Δεσμευμένη μέση τιμή

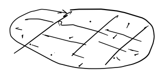
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$

$X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Ορ. Δεσμ. μέση τιμή της X ως προς τη $\mathcal{G}$ είναι οποιαδήποτε $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ με

i) Y είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη

ii) $$\int_A X\,dP = \int_A Y\,dP \quad \forall A \in \mathcal{G}$$



Ύπαρξη: Υποθ. $X \geq 0$

Θέτουμε $\nu : \mathcal{G} \to [0, \infty)$ $\nu(A) = \int_A X\,dP$

$\nu \ll P$, Θ. Radon-Nikodym $\exists\, Y : \Omega \to [0,\infty]$ $\mathcal{G}$-μετρήσιμη ώστε $\nu(A) = \int_A Y\,dP$ $\forall A \in \mathcal{G}$)

$(\Omega, \mathcal{G}, P)$ $\int_\Omega Y\,dP = \int_\Omega X\,dP < \infty$

$\nu(\Omega) = EX < \infty \Rightarrow P(Y < \infty) = 1$

Γενικά αν $X : \Omega \to \mathbb{R}$ $E|X| < \infty$

$X = X^+ - X^-$

$\exists\, Y_N, Y_P \geq 0$ .. για τις X^-, X^+

Θέτουμε $Y = Y_P - Y_N$. Είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη

Για $A \in \mathcal{G}$

$$\int_A Y\,dP = \int_A Y_P\,dP - \int_A Y_N\,dP = $$
$$= \int_A X^+\,dP - \int_A X^-\,dP = \int_A X\,dP$$

Οποιαδήποτε Y ικανοποιεί τα i, ii έχει $E|Y| < \infty$

- $\mathcal{G}$-μετρ
- $\int_A X\,dP = \int_A Y\,dP \quad \forall A \in \mathcal{G}$

$$EY^+ = \int Y \mathbb{1}_{Y>0}\,dP = \int_{\{Y>0\}} Y\,dP = \int_{\{Y>0\}} X\,dP$$

$$EY^- = -\int_{Y<0} Y\,dP = -\int_{\{Y<0\}} X\,dP$$

$$EY^- + EY^+ = \int_{Y>0} X\,dP - \int_{Y<0} X\,dP \leq \int_{Y>0} |X|\,dP + \int_{Y<0} |X|\,dP \leq \int |X|\,dP = E|X|$$

$$E|Y| \leq E|X|$$

Μοναδικότητα: Y_1, Y_2

- $\mathcal{G}$ - μετρ
- $\int_A X\,dP = \int_A Y\,dP \quad \forall A \in \mathcal{G}$

$$\int_A (Y_1 - Y_2)\,dP = 0 \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

Για $A := \{Y_1 > Y_2\}$ $\quad \int (Y_1 - Y_2) 1_A\,dP = 0$

$\Rightarrow 0 = P((Y_1 - Y_2) 1_A > 0) = P(A)$

Ομοια $P(Y_2 < Y_1) = 0$. $\quad P(Y_1 \neq Y_2) = 0$

$E(X | \mathcal{G})$

Παραδείγματα:

1) $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, $\quad X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Η $Y := E(X|\mathcal{G})$ είναι σταθερή, έστω c.

Για $A = \Omega$, πρέπει $\quad \int_\Omega c\,dP = \int_\Omega X\,dP$

$c = EX$

2) $\mathcal{G} = \mathcal{F}$. Τότε $E(X|\mathcal{F}) = X$

3) X ανεξ της $\mathcal{G}$ $\Big(\underline{\sigma(X)}, \underline{\mathcal{G}}$

$P(A \cap B) = P(A) P(B) \Big)$

$E(X|\mathcal{G}) = EX$

Η $c = EX$ είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη

για $A \in \mathcal{G}$ $\int_A X \, dP = E(X 1_A)$

$\overset{X \perp\!\!\!\perp 1_A}{=} EX \, E(1_A) = c P(A) = \int_A c \, dP$

X, Y $\sigma(X), \sigma(Y)$

$\sigma(X)$, $\{\emptyset, \Omega, A, A^c\} \subset \mathcal{G}$

4) $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{C})$, $\quad \mathcal{C} = \{A_i : i \in I\}$

αριθμ. διαμέριση του Ω

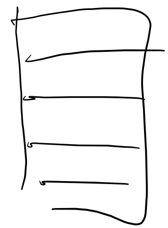
$E(X|\mathcal{G}) = \,;$

Ξέρουμε ότι $E(X|\mathcal{G})(\omega) = c_i \quad \forall\, \omega \in A_i$

$c_i : i \in I$ σταθερές

Πρέπει

$$\int_{A_i} X\, dP = \int_{A_i} E(X|\mathcal{G})\, dP = c_i P(A_i)$$



$$c_i = \frac{1}{P(A_i)} \int_{A_i} X\, dP$$

$$E(X|A) = \sum x P(X=x|A) = \sum \frac{x P(X=x, A)}{P(A)}$$

$E(X|\mathcal{G})(\omega) =$ η καλύτερη εκτίμηση για το $X(\omega)$ γνωρίζοντας την πληροφορία της $\mathcal{G}$ για το ω

Όταν $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ $\qquad X^{-1}(\{r\})$, $r \in \mathbb{R}$

$E(X|\mathcal{G})(\omega) = X(\omega)$ $\qquad \in \mathcal{G}$ $\qquad \omega \in X^{-1}(\{r\})$

$X(\omega) = r$

Ιδιότητες $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$

α) $E(E(X|\mathcal{G})) = EX$

β) X $\mathcal{G}$-μετρ. $\Rightarrow E(X|\mathcal{G}) = X$

$$\int_A X \, dP = \int_A E(X|\mathcal{G}) \, dP \quad A \in \mathcal{G}$$

Για $A = \Omega$ $\quad EX = E(E(X|\mathcal{G}))$

β) . . .

$X, Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \quad \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$

α) $E(aX + Y | \mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + E(Y|\mathcal{G})$

β) $X \geq 0 \Rightarrow E(X|\mathcal{G}) \geq 0$

γ) $X \leq Y \Rightarrow E(X|\mathcal{G}) \leq E(Y|\mathcal{G})$

Αποδ.

α) $Z = E(X|\mathcal{G})$, $\quad W = E(Y|\mathcal{G})$

$aZ + W$ είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη. Για $A \in \mathcal{G}$

$$\int_A (aZ + W) \, dP = a\int_A Z \, dP + \int_A W \, dP$$

$$= a\int_A X \, dP + \int_A Y \, dP = \int_A (aX + Y) \, dP$$

β) $Y = E(X|\mathcal{G})$

$A = \{Y < 0\} \in \mathcal{G}$

$$0 \geq \int_A Y\,dP = \int_A X\,dP \geq 0$$

$$\Rightarrow \int \underbrace{Y 1_A}_{\leq 0} dP = 0 \Rightarrow P(Y 1_A < 0) = 0$$

$P(A) = 0$

$Y - X \geq 0 \Rightarrow E(Y - X|\mathcal{G}) \geq 0 \Rightarrow$

$E(Y|\mathcal{G}) \geq E(X|\mathcal{G})$

<u>πρόταση</u> $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$

α) $E(E(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = E(X|\mathcal{G}_1)$

β) $E(\underbrace{E(X|\mathcal{G}_2)}_{Z}|\mathcal{G}_1) = E(X|\mathcal{G}_1)$

Αποδ.

α) $E(X|\mathcal{G}_1)$ είναι $\mathcal{G}_2$ - μετρήσιμη

β) $$\int_A E(X|\mathcal{G}_2)\,dP = \int_A X\,dP = \int_A E(X|\mathcal{G}_1)\,dP$$

$A \in \mathcal{G}_1$