Σήμερα: Ασκήσεις, § 8.3

Άσκηση 7.2 $\quad X(t) = x + B(t) + \mu t, \quad \mu > 0, \ t \geq 0$

$$T_r = \inf\{s \geq 0 : X(s) = r\}$$

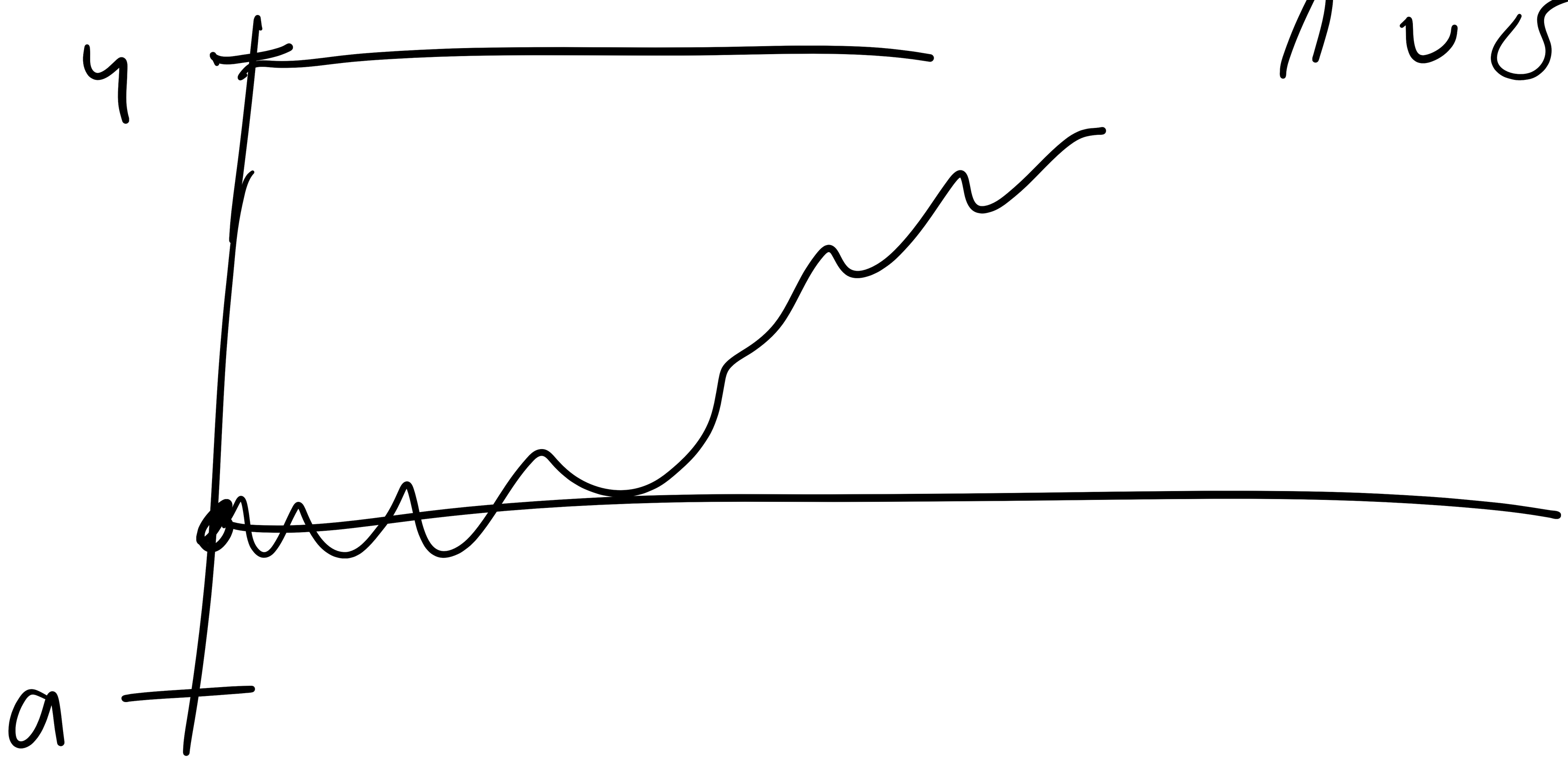
$$\varphi(r) = e^{-2\mu r} \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

$$P(T_a < T_b) = \frac{\varphi(b) - \varphi(x)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$$

(γ) Για $x = 0$ και $a < 0$

$$P(T_a < \infty) = e^{2\mu a}$$

Λύση

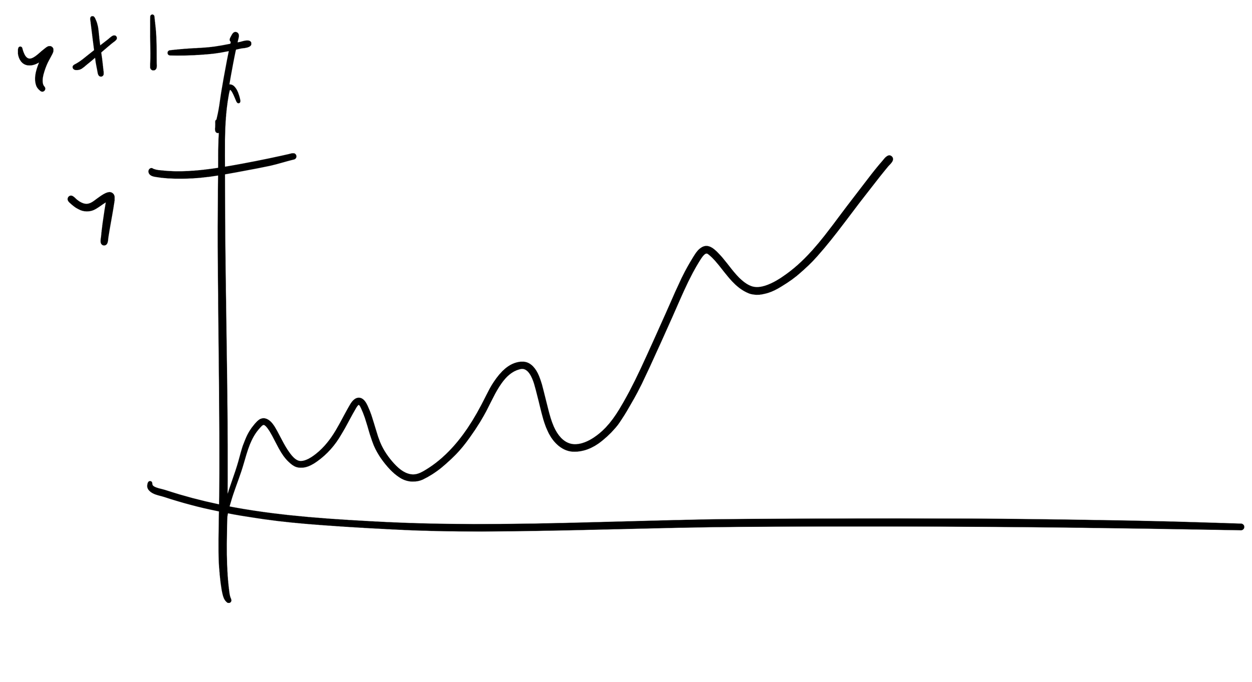


$\Omega_0 \subset \Omega$, $P(\Omega_0) = 1$

$\forall \omega \in \Omega_0 \quad t \mapsto B(t)(\omega)$ συνεχής

$$\{T_a < \infty\} \cap \Omega_0 = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{T_a < T_n\}\right) \cap \Omega_0$$

$\lim_{n \to \infty} T_n = \infty \quad \Leftarrow \quad \Big| \ P(T_n < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}) = 1$



$T_n \leq T_{n+1}$

Αν $\lim_{n \to \infty} T_n = c < \infty$

τότε $B([0,c])$ μη φραγμένο

Άτοπο

$$P(T_a<\infty)=\lim_{n\to\infty} P(T_a<T_n) \qquad \Big| \quad \varphi(v)=e^{-2\mu v}$$

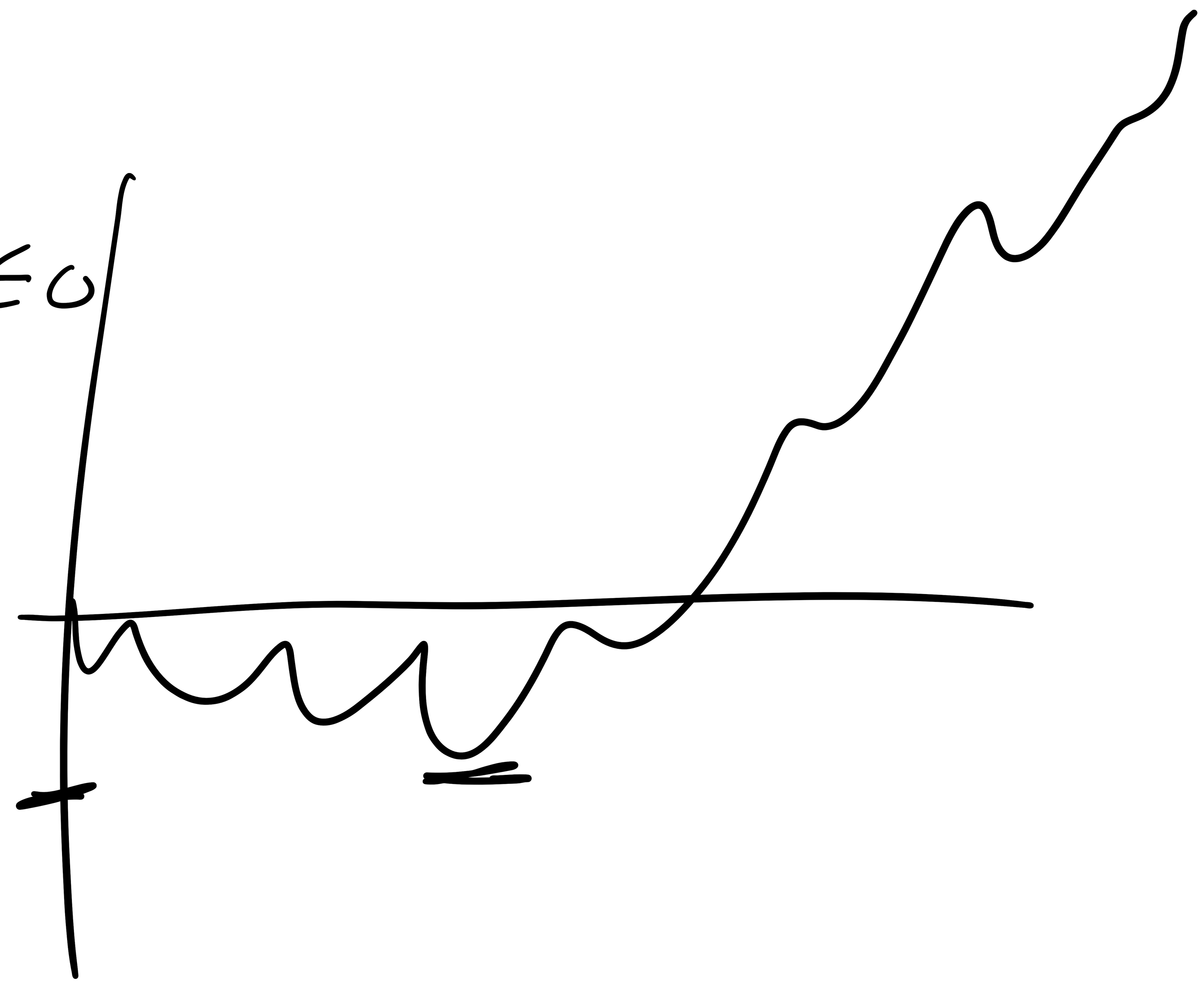
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\overset{\to 0}{\varphi(n)}-\varphi(0)}{\underset{\to 0}{\varphi(n)}-\varphi(a)}=\frac{\varphi(0)}{\varphi(a)}=e^{2\mu a}<1$$

(δ) $X=0$, $X(t)=B(t)+\mu t$

$R=\inf\{X(t);\ t\geq 0\}\leq 0$

Νδξ $-R\sim exp(2\mu)$

χ0σ



Για $t>0$

$$\left.\begin{aligned}P(-R<t)&=P(R>-t)\text{"="}P(T_{-t}=\infty)\\&=1-P(T_{-t}<\infty)=1-e^{-2\mu t}\end{aligned}\right\}$$

διάξιμο.

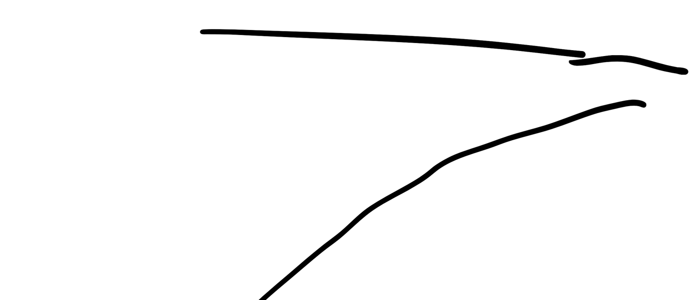
$$P(-R\leq t)=P(R\geq -t)\begin{cases}\leq P(T_{-t-\varepsilon}=\infty)\\ \geq P(T_{-t+\varepsilon}=\infty)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-e^{-2\mu(t+\varepsilon)}\\ 1-e^{-2\mu(t-\varepsilon)}\end{cases}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 1-e^{-2\mu t}$$

Άρα $P(-R\leq t)=1-e^{-2\mu t}$ $\forall t>0$

$F_{-R}(t)=1-e^{-2\mu t}$ $\forall t\geq 0$

$-R\sim exp(2\mu)$



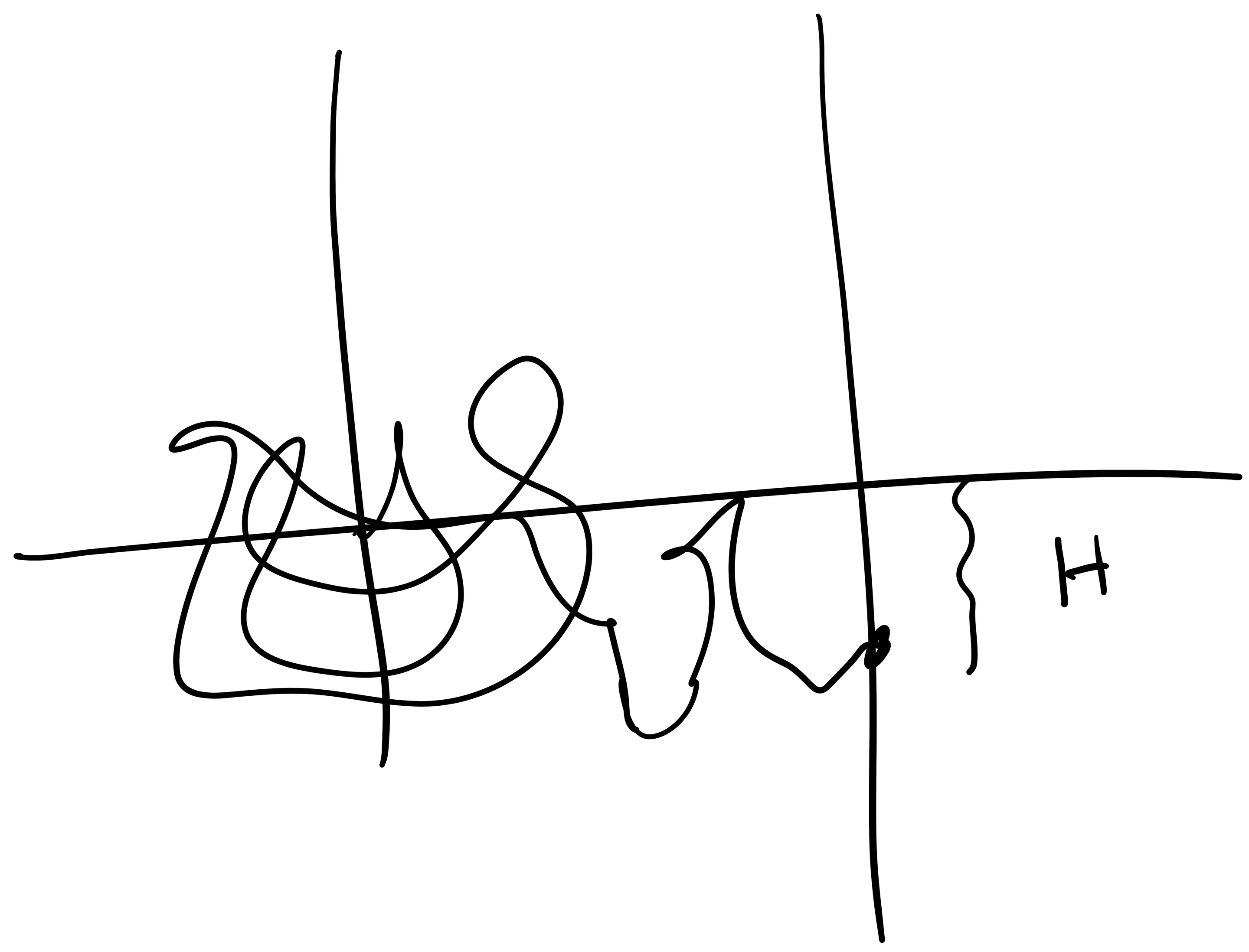
7.3 $B^{(1)}, B^{(2)}$ ανεξάρτητες τ. κ. B

$$T^a = \inf\{s \geq 0 : B^{(1)}(s) = a\} \qquad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$$

Ν.δ.ό. η τ.μ. $H = B^{(2)}(T^a)$ έχει χαρακτ. συνάρτηση

$e^{-|t||a|}$ ← Cauchy ⟶ $\frac{1}{\pi}\frac{|a|}{x^2+a^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ πυκνότητα

λύση



$h(B^{(2)}, T_a)$

$$E(e^{itH}) = E(E(e^{itB^{(2)}(T_a)} | T_a))$$

$$\overset{*}{=} E\left(E(e^{itB^{(2)}(r)}) \Big|_{r=T_a} \right) \qquad Z \sim N(0,1)$$

$$= E\left(E(e^{it\sqrt{r}Z}) \Big|_{r=T_a} \right) =$$

$$= E\left(e^{-\frac{1}{2}t^2 r} \Big|_{r=T_a} \right) = E(e^{-\frac{1}{2}t^2 T_a})$$

$$= e^{-|a|\sqrt{2\frac{1}{2}t^2}} = e^{-|a||t|}$$

$$E(h(X,Y)|\mathcal{G}) = E\,h(x,Y)\Big|_{x=X}$$

X $\mathcal{G}$ - μετρ.

$Y \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$

Στην περίπτωσή μας $\mathcal{G} = \sigma(T_a)$

$$X = T_a, \quad Y = B^{(2)}$$

$$h : [0,\infty) \times C[0,\infty) \to \mathbb{R}$$

με $h(x,y) = e^{i t y(x)}$

§ 8.3 Κύμανση και τετραγωνική κύμανση για την κίνηση Brown

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $p > 0$

$\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ διαμέριση του $[a,b]$

$$V_p(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p$$

Κύμανση της f λέμε την ποσότητα

$$V_1(f,[a,b]) = \sup\{V_1(f,\Delta) : \Delta \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$$

Τετραγωνική κύμανση

Έστω ανέλιξη $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ και $[a,b] \subset I$.

Λέμε ότι η X έχει τετραγωνική κύμανση στο $[a,b]$ την τ.μ. Y αν για κάθε

κάθε ακολ. $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ διαμερίσεων του $[a,b]$ με $\lim_{n\to\infty}\|\Delta_n\|=0$ ισχύει ότι

$$V_2(X,\Delta_n)\to Y$$

κατά πιθανότητα καθώς $n\to\infty$.

<u>Άσκηση</u> B τ.κ.Β $t>0$ | $E(B_t^2-t)=0$

$$E((B_t^2-t)^2)=2t^2 \quad (*)$$

Λύση

$$E(B_t^4-2tB_t^2+t^2)=E((\sqrt{t}B_1)^4)-2t\cdot t+t^2=t^2\underbrace{E(B_1^4)}_{=3}-t^2=2t^2$$

<u>Πρόταση</u> B τ.κ.Β $0<a<b$

(α) Αν $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ διαμερίσεις του $[a,b]$ με $\|\Delta_n\|\to 0$ τότε $V_2(B,\Delta_n)\xrightarrow{n\to\infty} b-a$ στον L^2

(β) Αν (Δ_n) όπως στο (α) αλλά επιπλέον $\sum_{n=1}^{\infty}\|\Delta_n\|<\infty$, τότε $V_2(B,\Delta_n)\xrightarrow{n\to\infty} b-a$ με π.θ. 1.

Αποδ.

Γενικά, αν $\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \quad < t_k\}$

διαμέριση του $[a, b]$, τότε

$$V_2(B,\Delta) - (b-a) = \sum_{i=1}^{k} \{ \underbrace{(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 - (t_i - t_{i-1})}_{Y_i} \}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} Y_i \qquad , \; E(Y_i) = 0$$

$$E\left(\left(V_2(B,\Delta) - (b-a)\right)^2\right) = E\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i^2 + 2\sum_{i<j} Y_i Y_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} E(Y_i^2) + 2\sum_{i<j} \underbrace{E(Y_i Y_j)}_{=0}$$

$$E(Y_i^2) = E\left(\left\{ B^2_{t_i - t_{i-1}} - (t_i - t_{i-1}) \right\}^2\right) \overset{*}{=} 2(t_i - t_{i-1})^2$$

$Y_i \perp\!\!\!\perp Y_j$ για $i<j$ γιατί $B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \perp\!\!\!\perp B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$

Άρα $$E\left(\left(V_2(B,\Delta) - (b-a)\right)^2\right) = 2\sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1})^2 \quad (**)$$

(α) Η $**$ γίνεται $\left(\Delta_n = \{a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \quad < t_{k_n}^{(n)} = b\}\right)$

$$E\left(\{V_2(B,\Delta_n) - (b-a)\}^2\right) = 2\sum_{i=1}^{k_n} \left(t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}\right)^2$$

$$\leq 2\|\Delta_n\| \sum_{i=1}^{k_n} \left(t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}\right) = 2(b-a)\|\Delta_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

(β) Έστω $U_n = V_2(B,\Delta_n) - (b-a)$

τότε $E(U_n^2) \leq 2(b-a)\|\Delta_n\|$

$$\Rightarrow E\left(\sum_{n=1}^{\infty} U_n^2\right) \leq 2(b-a) \sum \|\Delta_n\| < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} U_n^2 < \infty \quad \text{με πιθ. 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} U_n = 0 \quad \text{''}$$

<u>Πρόταση</u> Με πιθανότητα 1, $\forall\ 0<a<b$

$$V_1(f, [a,b]) = \infty.$$

Αποδ

Έστω $0<a<b$. $\forall\ \Delta = \{a = t_0 < \dots < t_k = b\}$ διαμέριση του $[a,b)$ έχουμε

(ΧΑΥ) $$V_2(B,\Delta) \leq \sup_{1\leq i\leq k} |B(t_i) - B(t_{i-1})|\, V_1(B,\Delta)$$

Θεωρούμε ακολ. διαμερίσεων $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ του $[a,b]$ με $\sum_{n=1}^{\infty}\|\Delta_n\| < \infty$

Τότε $$\lim_{n\to\infty} V_2(B,\Delta_n) = b-a \quad \text{με πιθ. 1}$$

$$\sup_{n\to\infty} |B(t_i^{(n)}) - B(t_{i-1}^{(n)})| = 0 \quad \text{''}$$

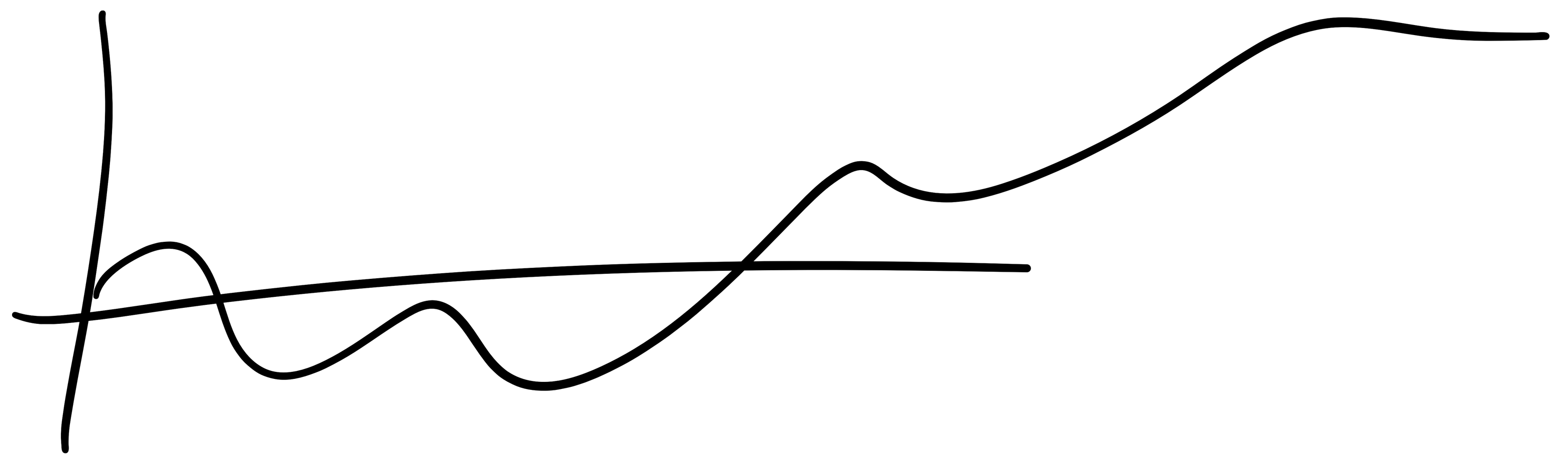
$$V_1(B,\Delta_n) \geq \frac{V_2(B,\Delta_n)}{\sup_{1\leq i\leq k_n} |\quad|} \to \frac{b-a}{0^+} = \infty$$

Άρα $V_1(B,[a,b]) = \sup\{V_1(B,\Delta) : \Delta \dots\} = \infty$

Για κάθε $0<a<b$ επίσης υπάρχει

$\Omega_{a,b} \subset \Omega$ με $P(\Omega_{a,b})=1$ ώστε

$$V_1(B,[a,b]) = \infty \qquad \forall \omega \in \Omega_{a,b}$$



Έστω

$$\Omega_0 := \bigcap_{\substack{0<a<b \\ a,b\in\mathbb{Q}}} \Omega_{a,b} \quad . \quad P(\Omega_0)=1$$

Αν $\omega \in \Omega_0$ και $0<a<b$

$\exists\, \gamma,\delta \in \mathbb{Q}$ $\quad 0<a<\gamma<\delta<b$

οπότε $\quad V(B,[\gamma,\delta])=\infty$

$$\sum_{i=1}^{k} |f(t_i)-f(t_{i-1})|^{2+\varepsilon}$$

$$\sqrt{|t_i-t_{i-1}|^2+|f(t_i)-f(t_{i-1})|^2}$$

μήκος

$$E\left(\int_0^1 B(s)\, e^{B(2s)}\, ds\right) = \int_0^1 E\left(B(s)\, e^{B(2s)}\right) ds$$

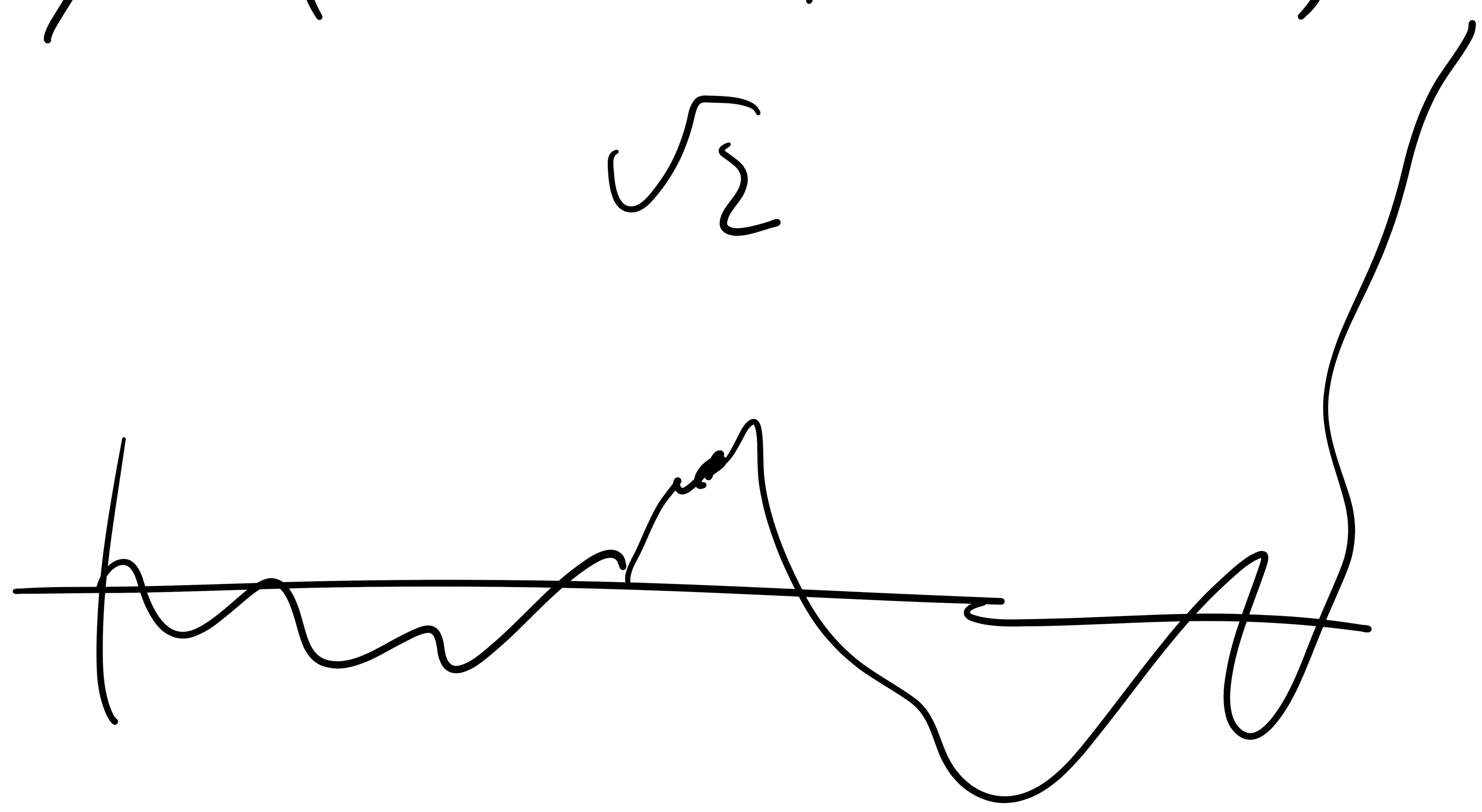
$$E\left(B(s)\, e^{B(2s)}\right) = E\left(\sqrt{s}\, B(1)\, e^{\sqrt{2s}\, B(1)}\right)$$

$$B(s) \overset{d}{=} \sqrt{s}\, B(1) \quad \circ$$

$$\left(B(s),\ B(2s)\right) \overset{d}{\neq} \left(\sqrt{s}\, B(1),\ \sqrt{2s}\, B(1)\right)$$

$$\frac{B(2s)}{B(s)} \qquad \sqrt{2}$$

$B(t) \qquad \sqrt{t}\, B(1)$



$$E\left(\underline{B(s)\, e^{B(s)}}\ \ \underline{e^{B(2s)-B(s)}}\right)$$

$$= E\left(B(s)\, e^{B(s)}\right) E\left(\quad\right)$$

$$\underbrace{B_1 - B_3}_{} + 2B_6 \overset{d}{\neq} B_1 - \sqrt{3}\, B_1 + 2\sqrt{6}\, B_1$$

$$1 \qquad 3 \qquad 6 \qquad = \left(1 - \sqrt{3} + 2\sqrt{6}\right) B_1$$

$$B_6 - B_3 \qquad \cancel{B_6 - B_1}$$