Σήμερα: § 12.4

$d f(B_t)$ $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$d f(B_t, t)$ $\qquad f: \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$

'' $\qquad f: \mathbb{R}^d \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$d f(X_t)$ $\qquad f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

X_t ανέλιξη Itô

Ανέλιξη Itô

$(B_t)_{t\geq 0}$ m-διάστατη κ.Β. στο $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

ως προς την επαυξημένη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$

Η $X: [0,\infty)\times \Omega \to \mathbb{R}^d$ λέγεται

ανέλιξη Itô αν

$$dX_t = \underbrace{U(t,\omega)}_{\in \mathbb{R}^d}\, dt + \underbrace{V(t,\omega)}_{\in \mathbb{R}^{d\times m}} \cdot dB_t$$

X_0 $\mathcal{F}_0$-μετρήσιμη

$$X_t = X_0 + \int_0^t U \, ds + \int_0^t V \cdot dB_t$$

- $U = (u^{(i)}(t,\omega))_{1 \le i \le d}$

προοδευτικά μετρήσιμες

$V = (v_{i,j}(t,\omega))_{1 \le i \le d, \; 1 \le j \le m}$

$v_{(i,j)}$ μετρήσιμες προσαρμοσμένες

- $\int_0^t |u^{(i)}(s,\omega)| \, ds, \int_0^t v_{(i,j)}^2(s,\omega) \, ds < \infty$

με πιθανότητα 1 $\forall t > 0$

$$dX_t = \underbrace{U(t,\omega)\,dt}_{\substack{\text{τμήμα τάσης} \\ \text{drift}}} + \underbrace{V(t,\omega) \cdot dB_t}_{\substack{\text{τμήμα διάχυσης} \\ \text{diffusion}}}$$

$$dB_t = \begin{pmatrix} dB_t^{(1)} \\ \vdots \\ dB_t^{(m)} \end{pmatrix}$$

Κανόνες για γινόμενα διαφορικών

$dt,\ dB_t^{(i)},\ dB_t^{(j)} \qquad i \neq j$

	dt	$dB_t^{(i)}$	$dB_t^{(j)}$
dt	0	0	0
$dB_t^{(i)}$	0	dt	0
$dB_t^{(j)}$	0	0	dt

$$(dB_t^{(j)})^2 = dt$$

$$\sum f(B_{t_{i-1}^{(n)}}) (B_{t_i^{(n)}} - B_{t_{i-1}^{(n)}})^2$$

$$\longrightarrow \int_0^t f(B_s)\, ds$$

$dB_t^{(i)}\, dB_t^{(j)} = 0$ σημαίνει

$$\sum_{r=1}^{k_n} f(B_{t_{r-1}^{(n)}}) (B^{(i)}_{t_r^{(n)}} - B^{(i)}_{t_{r-1}^{(n)}})(B^{(j)}_{t_r^{(n)}} - B^{(j)}_{t_{r-1}^{(n)}})$$

$\longrightarrow 0$ κατά πιθανότητα

$\forall f$ συνεχή

Παράδειγμα B d-διάστατη Κ.Β.

α) Η B είναι ανέλιξη Ito.

$$B_t = B_0 + \int_0^t I \cdot dB_s$$

$$\hookrightarrow = \int_0^t dB_s$$

$1_{[0,t]}$ $B_t - B_0$

β) $\begin{pmatrix} B_t \\ t \end{pmatrix}$ είναι $(d+1)$-διάστατη ανέλιξη Ito

$$d\begin{pmatrix} B_t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dB_t \\ dt \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{d\times 1} dt$$

$$+ \underbrace{\begin{pmatrix} \overset{d\times d}{I} \\ \underset{1\times d}{0} \end{pmatrix}}_{(d+1)\times d} \underbrace{dB_t}_{d\times 1} \hookrightarrow \begin{pmatrix} dB_t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Πρόταση (Τύπος Itô IV. Για ανελίξεις Itô)

$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$

X d-διάστατη ανέλιξη Itô

τότε

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \nabla f(X_s) \cdot dX_s$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 f(X_s)}{\partial x_i \partial x_j} dX_s^{(i)} \cdot dX_s^{(j)}$$

$$dX_s = \overset{\in \mathbb{R}^{d\times 1}}{U(s,\omega)}\, ds + \overset{d\times m}{V(s,\omega)}\, \overset{m\times 1}{dB_s}$$

$$dX_s^{(i)} = U^{(i)}(s,\omega)\,ds + \sum_{k=1}^{m} V_{i,k}\, dB_s^{(k)}$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το

$$d\left(e^{\int_0^t B_s dB_s} \right).$$

B μονοδιάστατη Κ.Κ.Β

Λύση

Θέλουμε $X_t = \int_0^t B_s \, dB_s$

είναι ανέλιξη Itô

$$dX_t = B_t \, dB_t$$

$$(dX_t)^2 = B_t^2 (dB_t)^2 = B_t^2 \, dt$$

$$f(x) = e^x$$

$$d f(X_t) = f'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)(dX_t)^2$$

$$= e^{X_t} B_t \, dB_t + \frac{1}{2} e^{X_t} B_t^2 \, dt$$

($\Rightarrow f(X_t)$ ανέλιξη Itô)

<u>Πρόταση</u> $(X_t)_{t\geq 0}$, $(Y_t)_{t \geq 0}$

συνεχείς ανελίξεις Itô.

Τότε $d(X_t Y_t) = dX_t \cdot Y_t + X_t \, dY_t + dX_t \, dY_t$

Απόδ

τότε $Z_t = \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix}$ θέτω

Η Z είναι ανέλιξη Itô.

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy \qquad f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ f \in C^2(\mathbb{R}^2)$$

$$X_t Y_t = f(Z_t) \qquad \left| \begin{array}{ll} f_x = y & f_{xx} = 0 \\ f_y = x & f_{yy} = 0 \\ f_{xy} = 1 & \end{array} \right.$$

$$d(X_t Y_t) = df(Z_t) = \frac{\partial f(Z_t)}{\partial x} dX_t$$

$$+ \frac{\partial f(Z_t)}{\partial y} dY_t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dX_t dY_t \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f(Z_t)}{\partial y \partial x} dY_t dX_t \right) = Y_t dX_t$$

$$+ X_t dY_t + \underline{1 \cdot dX_t dY_t}$$

<u>Πορ.</u> X_t, Y_t ανελ. Itô $\Rightarrow$ $X_t Y_t$ ανελ. Itô

Άσκηση $d(e^{tB_t}) = ;$

Λύση

1ος τρόπος

$f(B_t, t)$ με $f(x,t) = e^{tx}$

2ος τρόπος Η $X_t = tB_t$ είναι ανέλιξη

Itô. $dX_t = dt \cdot B_t + t\, dB_t + dt\, dB_t$

$= B_t\, dt + t\, dB_t$

$e^{tB_t} = f(X_t)$ με $f(x) = e^x$

$df(X_t) = f'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)(dX_t)^2$

$= e^{tB_t}(B_t\, dt + t\, dB_t) + \frac{1}{2} e^{tB_t} \underbrace{t^2\, dt}_{(t\, dB_t)^2}$

$= e^{tB_t}\left(B_t + \frac{t^2}{2}\right) dt$

$+ e^{tB_t}\, t\, dB_t$

Άσκηση B Γ.Κ.Β 1-d

$$Z_t = \frac{1}{\sqrt{1-t}} e^{-\frac{1}{2(1-t)} B_t^2}$$

$\forall\, t \in [0,1)$

α) Ν.δ. ότι Z_t martingale

β) Να γραφτεί στην μορφή

$$Z_t = e^{\int_0^t R_s \, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t R_s^2 \, ds}$$

για R κατάλληλης ανέλιξης

Λύση

α) $$dZ_t = \frac{1}{2(1-t)^{3/2}} dt \, e^{X_t} + \frac{1}{\sqrt{1-t}} d(e^{X_t}) + 0$$

$$X_t = -\frac{1}{2(1-t)} B_t^2$$

$$dX_t = -\frac{1}{2(t-1)^2}\,dt\,B_t^2$$

$$-\frac{1}{2(1-t)}\left(2B_t\,dB_t + dt\right)$$

$$= \left(-\frac{B_t^2}{2(t-1)^2} - \frac{1}{2(1-t)}\right)dt$$

$$-\frac{B_t}{1-t}\,dB_t$$

$$d(e^{X_t}) = e^{X_t}\,dX_t + \frac{1}{2}e^{X_t}(dX_t)^2$$

$$= e^{X_t}\,dX_t + \frac{1}{2}e^{X_t}\frac{B_t^2}{(1-t)^2}\,dt$$

Άρα

$$dZ_t = e^{X_t}\frac{1}{2}\frac{1}{(1-t)^{3/2}}\,dt$$

$$+\frac{1}{\sqrt{1-t}}\left(e^{X_t}\,dX_t+\frac{1}{2}e^{X_t}\frac{B_t^2}{(1-t)^2}\,dt\right)$$

$$=e^{X_t}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{(1-t)^{3/2}}+\frac{1}{2}\frac{B_t^2}{(1-t)^{5/2}}-\frac{B_t^2}{2(1-t)^{5/2}}-\frac{1}{2(1-t)^{3/2}}\right)dt$$

$$+\frac{1}{\sqrt{1-t}}\,e^{X_t}\,\frac{(-B_t)}{1-t}\,dB_t$$

$$=-\frac{B_t e^{X_t}}{(1-t)^{3/2}}\,dB_t$$

$\Rightarrow$ Z_t local martingale.

Για κάθε $T<1$, η Z είναι φραγμένη στο $[0,T]$

$$0 \le Z_t \le \frac{1}{\sqrt{1-T}} \quad \forall t \in [0,T]$$

$\Rightarrow (Z_t)_{t\in[0,T]}$ martingale $\forall T<1$.

$\Rightarrow (Z_t)_{t\in[0,1)}$ // .

(b) Apply Itô to $d(\log Z_t)$

$$\frac{1}{Z_t} dZ_t - \frac{1}{2} \frac{1}{Z_t^2} (dZ_t)^2$$

$$dZ_t = A_t \, dB_t$$

$$\underbrace{\frac{A_t}{Z_t}}_{=R_t} dB_t - \frac{1}{2} \frac{A_t^2}{Z_t^2} dt$$

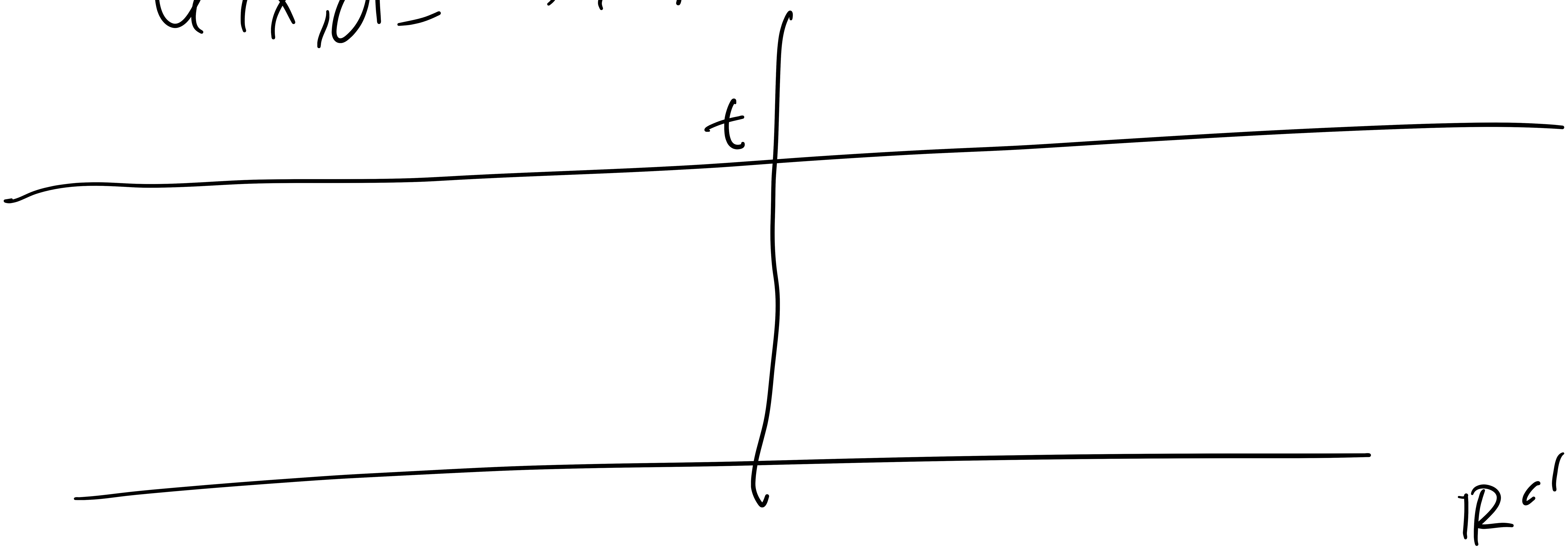
παράδειγμα (Αναπαράσταση λύσης της εξίσωσης θερμότητας)

Έστω $u : \mathbb{R}^d \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))$ φραγμένη σε κάθε $\mathbb{R}^d \times [0,T]$ $\forall T>0$

και ικανοποιεί

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta_x u \qquad (x,t)\in \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d$$



Έστω t σταθερό.

α) $M_s = u(B_s, t-s)$, $s \in [0,t]$

είναι martingale

Απόδ.

$$X_s = \begin{pmatrix} B_s \\ t-s \end{pmatrix} \quad \text{ικλ. } \underline{\text{Itô}}$$

$$M_s = u(X_s) \qquad dX_s = \begin{pmatrix} dB_s \\ -ds \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow dM_s = \nabla_x u \cdot dB_s + \frac{\partial u}{\partial s}(-ds)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d+1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dX_s^{(i)} dX_s^{(j)}$$

$$= \nabla_x u \cdot dB_s - \frac{\partial u}{\partial s} ds + \frac{1}{2} \Delta_x u \, ds$$

$$= \nabla_x u(X_s) \cdot dB_s$$

$\Rightarrow$ M_s local martingale

Αν υποθέσω $(M_s)_{s \in [0,t]}$ φραγμένη

$\Rightarrow$ martingale

θ) $u(x,t) = E_x f(B_t)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall t > 0$

(Σημαίνει ότι $B_0 = x$)

Απόδ.

Θεωρώ B κίνηση Brown με $B_0 = x$

$(M_s)_{s\in[0,t]}$ martingale | $B_t = x + W_t$, W τ.κ.Β.

$E M_0 = E M_t \Rightarrow$

$E\, u(x,t) = E(u(B_t, 0))$

$= E f(B_t)$

$\Rightarrow u(x,t) = E_x f(B_t)$

$= E(f(x + W_t))$.

$= E(f(x + \sqrt{t} Z))$

$Z \sim N(0,1)$

Για $d = 1$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x+\sqrt{t}\,z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$y = x + \sqrt{t}\,z \qquad dz = \frac{1}{\sqrt{t}} dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-x)^2}{t}} dy$$