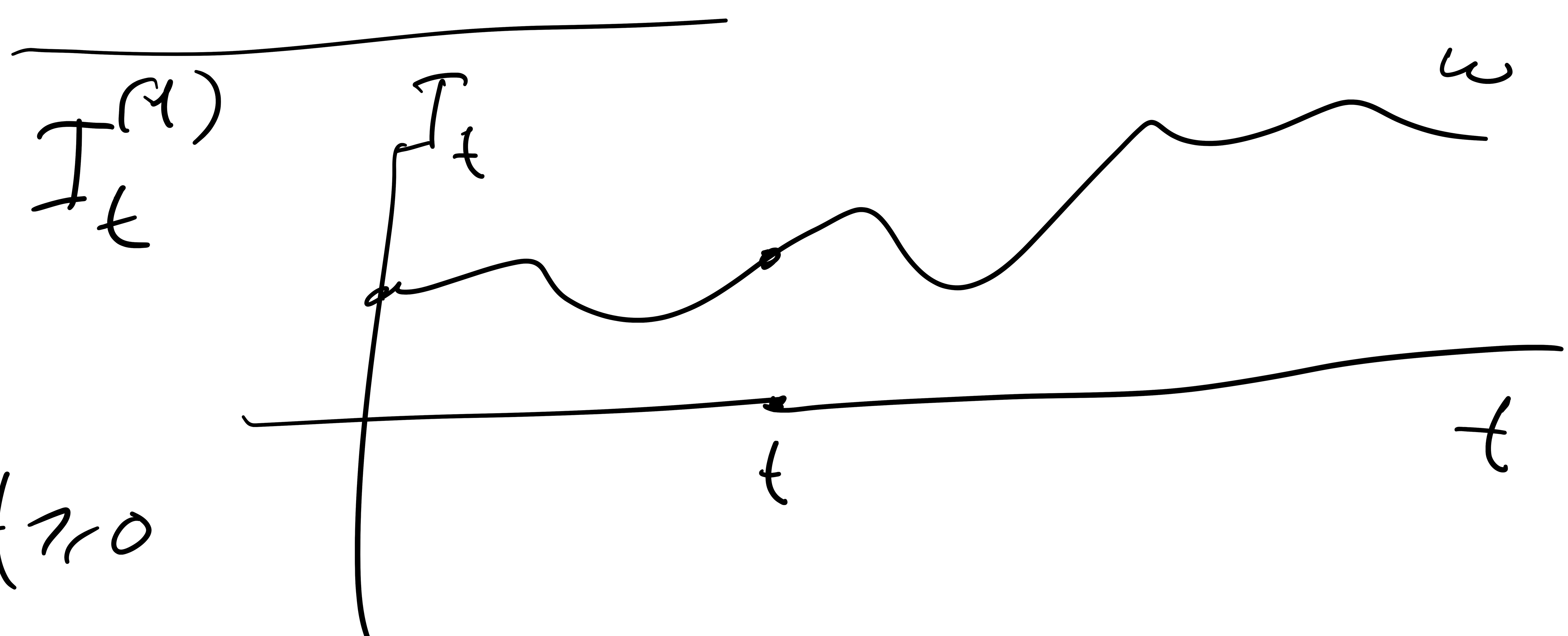
Σήμερα: Μεθ. 10, 11

$X \in \mathcal{H}_0^2$. Τότε η $\left(\int_0^t X(s,\omega)\, dB_s\right)_{t \geq 0}$ είναι συνεχής martingale.

Όταν $X \in \mathcal{H}^2$;

$\forall\, t \geq 0$ $I_t = \int_0^t X\, dB_s$ στοιχείο του $L^2(\Omega)$



$\left(I_t^{(1)}(\omega)\right)_{t \geq 0}$

επιλογή της $(I_t)_{t \geq 0}$

Θεώρημα Αν $X \in \mathcal{H}^2$, τότε η $(I_t)_{t \geq 0}$

έχει συνεχή εκδοχή. Επίσης, αυτή η εκδοχή είναι martingale.

Αυτή η εκδοχή είναι ουσιαστικά μοναδική. Δηλ. αν $I_t^{(1)}, I_t^{(2)}$ είναι δύο συνεχείς εκδοχές, τότε

$$P(\{\omega : I_t^{(1)}(\omega) = I_t^{(2)}(\omega) \ \forall t \geq 0\}) = 1$$

Δηλ. οι $I_t^{(1)}, I_t^{(2)}$ είναι μη διακρίσιμες

$$\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{[0,\infty)}$$

Αυτό γιατί οι $I_t^{(1)}, I_t^{(2)}$ έχουν συνεχή μονοπάτια και η μία είναι τροποποίηση της άλλης. Δηλ. $\forall t$

$$P(\{\omega : I_t^{(1)}(\omega) = I_t^{(2)}(\omega)\}) = 1$$

Έτσι επίσης, για $X \in \overline{\mathcal{H}^2}$,

$$\left(\int_0^t X(s,\omega)\, dB_s\right)_{t \geq 0}$$

θα δηλώνει τη συνεχή εκδοχή της.

Πιο πάνω, αντί $X \in \mathcal{H}^2$ αρκεί να έχουμε X μετρήσιμη, προσαρμοσμένη και

$$E\left(\int_0^t X^2(s,\omega)\,ds\right) < \infty \quad \forall t > 0$$ (*)

Άσκηση 10.2

Έστω X με τις ιδιότητες (*), + η X προοδευτικά μετρήσιμη. Θέτουμε

$$Y_t = \left(\int_0^t X(r,\omega)\,dB_r\right)^2 - \int_0^t X^2(r,\omega)\,dr$$

$\forall t > 0$.

Ν.δ. ότι η Y είναι συνεχές martingale

Λύση

Με π.Θ.1 η $(t \longmapsto Y_t)$ είναι συνεχής...

- Y_t προσαρμοσμένη γιατί $\int_0^t X\,dB_s$ είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη όπως και η $\int_0^t X^2(r,\omega)\,dr$

• $|Y_t| \le \left(\int_0^t \quad \right)^2 + \int_0^t X^2(r,\omega)\,dr$

$$E|Y_t| \le E\left(\left(\int_0^t X(r,\omega)\,dB_r\right)^2\right) + E\left(\int_0^t X^2(r,\omega)\,dr\right)$$

isom. Itô

$$= E\left(\int_0^t X^2(r,\omega)\,dr\right) + E\left(\int_0^t X^2(r,\omega)\,dr\right)$$

$$< \infty$$

• ~~Go~~be $0 < s < t$. Tot

$$Y_t - Y_s = \left(\int_0^s X\,dB_r + \int_s^t X\,dB_r\right)^2 - \int_0^t X^2\,dr$$

$$- \left(\int_0^s X\,dB_r\right)^2 + \int_0^s X^2\,dr$$

$$= \left(\int_s^t X\,dB_r\right)^2 + 2\int_0^s X\,dB_r \int_s^t X\,dB_r$$

$$- \int_s^t X^2\,dr$$

$E(Y_t - Y_s \mid \mathcal{F}_s) =$ $\qquad$ $\mathcal{F}_s$-μετρ.

$$E\left(\left(\int_s^t X\,dB_r\right)^2 \Big| \mathcal{F}_s \right) + 2\int_0^s X\,dB_r \underbrace{E\left(\int_s^t X\,dB_r \Big| \mathcal{F}_s\right)}_{=0}$$

$$- E\left(\int_s^t X^2\,dr \Big| \mathcal{F}_s\right)$$

προτ. 9.12

$= 0$

<u>Παρατ.</u> Αν $X = 1$ και B 1.Κ.Β τότε

$$Y_t = \left(\int_0^t 1\,dB_r\right)^2 - \int_0^t 1\,dr$$

$$= (B_t - B_0)^2 - t = B_t^2 - t$$

<u>Άσκηση</u> Έστω B 1.Κ.Β

και $X(s,\omega) = e^{B_s^2}$ $\forall s \geq 0, \forall \omega \in \Omega$

Για ποια $t > 0$ ισχύει $X|_{[0,t]\times\Omega} \in \mathcal{H}^2[0,t]$;

(Δηλ. για ποια t ορίζεται το
$$\int_0^t e^{B_s^2}\,dB_s \;;$$
)

Λύση

Η X είναι μετρήσιμη και προσαρμοσμένη (Δείτε άσκηση 4.12)

Η $X 1_{[0,t]\times\Omega} \in \mathcal{H}^2[0,t]$ αν είναι πεπερασμένο το

$$A_t = E\left(\int_0^t X^2(r,\omega)\,dr\right) = E\left(\int_0^t e^{2B_r^2}\,dr\right)$$

$$= \int_0^t \underbrace{E\left(e^{2B_r^2}\right)}_{B_r \overset{d}{=} \sqrt{r}\,B_1} dr = \int_0^t E\left(e^{2rZ^2}\right) dr$$

με $Z \sim N(0,1)$

$$E\left(e^{2rZ^2}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{2rx^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2 \underbrace{\left(\frac{1}{2} - 2r\right)}}\,dx$$

$$\frac{1}{2} - 2r \leq 0$$

Αν $\frac{1}{2} - 2r \leq 0$, $E(e^{2rZ^2}) = \infty$.

Αν $a = \frac{1}{2} - 2r > 0$, τότε

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2 a} \, dx = \sqrt{\pi \frac{1}{a}}$$

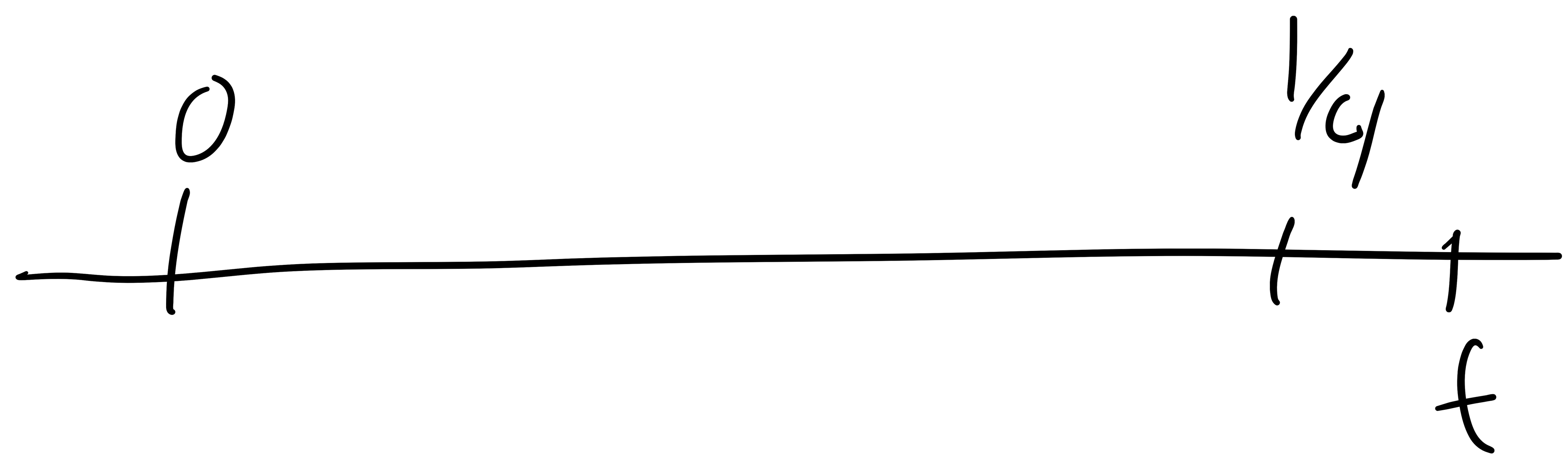
$$\left(\int e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{2\pi\sigma^2} \quad \forall \sigma > 0 \right)$$

οπότε $E(e^{2rZ^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2} - 2r}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-4r}}$$

$$A_t = \int_0^t E(e^{2rZ^2}) \, dr$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \infty & \text{αν } r \geq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{1-4r}} & \text{αν } r < \frac{1}{4} \end{cases}$$



$A_t = \infty$ αν $t > \frac{1}{4}$

Για $t = \frac{1}{4}$

$$A_{\frac{1}{4}} = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-4r}}\, dr < \infty$$

Άρα η $X|_{[0,t]\times\Omega} \in \mathcal{H}^2[0,t]$

αν και μόνο αν $t \leq \frac{1}{4}$

και τότε μόνο ορίζεται το $\int_0^t e^{B_r^2}\, dB_r$

Τώρα επεκτείνουμε τον ορισμό.

$$\dots P\left(\int_0^t X^2(s,\omega)\, ds < \infty \right) = 1$$

$$\mathcal{H}^2_{Loc} = \Big\{ X : [0,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R} \;\Big|\; X \text{ μετρήσιμη προσαρμοσμένη}$$

$$\text{και } \forall t>0,\ P\Big(\int_0^t X^2(s,\omega)\,ds < \infty\Big) = 1 \Big\}$$

Για $X \in \mathcal{H}^2_{Loc}$ μπορεί να οριστεί με κάποιο τρόπο το $\int_0^t X(s,\omega)\,dB_s$ $\forall t>0$.

§ 4.3. Local martingale

$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ διήθηση στον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Τυχαία ανέλιξη $(X_t)_{t\geq 0}$ λέγεται local martingale αν υπάρχει αύξουσα ακολ. χρόνων διακοπής $(\tau_n)_{n\geq 1}$ ώστε

i) $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$ με π.β. 1.

ii) $\forall n\geq 1$ η $(X_{t\wedge \tau_n})_{t\geq 0}$ είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$

$$X_t = \lim_{n\to\infty} \underbrace{X_{t\wedge \tau_n}}_{\mathcal{F}_t\text{-μετρήσιμη}}$$

X martingale $\Rightarrow$ X local martingale

$\not\Leftarrow$

$(|X_t(\omega)| \leq M \ \forall t\geq 0)$

<u>Πρόταση</u> Αν $(X_t)_{t\geq 0}$ φραγμένο local martingale, τότε είναι martingale.

Απόδ.

X_t προσαρμοσμένη

$|X_t| \leq M \Rightarrow E|X_t| < \infty$

Έστω τώρα $0 < s < t$

Θέλουμε $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$

έστω $(\tau_n)_{n\geq 1}$ όπως στον ορισμό του local martingale.

$(X_{t\wedge\tau_n})_{t\geq 0}$ martingale $\forall n\geq 1$

$$E(X_{t\wedge\tau_n} \mid \mathcal{F}_s) = X_{s\wedge\tau_n}$$

↳ X_t ↳ X_s για $n\to\infty$

$$X_s = \lim_{n\to\infty} X_{s\wedge\tau_n} = \lim_{n\to\infty} E(\quad \mid \mathcal{F}_s)$$

Θ.Κ.Σ

$$= E(\lim_{n\to\infty} X_{t\wedge\tau_n} \mid \mathcal{F}_s) = E(X_t \mid \mathcal{F}_s)$$

↳ γιατί $|X_{t\wedge\tau_n}| \leq M$

εναλλακτικά, θέλουμε

$$\int_A X_t \, dP = \int_A X_s \, dP$$

$\forall A\in \mathcal{F}_s$

Έχουμε
$$\int_A X_{t\wedge \tau_n}\, dP = \int_A X_{s\wedge \tau_n}\, dP$$

Θ.Κ.Σ $\Longrightarrow$
$$\int_A X_t \, dP = \int_A X_s \, dP$$

Δείτε άσκηση 4.8

Για $X \in \mathcal{H}^2_{Loc}$

$$\left(P\left(\int_0^t X^2(s,\omega)\, ds < \infty\right) = 1 \quad \forall t > 0 \right)$$

ορίζεται το $\int_0^t X(s,\omega)\, dB_s \quad \forall t > 0$

Η ανέλιξη $\left(\int_0^t X(s,\omega)\, dB_s\right)_{t>0}$ έχει συνεχή εκδοχή και αυτή η εκδοχή είναι local martingale.

$$\int_0^t e^{B_s^2}\, dB_s$$

Θεώρημα (προσέγγιση με αθροίσματα Riemann)

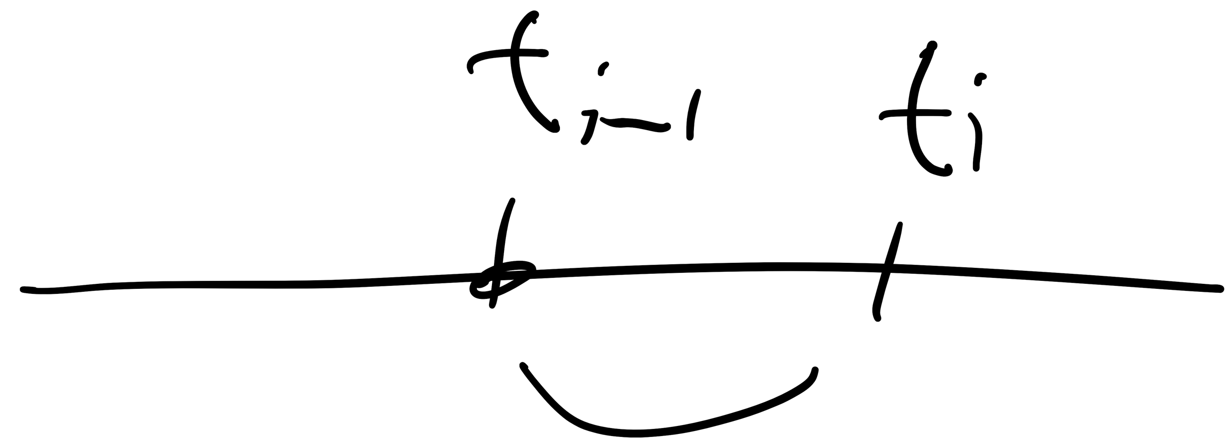
Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. B Κ.Β., $t > 0$

$D_n = \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} = t\}, n \geq 1$

διαμερίσεις του $[0,t]$ με $\|D_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Τότε

$$\int_0^t f(B_s)\, dB_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(B_{t_{i-1}^{(n)}})(B_{t_i^{(n)}} - B_{t_{i-1}^{(n)}})$$



κατά πιθανότητα.

Η $f(B_s) \in \mathcal{H}^2_{Loc}$ γιατί

$$\int_0^t f^2(B_s)\, ds < \infty$$ με πιθανότητα 1

$E\left(\int_0^t f^2(\ )\, ds\right) < \infty$ αν f φραγμένη

Η $\mathcal{H}^2[0,t)$ $f(B_s), s \in [0,t]$

$H^2_0[0,t)$