάνουν σ' ένα νοσοκομείο

$N \sim Poisson(\lambda)$

$X_1, X_2, \dots$ με $X_i = \begin{cases} 1, & i: \text{σοβαρό ατύχημα} \\ 0, & i: \text{μη σοβ.} \end{cases}$

$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ = # σοβαρών ατυχημ. και $P(X_i = 1) = p$

$P(X_i = 0) = 1 - p$

Απ: Τα X_i είναι ανεξάρτητα, αλλά και το N ανεξ. των X_i

Έχω: $P_X(z) = p \cdot z^1 + (1-p) \cdot z^0 = 1 - p + pz$

$$P_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} z^n = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda z} = e^{-\lambda(1-z)} \quad (\text{χρήση } (2))$$

Άρα: $P_{S_N}(z) = P_N(P_X(z)) = e^{-\lambda(1 - P_X(z))} = e^{-\lambda(1-1+p-pz)} =$
$= e^{-\lambda p(1-z)}$

Άρα: $S_N \sim Poisson(\lambda p)$.

(5) Παράδειγμα 2°

$X_1 \sim Geom(p_1)$, $P(X_1 = n) = (1-p_1)p_1^n$, $n = 0, 1, \dots$

$X_2 \sim Geom(p_2)$, $P(X_2 = n) = (1-p_2)p_2^n$, $n = 0, 1, \dots$

$Z = X_1 + X_2$

$P(Z = n) =$;

Απ: Γενικά $X \sim Geom(p)$, $P(X = n) = (1-p)p^n$, $n = 0, 1, \dots$

$$P_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{P(X=n)}}_{(1-p)\cdot p^n} z^n = \frac{1-p}{1-pz}$$

$$P_{X_1}(z) = \frac{1-p_1}{1-p_1 z} \quad \text{και} \quad P_{X_2}(z) = \frac{1-p_2}{1-p_2 z}$$

Άρα: $$P_Z(z) = P_{X_1}(z) P_{X_2}(z) = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{(1-p_1 \cdot z)(1-p_2 z)} =$$

$$= \frac{A}{1 - p_1 z} + \frac{B}{1 - p_2 z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{1-\rho_2 z} = A + \frac{B(1-\rho_1 z)}{1-\rho_2 z} \xRightarrow{z=\frac{1}{\rho_1}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{1-\frac{\rho_2}{\rho_1}} = \frac{\rho_1(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{\rho_1-\rho_2}$$

<u>Ομοίως:</u> $\frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{1-\rho_1 \cdot z} = \frac{A(1-\rho_2 z)}{1-\rho_1 \cdot z} + B \xRightarrow{z = 1/\rho_2}$

$$\Rightarrow B = \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{1-\frac{\rho_1}{\rho_2}} = \frac{\rho_2(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}.$$

<u>Έχουμε:</u> $P_Z(z) = \frac{\rho_1(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{\rho_1-\rho_2} \cdot \frac{1}{1-\rho_1 z} + \frac{\rho_2(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{\rho_2-\rho_1} \cdot \frac{1}{1-\rho_2 z}$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P(Z=n) z^n = A \sum_{n=0}^{\infty} \rho_1^n z^n + B \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \rho_2^n z^n$$

$$\Rightarrow P(Z=n) = A\rho_1^n + B \cdot \rho_2^n, \quad n=0,1,\dots$$

⑥ <u>Παράδειγμα</u>

X τ.μ. ακέραια, μη αρνητική με πιθανογεννήτρια

$$P_X(z) = \frac{c-15z}{54-63z+18z^2}$$

$P(X=n) = ;$

<u>Απ:</u> Πρέπει να προσδιορίσω πρώτα την άγνωστη παράμετρο c.

<u>Ισχύει:</u> $P_X(1) = 1 \Rightarrow \frac{c-15}{54-63+18} = 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow \underline{\underline{c=24}}$

$$P_X(z) = \frac{24-15z}{54-63z+18z^2} = \frac{24-15z}{18(z-2)(z-\frac{3}{2})} = \frac{24-15z}{18(2-z)(\frac{3}{2}-z)} =$$

$$= \frac{A}{2-z} + \frac{B}{\frac{3}{2}-z}$$

Βρίσκω τα A, B όπως στο προηγούμενο παράδειγμα!

Βγαίνουν $A = \frac{2}{3}$ και $B = \frac{1}{6}$.

<u>Άρα:</u> $P_X(z) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2-z} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}-z} = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}z}$

$$= \frac{2}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^n + \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n z^n$$

$P(X=n) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad , \quad n=0,1,\ldots$

7) Μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes

X μη-αρνητική τ.μ. με αθροιστ. κατανομή $F_X(x)$ και σ.π. ή σ.π.π. $f_X(x)$.

Ο μετασχηματισμός L-S της X

$$\tilde{F}_X(s) = E[e^{-sX}] = \begin{cases} \sum_x e^{-sx} f_X(x), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f_X(x)\,dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

8) Ιδιότητες Μετασχηματισμού L-S

1) Συγκλίνει για $s \geq 0$

2) Προσδιορίζει την κατανομή:

$\tilde{F}_X(s) = \tilde{F}_Y(s) \Rightarrow f_X(x) = f_Y(x)$

3) $E[X^n] = (-1)^n \tilde{F}_X^{(n)}(0)$.

4) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$\tilde{F}_{S_n}(s) = \tilde{F}_{X_1}(s) \ldots \tilde{F}_{X_n}(s)$

<u>Απόδειξη</u>

$\tilde{F}_{S_n}(s) = E\left[e^{-s(X_1+X_2+\ldots+X_n)}\right] = E\left[e^{-sX_1} \cdot e^{-sX_2} \ldots e^{-sX_n}\right] =$

$$= E[e^{-sX_1}] \cdot E[e^{-sX_2}] \ldots E[e^{-sX_n}] =$$

$$= \tilde{F}_{X_1}(s) \cdot \tilde{F}_{X_2}(s) \ldots \tilde{F}_{X_n}(s)$$

5) $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες με $F_X(x)$

N ανεξ. των X_i, ακέραια, μη-αρνητική $\Rightarrow$

$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$

$$\Rightarrow \underbrace{\tilde{F}_{S_N}(s) = P_N\left(\tilde{F}_X(s)\right)}$$

Προσοχή