Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα Ι

Επανάληψη στις Πιθανότητες Ι

Δεσμευμένη Μέση Τιμή

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$: δεσμευμένη συνάρτ. πιθ. (διακριτές) ή
» » τ.π.π. (συνεχείς)

$$E[X/Y=y] = m_{X/Y}(y) = \begin{cases} \sum_x x \cdot f_{X/Y}(x/y) & , X \text{ διακρ.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X/Y}(x/y)dx & , X \text{ συν.} \end{cases}$$

→ εξαρτάται από το y

$E[X/Y]$: τυχαία μεταβλητή

Θ/μα Διπλής Μέσης Τιμής

$$E[X] = E[E[X/Y]] = E[m_{X/Y}(Y)] = \begin{cases} \sum_y m_{X/Y}(y) f_Y(y) & , Y \text{ διακρ.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} m_{X/Y}(y) \cdot f_Y(y) & , Y \text{ συν.} \end{cases}$$

Πιθανογεννήτρια

Η πιθανογεννήτρια της διακριτής X είναι η

$$P_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(X=n) = E[z^X]$$

Ιδιότητες:

1) συγκλίνει για τουλ. $|z| \le 1$.
2) $P_X(1) = 1$
3) $P(X=n) = \frac{P_X^{(n)}(0)}{n!}$
4) $P_X(z) = P_Y(z) \Leftrightarrow P(X=n) = P(Y=n)$, $\forall n$
5) $P_X^{(n)}(1) = E[X(X-1)(X-2)\dots(X-n+1)]$
6) $X_1, \dots, X_n$ ανεξ. τ.μ. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow P_{S_n}(z) = P_{X_1}(z) \dots P_{X_n}(z)$
7) $X_1, \dots$ ανεξ. τ.μ. ισον. με πιθανογεννήτρια $P_X(z) \Rightarrow P_{S_N}(z) = P_N(P_X(z))$
N ακέραια, μη αρνητ., ανεξ. των X_i με πιθανογεννήτρια $P_N(z)$, $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$

Βασικά Αθροίσματα:

1) $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$, $|z|<1$ (γεωμετρική σειρά)

2) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$

3) $(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k$ (διώνυμο Νεύτωνα)

4) $\frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} z^k$, $|z|<1$, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n+k-1}{k}$

Μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjes

$$\tilde{F}_X(s) = E[e^{-sX}] = \begin{cases} \sum_x e^{-sx} f_X(x), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} f_X(x), & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Ιδιότητες:
1) συγκλίνει για $s \geq 0$ για $X \geq 0$
2) $\tilde{F}_X(s) = \tilde{F}_Y(s) \Rightarrow f_X(x) = f_Y(x)$
3) $E[X^n] = (-1)^n \tilde{F}_X^{(n)}(0)$
4) $X_1, \dots, X_n$ ανεξ. σ' $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \tilde{F}_{S_n}(s) = \tilde{F}_{X_1}(s) \dots \tilde{F}_{X_n}(s)$
5) $X_1, \dots$ ανεξ. σ' ισον. με $F_X(x)$, N ανεξ. των X_i, ακέραια, $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ $\Rightarrow \tilde{F}_{S_N}(s) = P_N(\tilde{F}_X(s))$

Εκθετική Κατανομή

$F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ σ' $f_X(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$

- $f(0) = 1$
- $f(t)$ συνεχής $\Rightarrow X$ συνεχής τ.μ.
- $f(t) = \frac{P(X > t+s)}{P(X > s)} \Leftrightarrow f(t+s) = f(s) \cdot f(t)$ $\forall s,t \geq 0$
- Αμνήμων ιδιότητα: $P(X > t+s \,/\, X > s) = P(X > t)$

$E[X] = \frac{1}{\lambda}$, $Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$, $\tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$, $E[X^n] = \frac{n!}{\lambda^n}$

Ρυθμός βλάβης: $\lambda(t) = \lim_{dt \to 0^+} \frac{P(t < X \leq t+dt \,/\, X > t)}{dt} = \frac{f_X(t)}{1 - F_X(t)}$

↳ προσδιορίζει σκ. σ' σ.π.π.

Στην εκθετική ισχύει $\lambda(t) = \lambda$, λ σταθερό.

<u>Ιδιότητες</u>: 1) $X_1, \dots, X_n$ ανεξ. με $X_i \sim Exp(\lambda_i)$, $i=1,2,\dots,n$

$$P(\min(X_1,\dots,X_n)=X_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n}.$$

2) $X_1 \sim Exp(\lambda_1)$, X_1, X_2 ανεξ.
$X_2 \sim Exp(\lambda_2)$
<u>Τότε</u>: $\min(X_1,X_2) \sim Exp(\lambda_1+\lambda_2)$
Γενικεύεται για n τ.μ.

3) $X_1 \sim Exp(\lambda_1)$, X_1, X_2 ανεξ.
$X_2 \sim Exp(\lambda_2)$
Ορίζω: $N = \begin{cases} 1, & \text{αν } \min(X_1,X_2)=X_1 \\ 2, & \text{αν } \min(X_1,X_2)=X_2 \end{cases}$

<u>Τότε</u>: οι $\min(X_1,X_2)$ και N ανεξάρτητες.

4) Ισχυρή Αμνήμοση: $P(X>t+Y \mid X>Y)=P(X>t)$, $X\sim Exp(\lambda)$
Αμνήμοση: $P(X>s+t \mid X>s)=P(X>t)$

5) Άθροισμα Ισόνομων Εκθετικών
$X_1, \dots, X_n$ ανεξ. $Exp(\lambda)$
$S=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma(n,\lambda)$

6) Τυχαίο Άθροισμα Εκθετικών
$X_1, \dots$ ανεξ. $Exp(\lambda)$, $N\sim Geom(p)$
$S=\sum_{i=1}^{N} X_i \sim Exp(\lambda p)$

- <u>Διαδικασία Poisson</u>

<u>Ορισμός I</u>

$X_1, X_2, \dots \sim Exp(\lambda)$ ανεξ. τ.μ. Ε' θέτουμε $S_0=0$, $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$
Η διαδικασία $\{N(t): t\geq 0\}$ με $N(t)=\sup\{n\geq 0: S_n\leq t\}$ λέγεται <u>διαδικασία Poisson με ρυθμό λ.</u>

$$F_{S_n}(t) = 1-\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} = \text{σ.κ. της } Gamma(n,\lambda)$$

$\hookrightarrow \frac{\lambda^n}{(n-1)!}u^{n-1}e^{-\lambda u}$: σ.π.π. της S_n

$$P(N(t)=n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n=0,1,\dots \Rightarrow N(t)\sim Poisson(\lambda t)$$

<u>Θεώρημα</u> (ιδιότητα ανεξάρτητων προσαυξήσεων)
Η διαδικασία $N_s(t) = N(t+s) - N(s)$, $t \geq 0$ είναι διαδικασία Poisson ρυθμού λ και ανεξ. της $\{N(t) : 0 \leq t \leq s\}$.
<u>Πόρισμα</u> (ιδιότητα ανεξάρτητων & ομογενών προσαυξήσεων)
Ομογένεια: $N(t+s) - N(s) = \#$ γεγον. στο $(s, t+s) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$
Ανεξαρτησία: αν $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$ τότε $N(t_4) - N(t_3)$, $N(t_2) - N(t_1)$ ανεξάρτητες.
<u>Ορισμός II</u>
Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ στοχ. διαδ. με τιμές στο $\{0, 1, \ldots\}$:
1) η $\{N(t)\}$ έχει ανεξ. & ομ. προσαυξήσεις
2) $P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$, $n = 0, 1, \ldots$ (δηλ. $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$)
Η $N(t)$ λέγεται διαδικασία Poisson με ρυθμό λ.
! Οι ορισμοί I, II είναι ισοδύναμοι!
<u>Ορισμός III</u>
Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ στοχ. διαδ. με τιμές στο $\{0, 1, \ldots\}$:
1) $N(0) = 0$
2) έχει ανεξ. ομογενείς προσαυξήσεις
3) $P(N(h) = n) = \begin{cases} 1 - \lambda h + o(h), & n = 0 \\ \lambda h + o(h), & n = 1 \\ o(h), & n \geq 2 \end{cases}$ για $h \to 0^+$

Η $\{N(t)\}$ είναι διαδ. Poisson με ρυθμό λ.

! Οι ορισμοί II & III είναι ισοδύναμοι!

• <u>Διατεταγμένες Τυχαίες Μεταβλητές</u>

Γενικά: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξ., ισον. & συνεχείς τ.μ. με σ.κ. $F(x)$ & σ.π.π. $f(x)$
$X_{k:n}$ = η k-οστή μικρότερη τ.μ.
Ειδικά: $X_{1:n} = \min(X_1, \ldots, X_n)$
$X_{n:n} = \max(X_1, \ldots, X_n)$

$$F_{k:n}(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j (1 - F(x))^{n-j}$$

$$f_{k:n}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F(x)^{k-1} \cdot f(x) \cdot (1 - F(x))^{n-k}$$

Από κοινού σ.π.π. $f_{(X_{1:n}, \ldots, X_{n:n})}(x_1, \ldots, x_n) = n! f(x_1) \ldots f(x_n)$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$

(*) να τις θυμάμαι απ' έξω!

Από Ομοιόμορφη Κατανομή:

$U_1, \dots, U_n$ ανεξ. ισόν. από την $Unif([0,t])$

Τότε:

$$F_U(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{x}{t}, & 0 \le x \le t \\ 1, & x>t \end{cases} \quad \text{η σ.κ.}$$

$$f_U(x) = \frac{1}{t}, \quad x \in [0,t] \quad \text{η σ.π.π.}$$

Έχουμε: (*) $$f_{(U_{1:n}, \dots, U_{n:n})}(x_1, \dots, x_n) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 \le x_1 \le \dots \le x_n \le t$$

$$f_{U_{k:n}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{x}{t}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{t} \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{n-k}, \quad 0 \le x \le t$$

$$F_{U_{k:n}}(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{x}{t}\right)^j \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{n-j}$$

(*) $$E[U_{k:n}] = \frac{k}{n+1} \cdot t$$

Πρόταση

$(S_1 \mid N(t)=1) \sim Uniform([0,t])$

Θεώρημα

$(S_1, \dots, S_n \mid N(t)=n) \overset{d}{=} (U_{1:n}, \dots, U_{n:n})$

! Στην πράξη:

$P\left(\begin{matrix}\text{παράσταση των} \\ S_k, 1 \le k \le n\end{matrix} / N(t)=n\right)$ ⇝ παραλείπω τη δέσμευση & όπου

$E\left(\quad \text{»} \quad / N(t)=n\right)$ S_k βάζω $U_{k:n}$.

- **Υπέρθεση**

Ορισμός

Έστω $\{N_i(t) : t \ge 0\}$, $i=1,2,\dots$ ανεξ. διαδ. Poisson με ρυθμούς λ_i, $i=1,2,\dots$

Η υπέρθεσή τους είναι η διαδικασία

$$\{N(t) : t \ge 0\} \text{ με } N(t) = \sum_{i=1}^{\infty} N_i(t)$$

Θεώρημα

Αν $\{N_i(t)\}$ ανεξ. στοχ. διαδ. Poisson με ρυθμούς λ_i, $i=1,2,\dots$, τότε η υπέρθεσή τους $\{N(t)\}$ είναι διαδ. Poisson ρυθμού $\sum_i \lambda_i$

Τύποι Γεγονότων

Έστω $\{N_i(t) : t \geq 0\}$ ανεξ. διαδ. Poisson ρυθμού λ_i κ' $\{N(t)\}$ η υπέρθεση τους
Επίσης $Z_1, Z_2, \ldots$ οι τύποι γεγονότων της υπέρθεσης, δηλ.

$Z_n = i$, αν το n-οστό γεγ. της υπέρθεσης προέρχ. από την $\{N_i(t)\}$

<u>Τότε:</u> $\{Z_n : n \geq 1\}$ ανεξ. κ' $P(Z_n = i) = \frac{\lambda_i}{\lambda}$, $\lambda = \sum \lambda_i$

• Διάσπαση

Έστω $\{N(t)\}$ στοχ. διαδ. Poisson ρυθμού λ και έστω ότι κάθε γεγ. καταγράφεται ως τύπου i με πιθ. p_i ανεξ.

Αν $N_i(t)$ = # γεγ. τύπου i ως τη στιγμή t, τότε:

$\{N_i(t)\}$ ανεξ. στοχ. διαδ. Poisson ρυθμού λp_i

• Μη ομογενής Διάσπαση της Poisson

Θεώρημα

Έστω $\{N(t)\}$ στοχ. διαδ. Poisson με ρυθμό λ κ' έστω ότι ένα γεγ. που συμβαίνει τη στιγμή t καταγράφεται με πιθ. $p(t)$

$N_1(t)$ = # καταγεγρ. γεγ. ως τη στιγμή t.

<u>Τότε:</u> $P(N_1(t) = n) = e^{-\Lambda(t)} \frac{\Lambda(t)^n}{n!}$, όπου $\Lambda(t) = \lambda \cdot \int_0^t p(u)\,du$.

• Μη ομογενής διαδικασία Poisson

Ορισμός

Μια διαδικασία $\{N(t)\}$ απαριθμήτρια γεγ. λέγεται <u>μη-ομογενής Poisson με ρυθμό $\lambda(t)$</u> αν έχει:

$$\text{Ανεξ. προσαυξ.} + P(N(t+h) = i+j \mid N(t) = i) = \begin{cases} 1 - \lambda(t)\cdot h, & j = 0 \\ \lambda(t)\cdot h, & j = 1 \\ 0, & j \geq 2 \end{cases}$$

ή ισοδύναμα αν έχει:

$$\text{Ανεξ. προσαυξ.} + N(t) \sim \text{Poisson}(\Lambda(t)), \text{ όπου } \Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)\,du$$

$$P(S_n \leq t) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\Lambda(t)} \frac{\Lambda(t)^k}{k!} \Rightarrow f_{S_n}(t) = \lambda(t) \frac{\Lambda(t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\Lambda(t)}.$$

<u>Ιδιότητες:</u> 1) $X_1, \ldots$ όχι ανεξ. ούτε ισόνομες
$P(X_1 > t) = e^{-\Lambda(t)}$
$$P(X_{n+1} > t) = \int_0^\infty e^{-\Lambda(t+s)} \frac{\Lambda(s)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda(s)\,ds$$

2) Ορθή
3) Ορθή
4) $f_{S_n}(t) = \lambda(t) \cdot \frac{\Lambda(t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\Lambda(t)}, \quad t>0$

5) $(S_1, S_2, \ldots, S_n / N(t)=n) \stackrel{d}{=} (Y_{1:n}, Y_{2:n}, \ldots, Y_{n:n})$
Y_i ανεξ. $F_{Y_i}(x) = \frac{\Lambda(x)}{\Lambda(t)}, \quad 0 \le x \le t$

6) Υπέρθεση / Διάσπαση
$\{N_1(t)\}, \{N_2(t)\}$ μη ομογ. Poisson $\Rightarrow$
$\lambda_1(t) \qquad \lambda_2(t)$
Υπέρθεση: $\{N(t)\}$ μη ομογ. Poisson ρυθμού $\lambda_1(t) + \lambda_2(t)$
7) $\{N(t)\}$ διαδ. μη-ομογ. Poisson ρυθμού $\lambda(t)$ και κάθε γεγ. καταγρ. με πιθ. $p(t)$.
$\{N_1(t)\}$ διαδ. καταγεγρ. θα είναι μη-ομογ. Poisson ρυθμού $\lambda(t) \cdot p(t)$
$$P(N_1(t) = k) = e^{-\Lambda_1(t)} \frac{\Lambda_1(t)^k}{k!}, \quad \Lambda_1(t) = \int_0^t \lambda(t) p(t)\,dt.$$

<u>Ισχύουν:</u> 1) $P(X_1 > t) = e^{-\Lambda(t)}$
2) $P(X_{n+1} > t) = \int_0^\infty e^{-\Lambda(t+s)} \frac{\Lambda(s)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda(s)\,ds.$

- <u>Σύνθετη Διαδικασία Poisson</u>

$\{N(t)\}$ στοχ. διαδ. Poisson ρυθμού λ & $Z_1, Z_2, \ldots$ ανεξ. ισόνομες
Θέτω
$$Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$$
Η $Z(t)$ λέγεται <u>σύνθετη διαδικασία Poisson</u> ρυθμού λ και μεγέθους αλμάτων $\{Z_i\}$.

• Ανανεωτική Θεωρία

Ορισμός

Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξ., ισον, μη-αρνητ. τ.μ. με κατανομή $G(t)$
Θέτω $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$
Η $\{S_n\}$ λέγεται ανανεωτική ακολουθία.
Αν $N(t) = \sup\{n : S_n \le t\} = \#$ γεγ. ως το t → στο $(0,t]$, τότε η $\{N(t)\}$ λέγεται ανανεωτική διαδικασία.

$G(t)$ συν. κατ. με σ.π. $g(t)$ αν αντιστοιχεί σε διακριτή
$G(t)$ » » » σ.π.π. $g(t)$ » » σε συνεχή.
$f(t)$ συν/ση
Τότε: $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dG(t) = \begin{cases} \sum_x f(x)g(x) & \text{διακρ.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\,dx & \text{συν.} \end{cases}$$

Ειδικά, αν $f(t) = e^{-st} \Rightarrow \tilde{G}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dG(t)$

Οι $\{N(t) : t \ge 0\}$ & $\{N(t+S_1) - 1 : t \ge 0\}$ είναι στοχ. ισοδύναμες (ίδιες κατανομές).

$F_{S_n}(t) = G^{*n}(t) = P(S_n \le t)$, όπου $(G * F)(t) = \int_0^t G(t-x)\,dF(x)$ → συνέλιξη κατανομών
$p_n(t) = G^{*n}(t) - G^{*(n+1)}(t) = P(N(t)=n)$
$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(t)$: ανανεωτική συν/ση $\quad (M(t) = E[N(t)])$

Μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjes

$$\tilde{F}_{S_n}(t) = \int_0^\infty e^{-st}\,dF_{S_n}(t) = \tilde{G}(s)^n$$

$$\tilde{p}_n(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dp_n(t) = \tilde{G}(s)^n - \tilde{G}(s)^{n+1}$$

$$\tilde{M}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dM(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}(s)^n = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)} \Rightarrow \tilde{G}(s) = \frac{\tilde{M}(s)}{1+\tilde{M}(s)}$$

Αν $G(\infty) = \lim_{t\to\infty} G(t) = P(X_n < \infty)$, τότε $G(\infty) = 1 \Rightarrow P(N(\infty) = \infty) = 1$
$G(\infty) < 1 \Rightarrow P(N(\infty) = k) = G(\infty)^k (1 - G(\infty))$, $k = 0, 1, \ldots$

$$E(N(\infty)) = \frac{G(\infty)}{1 - G(\infty)}$$

Νόμος Μεγάλων Αριθμών για την $\{N(t)\}$

$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\tau}$, με πιθανότητα 1, όπου $\tau = E(X_i)$

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για την $\{N(t)\}$

$$\frac{N(t)-\frac{t}{\tau}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\tau^3}}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

, όπου $\tau = E(X_i)$

$\sigma^2 = Var(X_i)$

Μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjes

$aF(t)+bG(t) \Rightarrow a\cdot\tilde{F}(s)+b\cdot\tilde{G}(s)$

$(F * G)(t) \Rightarrow \tilde{F}(s)\cdot\tilde{G}(s)$

$F^{*n}(t) \Rightarrow \tilde{F}(s)^n$

$t \Rightarrow \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}$

$1-e^{-\lambda t} \Rightarrow \int_0^\infty e^{-st}\,\underbrace{dF(t)}_{\lambda\cdot e^{-\lambda t}dt} = \frac{\lambda}{\lambda+s}$

* Αν η X_n παίρνει τιμές στο $\{0,1,\ldots\}$ (διακριτή) και $a_i = P(X_n=i)$ τότε μας ενδιαφ. η τιμή της $M(t)$ ΜΟΝΟ για $t=0,1,\ldots$
  Μας ενδιαφ. η ακολ. $M_n = M(n)$ με
  $$M_n = \sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=0}^{n} M_i a_{n-i}$$
  Ισχύει: $M(t) = M_{\lfloor t \rfloor}$.

Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα

$\lim_{t\to\infty} \frac{E[N(t)]}{t} = \frac{1}{\tau}$, όπου $E[N(t)] = M(t)$

Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα με Αμοιβές

$\{N(t)\}$: ανανεωτική διαδικασία

$\{R(t)\}$: διαδικασία συσσώρευσης αμοιβής

X_n: n-οστός ενδ. χρόνος , S_n: χρόνος n-οστού γεγ.

$R_n = R(S_n) - R(S_{n-1})$: αμοιβή που συσσωρ. στον ενδ. χρόνο $\{X_n\}$

Αν $(X_1,R_1),(X_2,R_2),\ldots$ ανεξ. & ισόνομα με σ.κ. $F_{X,R}$ και μ.τ. $E[X_i]=\tau$, $E[R_i]=r$, τότε: $\lim_{t\to\infty}\frac{E[R(t)]}{t} = \frac{r}{\tau}$: μακροπρ. μέση αμοιβή ανά χρον. μονάδα

Ανανεωτική Εξίσωση & Λύση της

Ανιαν. Συλλογισμός : Δέσμευση στο χρόνο πραγματ. $1^{ου}$ γεγον.

Ανιαν. Εξίσωση : $H(t) = D(t) + \int_0^t H(t-x)\,dG(x)$

$H(t)$ ↓ άγνωστη συν/ση, $D(t)$ ↓ γνωστή συν/ση, $G(x)$ ↓ γνωστή σ.κ.

Λύση Ανιαν. Εξίσωσης : $H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-x)\,dM_G(x)$

$$\underbrace{H(t)}_{\text{επίδραση τη στιγμή } t \text{ από όλα τα γεγ.}} = \underbrace{D(t)}_{\text{επίδρ. τη στιγμή } t \text{ από το γεγ. στο } S_0} + \underbrace{\int_0^t H(t-x)\,dG(x)}_{\text{επίδρ. τη στιγμή } t \text{ από τα υπόλοιπα } S_1, S_2, \ldots}$$

Ορισμός

X περιοδική με περίοδο $d \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} P(X=kd) = 1$

X απεριοδική $\Leftrightarrow$ όχι περιοδική.

! Συνήθεις διακριτές με τιμές $0, 1, 2, \ldots$ → περιοδ. κατανομές

Αν η X έχει συνεχές μέρος → απεριοδική

Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα

Έστω $H(t) = D(t) + \int_0^t H(t-x)\,dG(x)$ ανιαν. εξ. και $D(t)$ γράφεται ως διαφορά δύο μη-αρνητ. μονότ. + φραγμ. και $\int_0^{\infty} |D(t)|\,dt < \infty$

τότε: G απεριοδική $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} H(t) = \dfrac{\int_0^{\infty} D(t)\,dt}{\tau}$, τ μ.τ. της $G(x)$ ⟸ αυτή χρησιμοποιώ

G περιοδική $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} H(x+kd) = \dfrac{d}{\tau} \sum_{k=0}^{\infty} D(x+kd)$

Ορισμός

Έστω t χρον. στιγμή

$S_{N(t)}$: χρόνος τελευτ. γεγον. πριν την t

$S_{N(t)+1}$: » επόμ. » μετά την t

$A(t) = t - S_{N(t)}$: ηλικία της $\{N(t)\}$, δηλ. χρόνος που μεσολάβησε από το προηγ. γεγονός

$B(t) = S_{N(t)+1} - t$: υπολειπόμενος χρόνος ανιαν., δηλ. χρόνος που θα μεσολαβήσει ως το επόμενο γεγονός

$C(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)} = X_{N(t)+1}$: t εξαρτώμενος χρόνος ανιαν. τη χρον. στιγμή t.

Ισχύουν:

1) $$\lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t B(u)\,du]}{t} = \frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}$$

2) $$E[B(t)] = H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-x)\, dM_G(x)$$

όπου $$D(t) = \int_t^\infty (x-t)\, dG(x)$$

3) $$\lim_{t\to\infty} E[B(t)] = \lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}$$

$B(t)$

$\{B(t)>x\}$

4) $$\lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t 1_{\{B(u)>x\}}\,du]}{t} = \frac{\int_x^\infty (1-G(u))\,du}{\tau}$$

5) $$H(t) = P(B(t)>x) = D(t) + \int_0^t D(t-u)\, dM_G(u) = (1-G(t+x)) + \int_0^t (1-G(t-u+x))\, dM_G(u)$$

6) $$\lim_{t\to\infty} P(B(t)>x) = \frac{\int_x^\infty (1-G(u))\,du}{\tau}$$

Ορισμός

$X \geq 0$ τ.μ. με σ.κ. $G(x)$ και $E[X]=\tau$ $Var[X]=\sigma^2$

Ορίζουμε:

$$G_e(x) = \frac{\int_0^x (1-G(u))\,du}{\tau} = \lim_{t\to\infty} P(B(t)\leq x)$$

την κατανομή ισορροπίας.

$G_e(x)$: κατανομή σε τυχαία χρον. στιγμή ως το επόμ. γεγ.

Έχουμε: σ.κ. $\Rightarrow$ $G_e(x)$

σ.π.π. $\Rightarrow$ $g_e(x) = \frac{1-G(x)}{\tau}$

μέση τιμή $\Rightarrow$ $E[X_e] = \frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau} \geq \frac{\tau}{2} = \frac{E[X]}{2}$ (ισότητα για $\sigma=0$ $(X=c)$)

Μετ/σμός L-S $\Rightarrow$ $\tilde{G}_e(s) = \frac{1-\tilde{G}(s)}{\tau s}$

Ειδικές Περιπτώσεις

1) $X=c$ σταθερή $\Rightarrow$ $X_e \sim U(0,c)$ $\Rightarrow$ $g_e(x) = \begin{cases} 0, & x \geq c \\ 1/c, & 0 \leq x < c \end{cases}$

2) $X \sim Exp(\lambda)$ $\Rightarrow$ $\tilde{G}_e(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$ $\Rightarrow$ $X_e \sim Exp(\lambda)$

3) $X \sim Gamma(2,\lambda) \Rightarrow X_e$ → $Gamma(2,\lambda)$ με πιθ. $1/2$
→ $Exp(\lambda)$ με πιθ. $1/2$

$$\tilde{G}_e(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+s} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2.$$

4) $X \sim Gamma(n,\lambda) \Rightarrow X_e$ → $Gamma(n,\lambda)$ με πιθ. $1/n$
→ $Gamma(n-1,\lambda)$ με πιθ. $1/n$
⋮
→ $Gamma(1,\lambda)$ με πιθ. $1/n$.

Πρόταση (οριακή κατανομή του $A(t)$)

i) $\lim_{t\to\infty} P(A(t) \le x) = G_e(x)$

ii) $\lim_{t\to\infty} E(A(t)) = \dfrac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}$

Πρόταση (από κοινού κατανομή $A(t)$, $B(t)$).

$$\lim_{t\to\infty} P(A(t)>x,\ B(t)>y) = \int_{x+y}^{\infty} (1-G(u))\,du$$

Πρόταση (οριακή κατανομή του $C(t)$)

i) $\lim_{t\to\infty} P(C(t) \le x) = \dfrac{\int_0^x u\,dG(u)}{\tau}$

ii) $\lim_{t\to\infty} E[C(t)] = \dfrac{\tau^2+\sigma^2}{\tau}$

• Γενική Ανανεωτική Διαδικασία

$X_1, X_2, \dots$ ανεξ. τ' $X_1, X_2, \dots \ge 0$

$X_2, \dots$ ισον. δηλ. $X_1 \sim F(x)$ τ' $X_2, X_3, \dots \sim G(x)$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$: χρόνος n-οστού γεγονότος, $N(t)$ = # γεγ. ως τη στιγμή t

Τότε: $\{N(t)\}$ γεν. αναν. διαδ. με κατανομή χρόνου $1^{ου}$ γεγ. $F(x)$ και κατανομή ενδ. χρόνων $G(x)$.

Βασικοί Υπολογισμοί:
1) $F_{S_n}(x) = (F * G^{*(n-1)})(x)$
2) $p_n(t) = (F * G^{*(n-1)})(t) - (F * G^{*n})(t)$, $n \ge 1$
3) $M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (F * G^{*(n-1)})(t)$
4) $\tilde{F}_{S_n}(s) = \tilde{F}(s)\cdot\tilde{G}(s)^{n-1}$
5) $\tilde{p}_n(s) = \tilde{F}(s)\tilde{G}(s)^{n-1} - \tilde{F}(s)\tilde{G}(s)^n$, $n \ge 1$ / $\tilde{p}_0(s) = 1-\tilde{F}(s)$
6) $\tilde{M}(s) = \tilde{F}(s) / (1-\tilde{G}(s))$

- Επαναληπτικότητα - Παροδικότητα Ανανεωτικής Διαδικασίας

$F(\infty) = \lim_{x\to\infty}(F(x)) = P(X_1 < \infty)$

$G(\infty) = \lim_{x\to\infty}(G(x)) = P(X_i < \infty)$, $i \geq 2$

1) $F(\infty)\cdot G(\infty) = 1 \Rightarrow P(N(\infty)=\infty) = 1$

2) $F(\infty)\cdot G(\infty) < 1 \Rightarrow P(N(\infty)=\infty) < 1$

Ειδικά: (στην 2)) : $P(N(\infty)=n) = F(\infty)\cdot G(\infty)^{n-1}(1-G(\infty))$, $n\geq 1$

Έχουμε γεν. αναν. διαδ. με $F(\infty)\cdot G(\infty) = 1$

και $E[X_1] = \tau_F$, $Var[X_1] = \sigma_F^2 < \infty$

$E[X_i] = \tau$, $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$, $i \geq 2$

- Σ.Α.Θ. με αμοιβές στη γενική ανανεωτική διαδικασία

Ίδιο πλαίσιο, αλλά X_n: μήκος n-οστού κύκλου

R_n: αμοιβή » » $(=R(S_n)-R(S_{n-1}))$

(X_n, R_n) ανεξ. $\forall n\geq 1$, ισον. $\forall n \geq 2$ $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{r}{\tau}$

- Τεχνικό Λήμμα

$H(t)$ φραγμ. με $\lim_{t\to\infty} H(t) = \ell < \infty$ και $F(t)$ σ.κ.

Τότε: $\lim_{t\to\infty} \underbrace{(H*F)(t)}_{\int_0^t H(t-u)\,dF(u)} = \lim_{t\to\infty} H(t) = \ell$