Στοχαστικός Λογισμός, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ
Τελική εξέταση, 10 Ιουνίου 2026

Θέμα 1. (15 Βαθμοί) Εστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρα στο Ω και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}|X| < \infty$.

(α) Δίνεται ότι η X είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{G}$. Τι σημαίνει αυτό; Κάτω από αυτή την υπόθεση, υπολογίστε τη δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbf{E}(X \mid \mathcal{G})$ κάνοντας λεπτομερή απόδειξη του ισχυρισμού σας.

(β) Αν η X είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη, ποια είναι η $\mathbf{E}(X \mid \mathcal{G})$; Δώστε πλήρη αιτιολόγηση.

Θέμα 2. (20 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{P}(X_1 = -1) = \mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = 0) = 1/3$. Θέτουμε

$$S_0 := 0,$$
$$S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^+.$$

Επίσης, θεωρούμε τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_n := \sigma(\{X_1, \dots, X_n\})$ για $n \in \mathbb{N}^+$.

(α) Να δειχθεί ότι η ανέλιξη $(S_n^2 - (2/3)n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(β) Για $a \in \mathbb{N}^+$, θέτουμε $T := \inf\{n \in \mathbb{N} : |S_n| = a\}$. Να υπολογιστεί η μέση τιμή $\mathbf{E}(T)$.

Θέμα 3. (25 Βαθμοί) Έστω $(B_t)_{t\geq 0}$ τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown.

(α) Θέτουμε $X_t := B_t - tB_1$ για κάθε $t \in [0,1]$. Ποια η κατανομή της X_t για δεδομένο $t \in [0,1]$; Ποια η $\mathrm{Cov}(X_s, X_t)$ για $0 \leq s < t \leq 1$;

(β) Έστω $n \in \mathbb{N}^+$. Για κάθε $t > 0$, θέτουμε $I_t := \int_0^t B_r^{2n}\, dr$. Βρείτε σταθερά $a \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $I_t/t^a \overset{d}{=} I_1$ για κάθε $t > 0$.

(γ) Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα $X := \int_0^1 \sqrt{t} e^{B_t}\, dB_t$ είναι καλά ορισμένο και υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά του.

Θέμα 4. (25 Βαθμοί) Έστω $(B_t)_{t\geq 0}$ μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown και Φ η συνάρτηση κατανομής της $N(0,1)$. Θέτουμε

$$M_t := \Phi\left(\frac{B_t}{\sqrt{1-t}}\right)$$

για κάθε $t \in [0,1)$.

(α) Υπολογίστε το dM_t.

(β) Δείξτε ότι το όριο $M_1 := \lim_{t\to 1^-} M_t$ υπάρχει και υπολογίστε το.

(γ) Δείξτε ότι η $(M_t)_{t\in[0,1]}$ είναι martingale.

(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα το γράφημα της B να τέμνει το γράφημα της $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(t) := \sqrt{1-t}$.

Θέμα 5. (25 Βαθμοί) (α) Βρείτε μια λύση για τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = aX_t\, dt + \sigma\, dB_t, t \geq 0,$$
$$X_0 = x_0,$$

όπου $a, x_0 \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ δεδομένα. Είναι η λύση μοναδική;

[Υπόδειξη: Βρείτε το διαφορικό $d(e^{ct}X_t)$ και επιλέξτε κατάλληλο $c \in \mathbb{R}$.]

(β) Βρείτε μια λύση για τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dY_t = (2 + c\log Y_t)Y_t\, dt + 2Y_t\, dB_t, t \geq 0,$$
$$Y_0 = y_0,$$

όπου $y_0 > 0, c \in \mathbb{R}$ είναι δεδομένα.

[Υπόδειξη: Θέστε $Z_t := \log Y_t$ και υπολογίστε το διαφορικό dZ_t.]

Αν $Z \sim N(0,1)$, τότε η Z έχει πυκνότητα $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, x \in \mathbb{R}$ και ροπογεννήτρια $\mathbf{E}(e^{tZ}) = e^{t^2/2}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Αν η $(B_t)_{t\geq 0}$ είναι μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown, θεωρείται γνωστό ότι $\mathrm{Cov}(B_t, B_s) = \min\{s,t\}$ για κάθε $s, t \in [0, \infty)$.

Απαντήσεις

1. Θεωρία.

2. **(α)** Εδώ έχουμε $\mathbf{E}(X_1) = 0, \mathbf{E}(X_1)^2 = 2/3$, και η απόδειξη γίνεται όπως στην περίπτωση του συμμετρικού απλού τυχαίου περιπάτου στο $\mathbb{Z}$ (Παράδειγμα 3.2 στις σημειώσεις).

(β). Δείχνουμε εύκολα ότι ο T είναι χρόνος διακοπής. Έπειτα, για $r \in \mathbb{N}^+$ σταθερό, εφαρμόζουμε το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής για τον φραγμένο χρόνο διακοπής $T \wedge r$ και το martingale $M_n := S_n^2 - (2/3)n$. Δηλαδή $0 = \mathbf{E}(M_0) = \mathbf{E}(M_{T\wedge r})$, που γράφεται ως

$$\mathbf{E}(S_{T\wedge r}^2) = (2/3)\mathbf{E}(T \wedge r).$$

Το αριστερό μέλος είναι το πολύ a^2, ενώ το δεξί, για $r \to \infty$, έχει όριο $(2/3)\mathbf{E}(T)$ (από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης). Άρα $\mathbf{E}(T) < \infty$, που δίνει ότι $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$, και άρα $\lim_{r\to\infty} S_{T\wedge r}^2 = S_T^2 = a^2$ με πιθανότητα 1. Άρα, αν στην παραπάνω ισότητα πάρουμε $r \to \infty$ και στο αριστερό μέλος εφαρμόσουμε το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης, θα πάρουμε ότι $a^2 = (2/3)\mathbf{E}(T)$, επομένως $\mathbf{E}(T) = (3/2)a^2$.

3. **(α)** $X_t = B_t - t(B_t + B_1 - B_t) = (1-t)B_t + t(B_1 - B_t)$ και οι $B_t, B_1 - B_t$ είναι ανεξάρτητες. Κατά τα γνωστά, $X_t \sim N(\mu, \sigma^2)$ με $\mu = 0$ και $\sigma^2 = (1-t)^2 t + t^2(1-t) = t(1-t)$. Έπειτα, χρησιμοποιώντας τη διγραμμικότητα της συνδιακύμανσης,

$$\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \mathrm{Cov}(B_s, B_t) - t\mathrm{Cov}(B_s, B_1) - s\mathrm{Cov}(B_1, B_t) + st\mathrm{Cov}(B_1, B_1) = s - ts - st + st = s(1-t).$$

(β). Η ανέλιξη $W_s := B_{st}/\sqrt{t}, s \geq 0$ είναι τυπική κίνηση Brown. Στο ολοκλήρωμα που ορίζει την I_t, κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $s = r/t$. Έτσι,

$$I_t = t\int_0^2 B_{st}^{2n}\, ds = t^{n+1}\int_0^1 W_s^{2n}\, ds \stackrel{d}{=} t^{n+1} I_1.$$

4. **(α)** Μια χρήσιμη παρατήρηση (που βολεύει στις πράξεις αλλά δεν είναι απαραίτητη) είναι ότι η πυκνότητα της $N(0,1)$ ικανοποιεί τη σχέση $\phi'(x) = -x\phi(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $X_t := B_t/\sqrt{1-t}, t \in [0,1)$, η οποία είναι μια ανέλιξη Ito με

$$dX_t = (1-t)^{-1/2} dB_t + \frac{1}{2}(1-t)^{-3/2} B_t\, dt.$$

Έπειτα,

$$\begin{aligned} dM_t &= \phi(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2}\phi'(X_t)(dX_t)^2 = \phi(X_t)\, dX_t - \frac{1}{2} X_t \phi(X_t)(1-t)^{-1}\, dt \\ &= \phi(X_t)\Big\{dX_t - \frac{1}{2}X_t(1-t)^{-1}\, dt\Big\} = \phi(X_t)(1-t)^{-1/2}\, dB_t. \end{aligned}$$

Και συνεχίζουμε τη δικαιολόγηση κατά τα γνωστά.

(β) Το όριο ισούται με $\mathbf{1}_{B_1>0} + (1/2)\mathbf{1}_{B_1=0}$ (ο δεύτερος προσθεταίος είναι 0 με πιθανότητα 1).

5. (α) Θεωρία (Παράδειγμα 14.2).

(β). Δείχνουμε ότι η Z_t ικανοποιεί την

$$\begin{aligned} dZ_t &= cZ_t\, dt + 2\, dB_t, \\ Z_0 &= \log y_0, \end{aligned}$$

που είναι ειδική περίπτωση της εξίσωσης που λύσαμε στο (α).