Σήμερα: § 9.2, 9.3

Το ολοκλήρωμα Itô

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(B_t)_{t\geq 0}$ κ.Β

$\mathcal{F}_t^0 = \sigma(\{B_s : s\in[0,t]\})$, $t\geq 0$

$\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{F}_t^0 \cup \mathcal{N})$ η επαυξ. διήθηση

$\mathcal{H}_0^2$

$$X(t,\omega) = \sum_{i=1}^{n} A_i(\omega)\, 1_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \qquad (1)$$

$X : [0,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R}$

A_i $\mathcal{F}_{t_i}$-μετρ., $E(A_i^2)<\infty$

$0 \leq t_1 < \quad < t_{n+1}$

$$I(X) = \sum_{i=1}^{n} A_i(\omega)\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) \qquad (2)$$

↳ $\int_0^\infty X(t,\omega)\, dB_s$ το ολοκλήρωμα Itô της X ως προς την κίνηση Brown.

Ιδιότητες του I $\quad I: \mathcal{H}_0^2 \to L^2(P)$

1) (Γραμμικότητα) $X, Y \in \mathcal{H}_0^2$, $a \in \mathbb{R}$

$$I(aX+Y) = a\,I(X) + I(Y)$$

2) $X \in \mathcal{H}_0^2 \Rightarrow E(I(X)) = 0$

3) (Ισομετρία Itô)

$$E(I(X)^2) = E\left(\int_0^\infty X^2(t,\omega)\,dt\right)$$

Δηλ

$$\|I(X)\|_{L^2(P)} = \|X\|_{L^2(\lambda \times P)}$$

Αποδ.

1) ...

2) Έστω X όπως στην ①. Το $I(X)$ δίνεται στην ②.

$$E(I(X)) = \sum_{i=1}^{k} E\Big(\underbrace{A_i(\omega)\,(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})}_{\text{ορίζεται γιατί } A_i,\ B_{t_{i+1}}-B_{t_i} \in L^2(P)}\Big)$$

A_i είναι $\mathcal{F}_{t_i}$-μετρήσιμη

$B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_{t_i}$

$t \mapsto B(t+t_i) - B(t_i) \qquad t_{i+1} - t_i$

Aeu $E(A_i \cdot (\quad)) = E(A_i(\omega))\, E(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$

$= \;''\; \cdot 0 = 0$

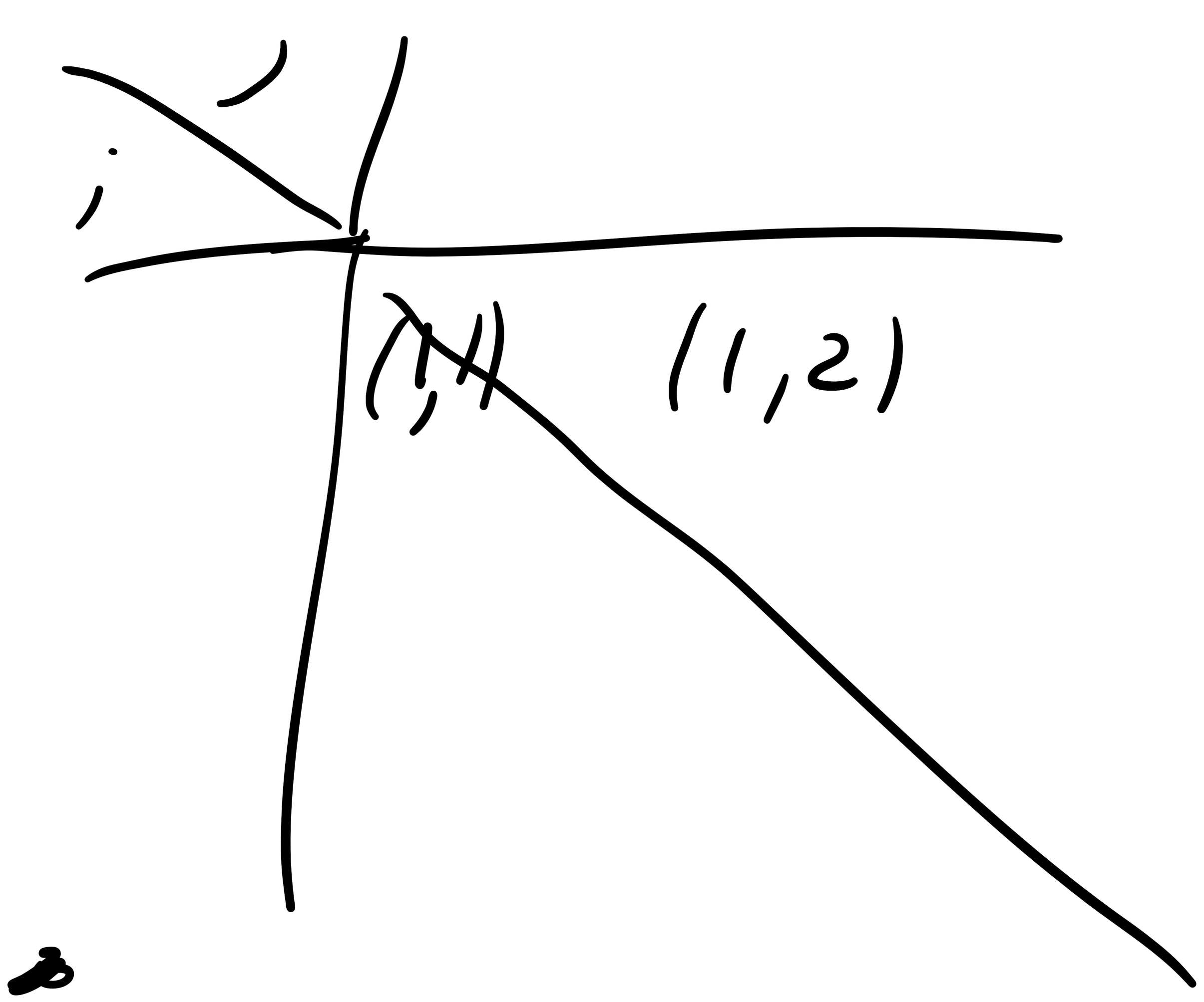
3) $X^2(t,\omega) = \sum_{i=1}^{n} A_i^2(\omega)\, 1_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$

$$\int_0^{\infty} X^2(t,\omega)\,dt = \sum_{i=1}^{n} A_i^2(\omega)\,(t_{i+1} - t_i)$$

$$E(\;''\;) = \sum_{i=1}^{n} E(A_i^2)\,(t_{i+1} - t_i)$$

$B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{t_i}$

$$I(X)^2 = \sum_{i,j=1}^{k} A_i(\omega) A_j(\omega)\, \Delta B_i\, \Delta B_j$$



$$= \sum_{i=1}^{k} A_i^2(\omega)\,(\Delta B_i)^2$$

$$+ 2 \sum_{i<j} A_i(\omega) A_j(\omega)\, \Delta B_i\, \Delta B_j$$

$A_i \perp\!\!\!\perp \Delta B_i$

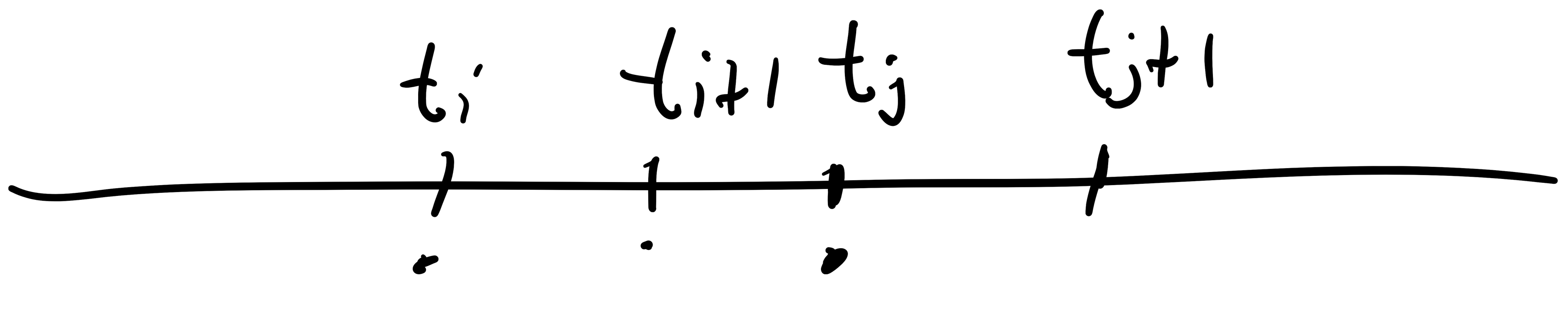
$$E(A_i^2 (\Delta B_i)^2) = E(A_i^2)\, E((\Delta B_i)^2) =$$

$$= E(A_i^2)(t_{i+1} - t_i)$$

Kul

$$E(\overbrace{A_i(\omega) A_j(\omega)\, \Delta B_i}^{\mathcal{F}_{t_j}\text{-измер.}}\; \overbrace{\Delta B_j}^{\perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{t_j}}) = E(\quad) \cdot E(\Delta B_j)$$

$= \cdots \cdot 0 = 0$



$$E(\underline{XY}) = \underline{EX}\,\underline{EY}$$

$$E(|\underbrace{A_i(\omega)\,\Delta B_i}\ \underbrace{A_j(\omega)}|) \le E(A_i^2(\omega)(\Delta B_i)^2)E(A_j^2)$$

$$= E(A_i^2)\,E((\Delta B_i)^2)\,E(A_j^2) < \infty$$

Άρα $$E(I(X)^2) = \sum_{i=1}^{k} E(A_i^2)\,(t_{i+1}-t_i)$$

$$= E\left(\int_0^\infty X(t,\omega)\,dt\right)$$

Επόμενο βήμα: επέκταση της I στον $\mathcal{H}^2$

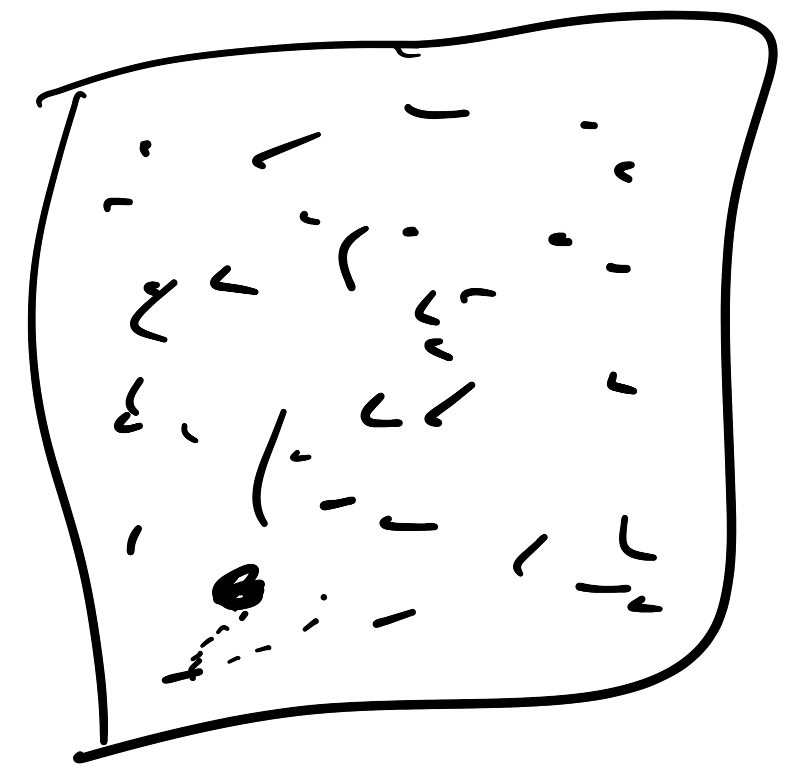
$X(t,\omega) : [0,\infty)\times \underline{\Omega} \to \mathbb{R}$

$X(t,\cdot)$ $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη $\forall t$

$$E\left(\int_0^\infty X^2(t,\omega)\,dt\right) < \infty \qquad \mathcal{H}^2 \subset L^2(\lambda\times P)$$

$$\| X \|^2_{L^2(\lambda\times P)}$$

Ισχύει ότι: ο $\mathcal{H}_0^2$ είναι πυκνός στον $\mathcal{H}^2$ $\qquad \mathcal{H}^2$



Για $X \in \mathcal{H}^2$, ποιο θα είναι το $I(X)$?

Βρίσκουμε κάποια $X_n \in \mathcal{H}_0^2$ ώστε

$X_n \xrightarrow{n\to\infty} X$ στην $\| \ \|_{L^2(\lambda\times P)}$ $\qquad I(X_n)$

Υποψήφιος για το $I(X)$ η τιμή

$$\lim_{n\to\infty} I(X_n)$$

$f(x)$

$q_n \to x$

$f(q_n) \to$ κάπου

Δύο θέματα

1) Υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} I(X_n)$;

2) Μήπως εξαρτάται από την επιλογή της (X_n) ;
προσέγγισης

1) Το όριο υπάρχει.

Η $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι βασική. Έχουμε

$$\| I(X_n) - I(X_m) \|_{L^2(P)} = \| I(X_n - X_m) \|_{L^2(P)}$$

$$= \| X_n - X_m \|_{L^2(\lambda\times P)} \xrightarrow{m,n\to\infty} 0$$

οπότε και η $(I(X_n))_{n\geq 1}$ βασική.

Ο $L^2(P)$ πλήρης. Άρα το $\lim_{n\to\infty} I(X_n)$ υπάρχει στον $L^2(P)$.

2) Έστω $(X_n), (Y_n)$ ακολουθίες στον $\mathcal{H}_0^2$ με $X_n \to X$, $Y_n \to X$

Ξέρουμε ότι $I(X_n) \to Z$, $I(Y_n) \to W$ για κάποιες $Z, W \in L^2(P)$.

Θεωρούμε την ακολουθία U_n ως εξής

$$X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots$$

$$\left(\begin{array}{ll} U_{2n} = Y_n & n \geq 1 \\ U_{2n-1} = X_n & n \geq 1 \end{array} \right)$$

$U_n \to X$. Πρέπει η $I(U_n)$ να συγκλίνει

Όμως $I(U_{2n}) \to W$

$I(U_{2n-1}) \to Z$ πρέπει $W = Z$

Ορίζουμε λοιπόν $I(X) = \lim_{n \to \infty} I(X_n)$

$$\int_0^\infty X(t,\omega)\, dB_t$$

Ιδιότητες: Για $X, Y \in H^2$ και $a \in \mathbb{R}$

1) $I(aX+Y) = aI(X) + I(Y)$

2) $E(I(X)) = 0$

3) Ισομετρία Itô.

$$E\left(\left(\int_0^\infty X(s,\omega)\,ds\right)^2\right) = E\left(\int_0^\infty X^2(s,\omega)\,ds\right)$$

Δηλ. $\|I(X)\|_{L^2(P)} = \|X\|_{L^2(\lambda\times P)}$

Απόδ.

1) $\mathcal{H}_0^2 \ni X_n \to X$ $\qquad aX_n + Y_n \to aX + Y$

$\mathcal{H}_0^2 \ni Y_n \to Y$

$$\begin{aligned} I(aX+Y) &= \lim_{n\to\infty} I(aX_n + Y_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(aI(X_n) + I(Y_n)\right) \\ &= aI(X) + I(Y) \end{aligned}$$

2) Έστω $X_n \in \mathcal{H}_0^2$ με $X_n \to X$ στην $L^2(\lambda\times P)$

τότε $I(X_n) \to I(X)$ στην $L^2(P)$

και άρα στην $L^1(P)$

$$\begin{aligned} &\left|\overbrace{E(I(X_n))}^{=0} - E(I(X))\right| \\ &= \left|E\left(I(X_n) - I(X)\right)\right| \\ &\le E\left|I(X_n) - I(X)\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

$\|W\|_{L^1(P)} \le \|W\|_{L^2(P)}$

$W_n \xrightarrow{L^1} W$

$EW_n \to EW$

3) $X_n \in \mathcal{H}_0^2$ με $X_n \to X$

Ξέρουμε ότι $\|I(X_n)\|_{L^2(P)} = \|X_n\|_{L^2(\lambda\times P)}$ (*)

- $\big|\,\|X_n\| - \|X\|\,\big| \le \|X_n - X\| \to 0$

  $\big|\,\|I(X_n)\| - \| \quad \|\,\big| \le \|I(X_n) - I(X)\| \to 0$

Για $n \to \infty$, η (*) γίνει το ζητούμενο.

Επόμενο: το $\int_a^b X(s,\omega)\,dB_s$. $\quad 0 \le a < b$

$\mathcal{H}_0^2[a,b]$

$\mathcal{H}^2[a,b]$

$X : [a,b] \times \Omega \to \mathbb{R}$ προσαρμοσμένες ($X(t,\cdot)$ είναι $\mathcal{F}_t$-μετρ. $\forall t \in [a,b]$)

$E\left(\int_a^b X^2(s,\omega)\,ds\right) < \infty$

Για $X \in \mathcal{H}^2[a,b]$ θεωρούμε την

$$\hat{X} \in \mathcal{H}^2 \text{ με } \hat{X}(t,\omega) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t \in [0,\infty) \setminus [a,b] \\ X(t,\omega) & \text{αν } t \in [a,b] \end{cases}$$

ορίζουμε $\int_a^b X(s,\omega)\,dB_s = \int_0^\infty \hat{X}(s,\omega)\,dB_s$

Παράδειγμα B τ.κ.Β. στο τόξ

$$\int_0^t B_s\, dB_s = \underbrace{\frac{1}{2} B_t^2}\ - \frac{1}{2}t$$

$$\int_0^t 2\, dB_s = 2(B_t - B_0) = 2B_t$$

$$\int_0^t g(s)\, dg(s) = \int_0^t g(s) g'(s)\, ds = \int_0^t \left(\frac{1}{2} g^2(s)\right)' ds$$

$$= \frac{1}{2} g^2(t) - \frac{1}{2} g^2(0)$$

$[0,t]$

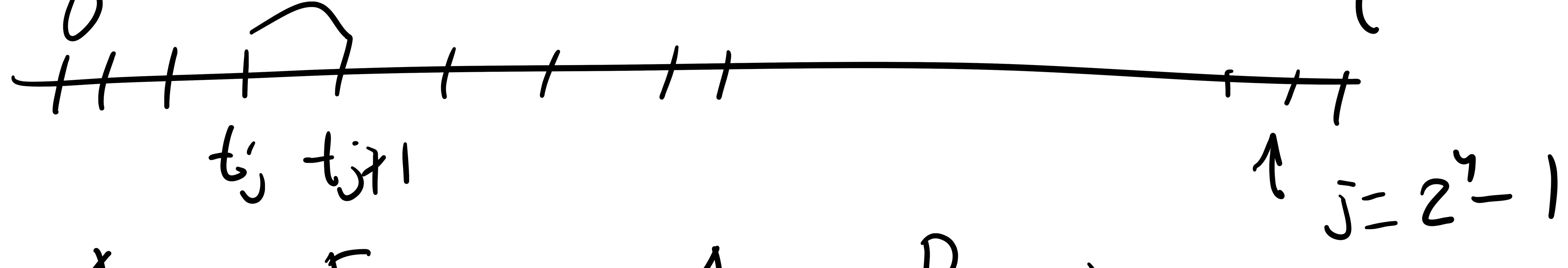
Έχουμε $\hat{X}(s,\omega) = \begin{cases} B_s & s \in [0,t] \\ 0 & s \geq t \end{cases}$

$\hat{X} \in H^2$ αφού είναι προσαρμοσμένη και

$$E\left(\int_0^\infty \hat{X}^2(s,\omega)\, ds\right) = E\left(\int_0^t B_s^2\, ds\right) =$$

$$= \int_0^t s\, ds = \frac{t^2}{2} < \infty$$

Για $n \in \mathbb{N}^+$ και $j \in \mathbb{N}$, θέτουμε $t_j^{(n)} = j\dfrac{t}{2^n}$



A_j $\quad \mathcal{F}_{t_j}$ $\quad A_j = B_{t_j^{(n)}}$

Θεωρούμε τη ακολουθία $(X_n)_{n\geq 1}$ με

$$X_n(s,\omega) = \sum_{j=0}^{2^n-1} B_{t_j^{(n)}} \, 1_{(t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}]}(s)$$

$X_n \in \mathcal{H}_0^2$

i) Δείξτε ότι $X_n \to \hat{X}$ στο $L^2(\lambda\times P)$

ii) Υπολογίσουμε το $\lim I(X_n)$

---

i) $$\|X_n - \hat{X}\|^2_{L^2(\lambda\times P)} = E\left(\int_0^\infty (X_n - \hat{X})^2 \, ds\right)$$

$$= E\left(\sum_{j=0}^{2^n-1} \int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}} (X_n - \hat{X})^2 \, ds\right)$$

$$= E\left(\sum_{j=0}^{2^n-1} \int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}} \left(B_s - B_{t_j^{(n)}}\right)^2 ds\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}} (s - t_j^{(n)}) \, ds = \sum_{j=0}^{2^n-1} \frac{(t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)})^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2^n-1} \left(\frac{t}{2^n}\right)^2 = \frac{t^2}{2} \frac{2^n}{2^{2n}} = \frac{t^2}{2\cdot 2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

(ii) $I(X_n) = \sum_{j=0}^{2^n-1} B_{t_j^{(n)}} \left(B_{t_{j+1}^{(n)}} - B_{t_j^{(n)}} \right)$

$x \qquad y \qquad x$

$(y-x)^2$

$y^2 - x^2$

$\underline{x(y-x)} = (x-y+y)(y-x)$

$= -(x-y)^2 + y(y-x)$

$\underline{x(y-x)} = (x+y-y)(y-x) = y^2 - x^2$

$- y(y-x)$

$2x(y-x) = y^2 - x^2 - (x-y)^2$

$$2I(X_n) = \sum_{j=0}^{2^n-1} \left(B^2_{t_{j+1}^{(n)}} - B^2_{t_j^{(n)}} \right) - \left(B_{t_{j+1}^{(n)}} - B_{t_j^{(n)}} \right)^2$$

$$B_t^2 - \underline{\sum (\qquad)^2}$$

$\to t$

$\sigma1\omega \; L^2(P)$

$2I(X_n) \to B_t^2 - t \quad \sigma1\omega \; L^2(P)$