Σήμερα: κεφ. 14, 15

§ 14.4

$$dX_t = \mu(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dB_t \quad (*)$$

$$X_0 = x_0$$

Συνθήκες για ύπαρξη και μοναδικότητα

Θεώρημα (λύση στο $[0,T]$)

Έστω $T>0$ και υποθ. ότι $\exists\, K>0$ ώστε

① $|\mu(t,x)-\mu(t,y)|+|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \le K|x-y|$

② $|\mu(t,x)|+|\sigma(t,x)| \le K(1+|x|)$

$\forall\, t\in[0,T]$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$.

Τότε α) η $(*)$ έχει λύση που ορίζεται για $t\in[0,T]$

β) Αν X, Y είναι λύσεις στο $[0,T]$ τότε $P(X_t=Y_t \ \forall t\in[0,T])=1$

(δηλ. είναι μη διακρίσιμες)

(Η συνθήκη δεξιά λέει ότι οι μ, σ αυξάνουν το πολύ γραμμικά στο $\pm\infty$)

<u>Πόρισμα</u> Αν $\forall T>0$ $\exists K_T>0$ ώστε να ισχύουν οι (1),(2) (με $K=K_T$) $\forall t\in[0,T]$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$, τότε

α) Η $(*)$ έχει λύση που ορίζεται στο $[0,\infty)$

β) Αν X,Y λύσεις της $(*)$ στο $[0,\infty)$ τότε είναι μη <u>διακρίσιμες</u>

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(s,X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)\,dB_s$$

$$Y_t =$$

$$E|X_t - Y_t| = 0$$

$$X_t^{(0)} = x_0 \quad \forall t$$

έχοντας την $X_t^{(n)}$ ορίζουμε

$$X_t^{(n+1)} = x_0 + \int_0^t \mu(s, X_s^{(n)})ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)})dB_s$$

X_t X_s X_s

Δείχνει κανείς ότι η $(X_t^{(n)})_{t\in[0,T]}$ και

είναι ακολουθία βασική και συγκλίνει

σε συνεχή συνάρτηση στο $[0,T]$

Παράδειγμα 14.3 $dX_t = X_t^3 dt + X_t^2 dB_t$

$B =$ Τ.Κ.Β $X_0 = a \neq 0$

Λύση

$$\mu(t,x) = x^3, \quad \sigma(t,x) = x^2$$

Υπολογίζουμε το $d(X_t^r) =$

$$r X_t^{r-1} dX_t + \frac{1}{2} r(r-1) X_t^{r-2} (dX_t)^2$$

$$= r X_t^{r-1} dX_t + \frac{1}{2} r(r-1) X_t^{r-2} X_t^4 dt$$

$$= r X_t^{r+2} dt + r X_t^{r+1} dB_t$$

$$+ \frac{1}{2} r(r-1) X_t^{r+2} dt$$

$$= r \frac{(r+1)}{2} X_t^{r+2} dt + r X_t^{r+1} dB_t$$

Για $r = -1$

$$d(X_t^{-1}) = -dB_t$$

$$\Rightarrow \quad X_t^{-1} - a^{-1} = -\int_0^t dB_s = -B_t$$

$$X_t^{-1} = a^{-1} - B_t$$

$$X_t = \frac{1}{a^{-1} - B_t}$$

ορίζεται όταν $t: B_t \neq a^{-1}$

Έστω $\tau = \inf\{ s \geq 0 : B_t = a^{-1} \}$ $\in (0, \infty)$

Η X είναι λύση στο $[0, \tau)$

Δείξτε την 14.2

$X_0 = 0$

$$dX_t = 3X_t^{\frac{1}{3}}\,dt + 3X_t^{\frac{2}{3}}\,dB_t$$

Ή απλά η $X_t = (B_t - a)^3 \, 1_{B_t > a}$

είναι λύση.

Δεν έχουμε μοναδικότητα.

Άσκηση 14.3 Βρείτε μια λύση της

$$dX_t = dt + 2\sqrt{X_t}\,dB_t \quad (*)$$

$X_0 = 1$ $B =$ Τ.Κ.Β

λύση

Υποθ.: $X_t = f(B_t)$

Αν έχουμε λύση της μορφής $X_t = f(B_t)$

με $f \in C^2(\mathbb{R})$

$$dX_t = f'(B_t)\,dB_t + \frac{1}{2} f''(B_t)\,dt \qquad (**)$$

οι (*), (**) θα ήταν ίδιες αν

$$\frac{1}{2} f''(B_t) = 1$$

$$f'(B_t) = 2\sqrt{X_t} = 2\sqrt{f(B_t)}$$

Αρκεί
$$f''(x) = 2$$
$$f'(x) = 2\sqrt{f(x)}$$
$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = 2x + c \Rightarrow f(x) = x^2 + cx + d$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow d = 1 \qquad f(x) = x^2 + cx + 1$$

Επίσης
$$f' = 2\sqrt{f} \Rightarrow 2x + c = 2\sqrt{x^2 + cx + 1}$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4xc + c^2 = 4x^2 + 4cx + 4$$

$$c^2 = 4, \qquad c = \pm 2$$

$c=2$ $\quad f(x)=(x+1)^2$

η $f'=2\sqrt{f}$ ισχύει για $x\geq -1$

Άρα η $\quad X_t=f(B_t)=(B_t+1)^2$

είναι λύση ως τη στιγμή που

$B_t+1<0$

$\tau=\inf\{s: B_s=-1\}$

Η X λύση στο $[0,\tau)$

$$dX_t = 2(B_t+1)\,dB_t+\frac{1}{2}\,2\,dt$$

$$=2\sqrt{X_t}\,dB_t+dt$$

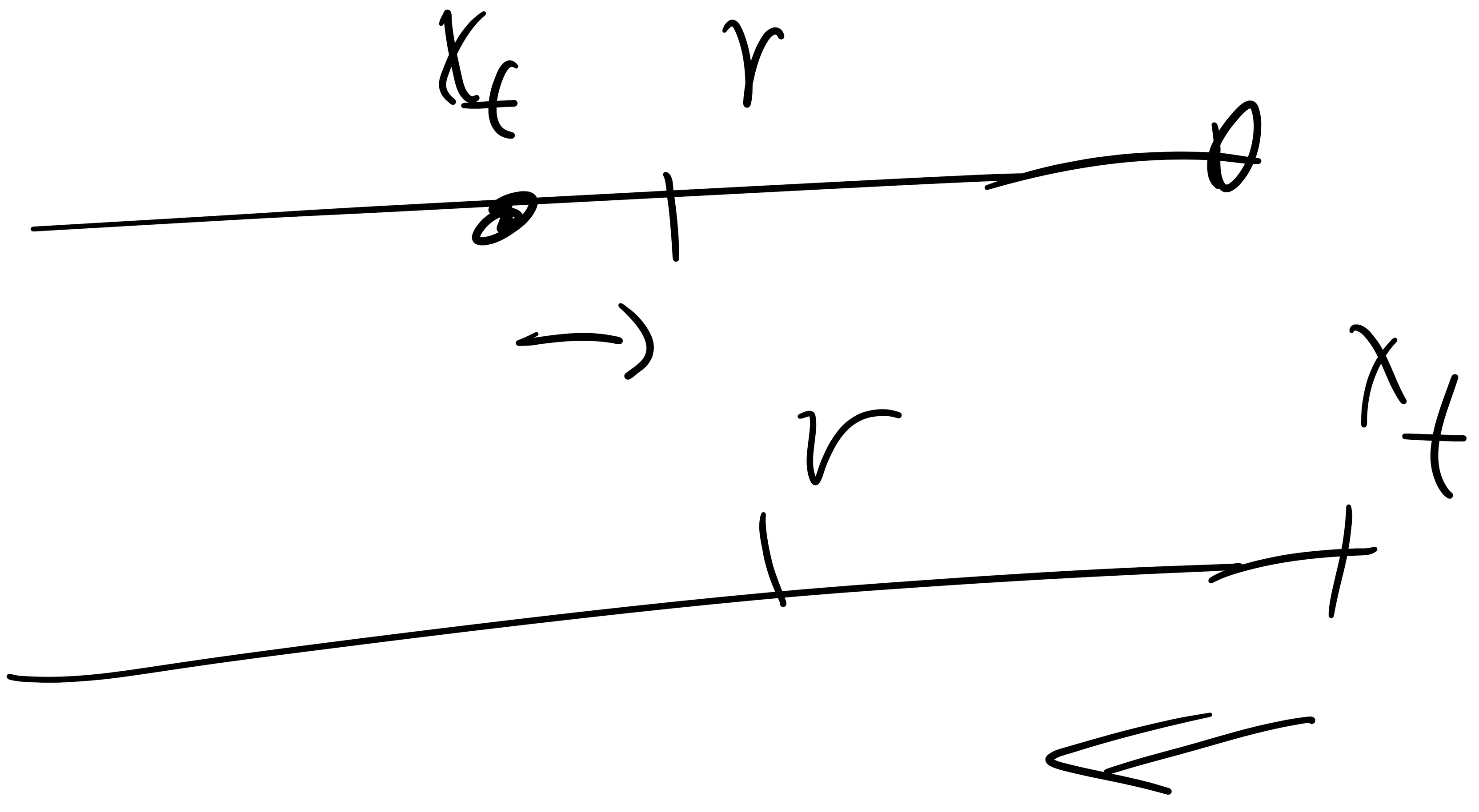
για $0\leq t\leq \tau$

παράδειγμα 14.2

$$dX_t = a(r-X_t)\,dt+\sigma\, dB_t$$

$X_0=x_0$ $\qquad B=$ Τ.Κ.Β

$r, x_0 \in \mathbb{R}, \quad a, \sigma > 0$



Itô

$$d(e^{ct} X_t) =$$

$$c e^{ct} X_t \, dt + e^{ct} dX_t + \underbrace{dX_t \, d(\ )}_{=0}$$

$$= e^{ct} \big(c X_t + a(r - X_t) \big) dt$$

$$+ e^{ct} \sigma \, dB_t$$

Take $c = a$ exact

$$d(e^{at} X_t) = a r e^{at} dt$$
$$+ \sigma e^{at} dB_t$$

$$\Rightarrow e^{at} X_t - X_0 = r(e^{at} - 1)$$
$$+ \sigma \int_0^t e^{as} dB_s$$

$$\Rightarrow \quad e^{at} X_t = x_0 + r\left(e^{at} - 1\right) + \sigma \int dB_s$$

$$X_t = r + (x_0 - r) e^{-at} + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} \, dB_s$$

$$\int_0^t e^{as} \, dB_s \sim N\left(0, \int_0^t \left(e^{as}\right)^2 ds\right)$$

$$\int_0^t \left(e^{as}\right)^2 ds = \frac{1}{2a}\left(e^{2at} - 1\right)$$

$$X_t \sim N\left(\overbrace{r + (x_0 - r) e^{-at}}^{\mu_t}, \ \sigma_t^2\right)$$

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 e^{-2at} \frac{1}{2a}\left(e^{2at} - 1\right) = \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2at}\right)$$

$\mu_t \to r$

$\sigma_t^2 \to \frac{\sigma^2}{2a}$ [illegible] $t \to \infty$

ϵ [illegible] $X_t \Rightarrow N(r, \frac{\sigma^2}{2a})$

[illegible] $t \to \infty$

$X_t =$ [illegible] Ornstein–Uhlenbeck

Κεφάλαιο 15   Ειδικές μορφές ΣΔΕ

§15.1

$$dX_t = \{\mu_1(t)X_t + \mu_2(t)\}dt + \{\sigma_1(t)X_t + \sigma_2(t)\}\, dB_t$$

$$X_0 = x_0$$

Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων

1) Βρίσκουμε μια λύση Y_t της "ομογενούς", δηλ. της

$$dY_t = \mu_1(t)Y_t\, dt + \sigma_1(t)Y_t\, dB_t$$

$$Y_0 = 1$$

2) Ψάχνουμε λύση της μορφής

$$X_t = Y_t Z_t$$

παίρνουμε εξίσωση για τη Z και

Τη λύνουμε

Βήμα 1

$$d(\log Y_t) = \frac{1}{Y_t}\, dY_t - \frac{1}{2}\,\frac{1}{Y_t^2}\,(dY_t)^2$$

$$= (\mu_1\, dt + \sigma_1\, dB_t) - \frac{1}{2}\,\sigma_1^2\, dt$$

$$= \left(\mu_1(t) - \frac{1}{2}\,\sigma_1^2(t)\right) dt + \sigma_1(t)\, dB_t$$

$$\log Y_t - \log Y_0 = \int_0^t \left(\mu_1(s) - \frac{1}{2}\sigma_1^2(s)\right) ds$$

$$+ \int_0^t \sigma_1(s)\, dB_s$$

$$Y_t = e^{\int_0^t (\quad) ds + \int_0^t \cdots\, dB_s}$$

Βήμα 2 Τι ικανοποιεί η Z_t?

$$Z_t = Y_t^{-1} X_t$$

$$dZ_t = d(Y_t^{-1})X_t + Y_t^{-1}\,dX_t$$

$$+ d(Y_t^{-1})\,dX_t$$

$$= \left(-\frac{1}{Y_t^2}\,dY_t + \frac{1}{Y_t^3}(dY_t)^2\right)X_t$$

$$+ Y_t^{-1}\left((\mu_1 X_t + \mu_2)\,dt + (\sigma_1 X_t + \sigma_2)\,dB_1\right)$$

$$+ d(Y_t^{-1}) \cdot dX_t$$

$$= \Big(-\frac{1}{Y_t^2}(\mu_1 Y_t\,dt + \underline{\sigma_1 Y_t\,dB_t})$$

$$+ \frac{1}{Y_t^3}\sigma_1^2 Y_t^2\,dt\Big)\,X_t$$

$$+ Y_t^{-1}(\qquad) + d(Y_t^{-1})\,dX_t$$

$$= (\underline{-\mu_1 Z_t\,dt} + \underline{\sigma_1^2 Z_t\,dt} - \underline{\sigma_1 Z_t\,dB_1})$$

$$+ \left(\mu_1 Z_t \, dt + \sigma_1 Z_t \, dB_t \right.$$

$$\left. + \mu_2 Y_t^{-1} \, dt + \sigma_2 Y_t^{-1} \, dB_t \right)$$

$$- \sigma_1 Y_t^{-1} (\sigma_1 X_t + \sigma_2) \, dt$$

$$= \left(\mu_2 Y_t^{-1} - \sigma_1 \sigma_2 Y_t^{-1} \right) dt$$

$$+ \sigma_2 Y_t^{-1} \, dB_t$$

$$\Rightarrow \quad Z_t = \ldots$$

§15.2 $dX_t = f(t, X_t) \, dt + \sigma(t) X_t \, dB_t$

§15.3 $f(t, B_t)$

π.χ. στην ασκ. 15.4

[illegible] $dX_t = -\frac{H}{1-t} X_t\,dt + dB_t$

$$X_t = (1-t)^H \int_0^t (1-s)^{-H}\, dB_s$$

$t<1$

$[0, T]$

$T<1$

$(B_t+1)^2$

[illegible] [illegible] 15.4, 15.3

[illegible] 15.3