

Στοχαστικός Λογισμός, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ
Ενδιάμεση εξέταση, 25 Απριλίου 2026

Θέμα 1. (25 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ένας χώρος πιθανότητας και $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ μια άλλη σ-άλγεβρα στο Ω .

(α) Δείξτε ότι αν η τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ανεξάρτητη από την \mathcal{G} και $\mathbf{E}|X| < \infty$, τότε $\mathbf{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbf{E}(X)$.

(β) Έστω $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{E}(X^2) < \infty, \mathbf{E}(Y^2) < \infty$. Δείξτε ότι

$$\mathbf{E}\{X \mathbf{E}(Y|\mathcal{G})\} = \mathbf{E}\{\mathbf{E}(X|\mathcal{G})Y\}.$$

Θέμα 2. (20 Βαθμοί) Έστω $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ διήθηση στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

(α) Ποιες απεικονίσεις ονομάζονται χρόνοι διακοπής ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$;

(β) Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ανέλιξη προσαρμοσμένη στην πιο πάνω διήθηση, με $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ για κάθε n . Αποφανθείτε ποιες από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι χρόνοι διακοπής.

(i) $T := \inf\{k \in \mathbb{N} : X_k > 0\}$, ($\inf \emptyset = \infty$)

(ii) $T + 1$,

(iii) $T - 1$.

Για όποιες είναι, δώστε απόδειξη. Για όποιες δεν είναι απαραίτητα, εξηγήστε το διαισθητικά.

Θέμα 3. (30 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{P}(X_1 = -1) = \mathbf{P}(X_1 = 1) = 1/2$. Θέτουμε

$$S_0 := 0,$$

$$S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^+.$$

Επίσης, θεωρούμε τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_n := \sigma(\{X_1, \dots, X_n\})$ για $n \in \mathbb{N}^+$.

Για κάθε $r \in \mathbb{Z}$, θέτουμε $T_r := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = r\}$.

(α) Να δειχθεί ότι η ανέλιξη $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(β) Για κάθε $a, b \in \mathbb{Z}$ με $a < 0 < b$, να υπολογιστεί η πιθανότητα $\mathbf{P}(T_a < T_b)$. Θεωρήστε ως δεδομένο το ότι $\mathbf{P}(T_a \wedge T_b < \infty) = 1$.

(γ) Να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(T_1 \geq 2k) = \mathbf{P}(T_1 \geq 2k + 1) \geq 1/(k + 1)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι $\mathbf{E}(T_1) = \infty$.

Θέμα 4. (30 Βαθμοί) Έστω $(B(t))_{t \geq 0}$ μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown.

(α) Ποια η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $Y := 3B(3) - B(2) - B(6)$;

(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή του ολοκληρώματος $Z := \int_0^1 B(t + 1)e^{B(t)} dt$.

(γ) Δείξτε με τη βοήθεια του ορισμού ότι η ανέλιξη

$$X(t) := \begin{cases} B(t) & \text{αν } t \in [0, 1], \\ 2B(1) - B(t) & \text{αν } t \in (1, \infty) \end{cases}$$

είναι τυπική κίνηση Brown.

Υπενθυμίζεται ότι αν $Z \sim N(0, 1)$, τότε $\mathbf{E}(e^{tZ}) = e^{t^2/2}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Να λυθούν όλα τα θέματα. Οι απαντήσεις να είναι αιτιολογημένες.

Άριστα είναι το 100.

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες. Καλή επιτυχία.

Απαντήσεις

2. (β) Χρόνοι διακοπής είναι οι $T, T + 1$, ενώ ο $T - 1$ δεν είναι απαραίτητα.

3. (γ) Για $k = 0$, το ζητούμενο ισχύει. Θεωρούμε λοιπόν ότι $k \in \mathbb{N}^+$. Ο T_1 μπορεί να πάρει τιμές μόνο περιττούς αριθμούς. Άρα

$$\mathbf{P}(T_1 \geq 2k) = \mathbf{P}(T_1 \geq 2k + 1) \geq \mathbf{P}(T_{-k} < T_1) = \frac{1}{k + 1}.$$

Έπειτα $\mathbf{E}(T_1) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(T_1 \geq j) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(T_1 \geq 2k + 1) \geq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty$.

4. (α) Θέτουμε $X_1 := B(2), X_2 := B(3) - B(2), X_3 := B(6) - B(3)$. Αυτές είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και

$$Y = 3(X_1 + X_2) - X_1 - (X_1 + X_2 + X_3) = X_1 + 2X_2 - X_3.$$

Από την τελευταία γραφή, έπεται ότι η Y ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά $2 + 4 + 3 = 9$.

(β)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Z) &= \int_0^1 \mathbf{E}\{(B(t+1) - B(t))e^{B(t)} + B(t)e^{B(t)}\} dt \\ &= \int_0^1 \mathbf{E}(B(t+1) - B(t))\mathbf{E}(e^{B(t)}) dt + \int_0^1 \mathbf{E}\{B(t)e^{B(t)}\} dt = 0 + \int_0^1 \sqrt{t}\mathbf{E}\{We^{\sqrt{t}W}\} dt. \end{aligned}$$

Στην τελευταία ισότητα θέσαμε $W := B(t)/\sqrt{t} \sim N(0, 1)$. Έπειτα, παραγωγίζουμε την $\mathbf{E}(e^{tW}) = e^{t^2/2}$ ως προς t και παίρνουμε $\mathbf{E}(We^{tW}) = e^{t^2/2}t$. Άρα

$$\mathbf{E}(Z) = \int_0^1 te^{t/2} dt = \dots$$