§5.6 , A2 , 4.4 , 6.1

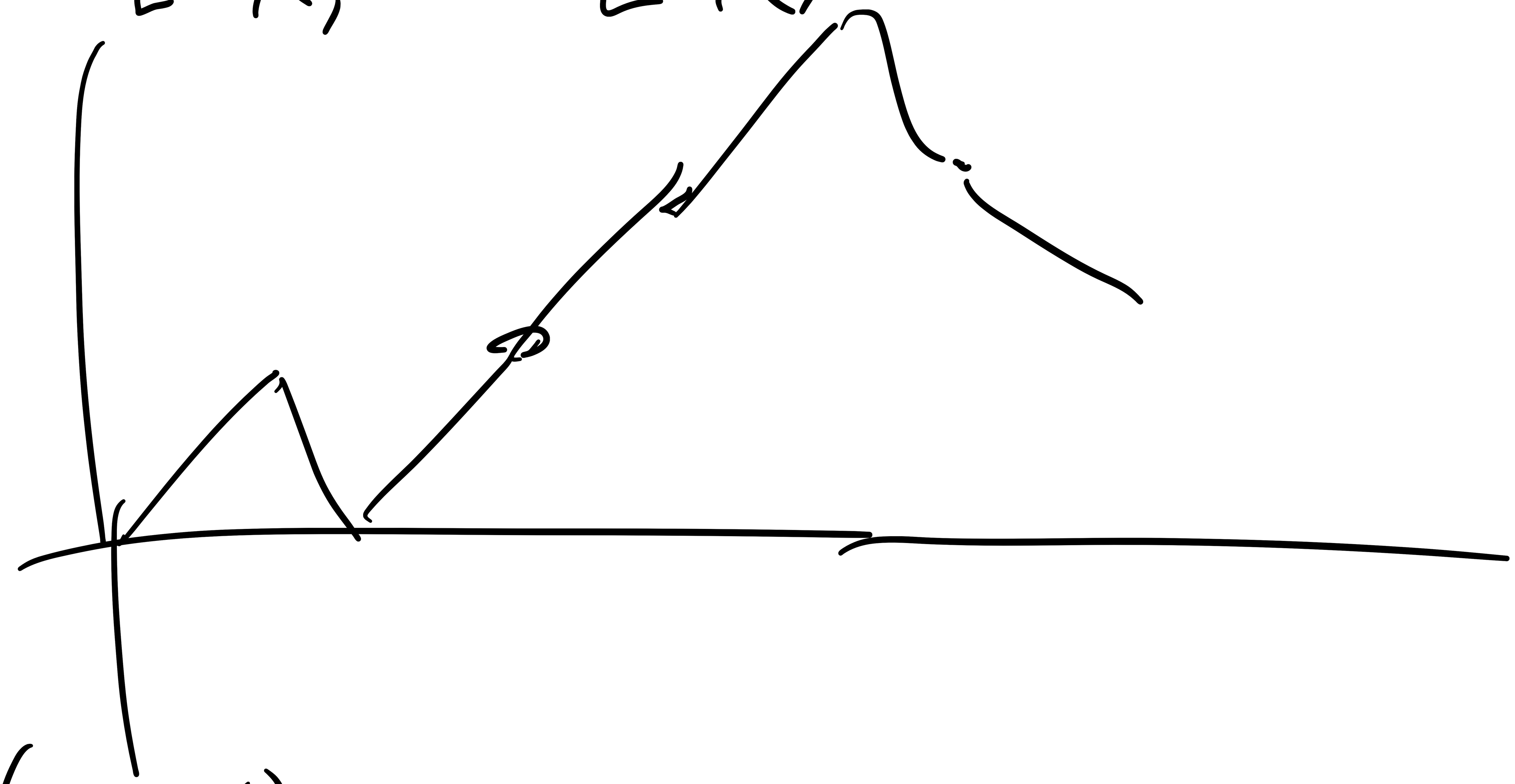
$(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$

$(X_i)_{i \geq 1}$ $\qquad S_n = X_1 + \dots + X_n$

$EX_1 = 0 \quad EX_1^2 = 1$

$S(x)$

$x \geq 0$



$$S_n^*(x) = \frac{S(nx)}{\sqrt{n}}, \quad x \geq 0$$

$S_n^* \in C[0,\infty)$

$S_n^* : \Omega_1 \to C[0,\infty)$

$B : \Omega_2 \to C[0,\infty)$

$S_n^* \Rightarrow B$

Θεώρημα συνεχούς απεικόνισης

Αν $Y_n \Rightarrow Y$ τοτε $g(Y_n) \Rightarrow g(Y)$

$\forall g$ συνεχη

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow Z \qquad \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)^2 \Rightarrow Z^2$$

$Y_n : \Omega_n \to S$, $Y : \Omega \to S$

(S, d) μετρικός χωρος $\qquad \mathcal{B}(S)$

$g : S \to \mathbb{R}$ συνεχης

μετρικοι χωροι

<u>Θεωρημα</u> Αν $Y_n \Rightarrow Y$ και

$g : S \to \mathbb{R}$ συνεχης τοτε

$g(Y_n) \Rightarrow g(Y)$

ασυνεχειες της g

$P(Y \in A_g) = 0$

Αποδ

Θελουμε

(*) $E\, \underbrace{h(g(Y_n))} \xrightarrow{n\to\infty} E\, h(g(Y))$

$\forall\, h: \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνεχή

Για μια τέτοια h, η $F = h\circ g : S \to \mathbb{R}$

είναι συνεχής και φραγμένη.

Άρα αφού $Y_n \Rightarrow Y$ ορίζεται,

$$E\, F(Y_n) \xrightarrow{n\to\infty} E\, F(Y)$$

Δηλ. η (*).

$$S_n^* : \Omega \to C[0,\infty) \xrightarrow{g} \mathcal{X}$$

άλλος π.χ.

$\mathcal{X} = \mathbb{R}$ $\quad g(f) = f(1)$

g συνεχής. Άρα

$$g(S_n^*) \Rightarrow g(B)$$

Θεώρημα συνεχούς απεικ.

Δηλ. $S_n^*(1) = \dfrac{S(n)}{\sqrt{n}} = \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow B(1)$

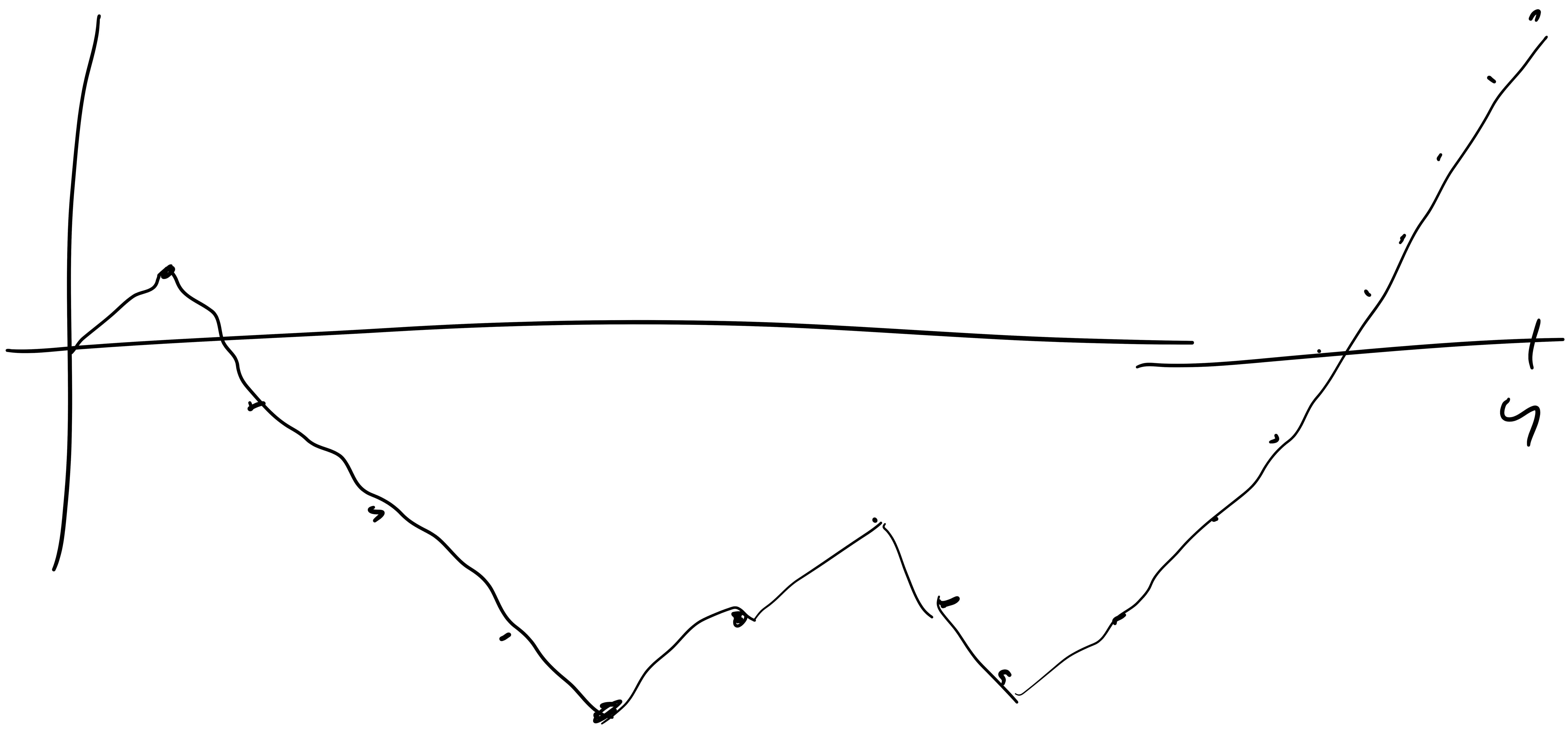
$\sim N(0,1)$

Παράδειγμα Να βρεθεί το κατά κατανομή

όριο της $A_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \le k \le n} S_k$.

$100n$ $B(x)$

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{x \in [0,1]} S(nx) = \max_{x \in [0,1]} S_n^*(x)$$



Θεωρούμε την $G : C[0,\infty) \to \mathbb{R}$

με $G(f) = \max_{x \in [0,1]} f(x)$

Η G είναι συνεχής

$\underline{f_n} \to \underline{f}$ $\quad \|f_n - f\|_{[0,1]} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$= \sup\{|f(x) - f_n(x)| : x \in [0,1]\}$

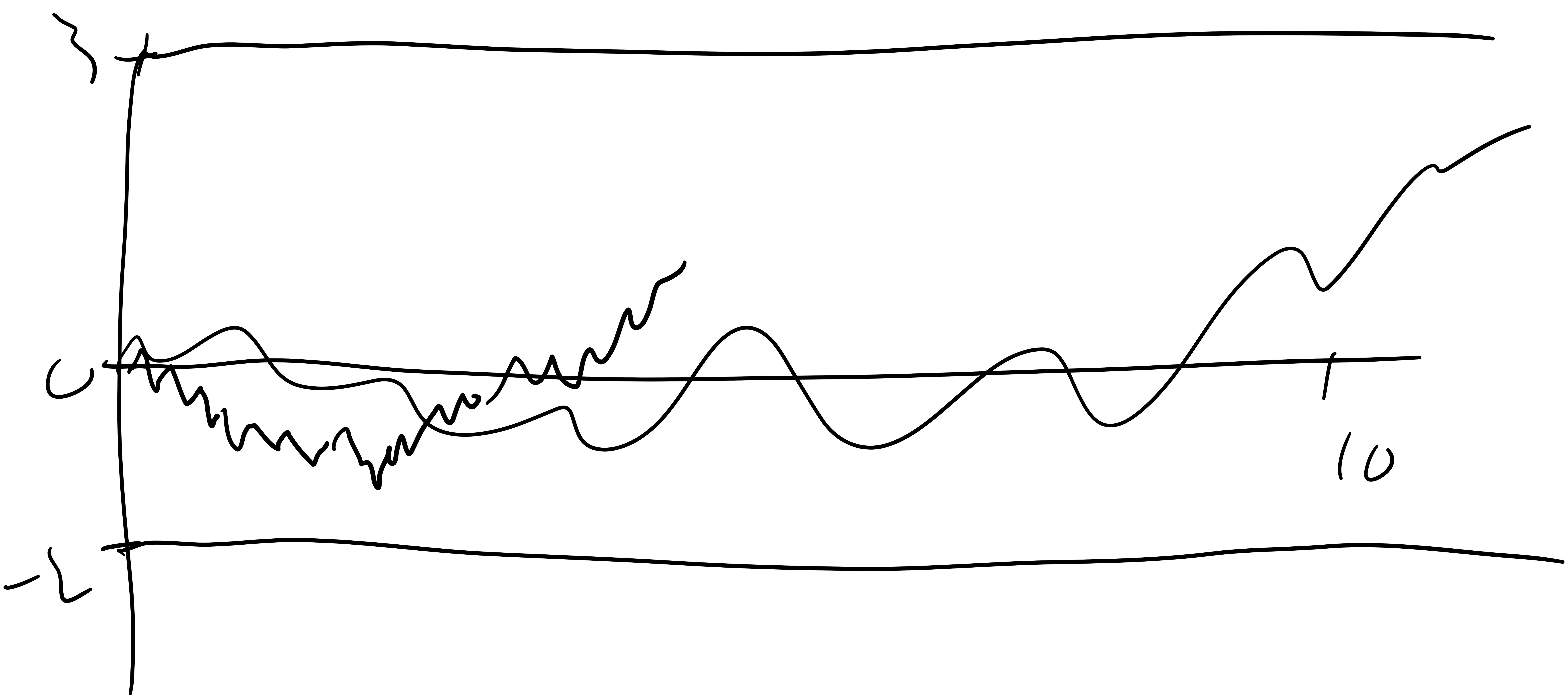
Άρα $G(S_n^*) \Rightarrow G(B)$

$A_n \Rightarrow \max_{t\in[0,1]} B(t)$

$S_n^* \approx B \qquad C[0,\infty)$

$P(S_n^* \in A) \approx P(B \in A)$

$A = \{x \in C[0,\infty) : -2 \le x(t) \le 3 \ \forall t \in [0,10]\} \qquad P(B \in \partial A) = 0$



$S_n^* \approx B$

9.12 $\quad S_n = X_1 + \quad + X_n$

Ποιο το κατά κατανομή όριο της

$$I_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} S_k^2$$

S_n^*

$S(x)$

$S_n^*(x) = \frac{S(nx)}{\sqrt{n}}$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} S^2(k)$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} n \left(S_n^*\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(S_n^*\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2$$

$$\sim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} B\left(\frac{k}{n}\right)^2 \to \int_0^1 B^2(t)\,dt$$

I_n

$$G(f) = \int_0^1 f^2(t)\,dt$$

$$G(S_n^*) \Rightarrow G(B)$$

I_n

$$I_n \to G(B)$$

§4.4 Ιδιότητα Markov

$I \subset \mathbb{R}$ σύνολο δεικτών

$(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ διήθηση σε χώρο π.θ.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad (\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F},\ s<t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t)$

$X = (X_t)_{t\in I}$ τ.μ. με τιμές σε μετρήσιμο χώρο $(S, \mathcal{A})$. $X_t : \Omega \to S$ $\forall t$

Υπόθεση: η X είναι προσαρμοσμένη δηλ. X_t είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη $\forall t$.

<u>Ορισμός</u> Η X έχει την ιδιότητα Markov ως προς την $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ αν $\forall\ s,t \in I,\ s \le t,\ A \in \mathcal{A}$ ισχύει

$$P(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = P(X_t \in A \mid X_s)$$

με πθ 1. $\sigma(X_s) \subset \mathcal{F}_s$ $\qquad \sigma^{1}(X_s)$

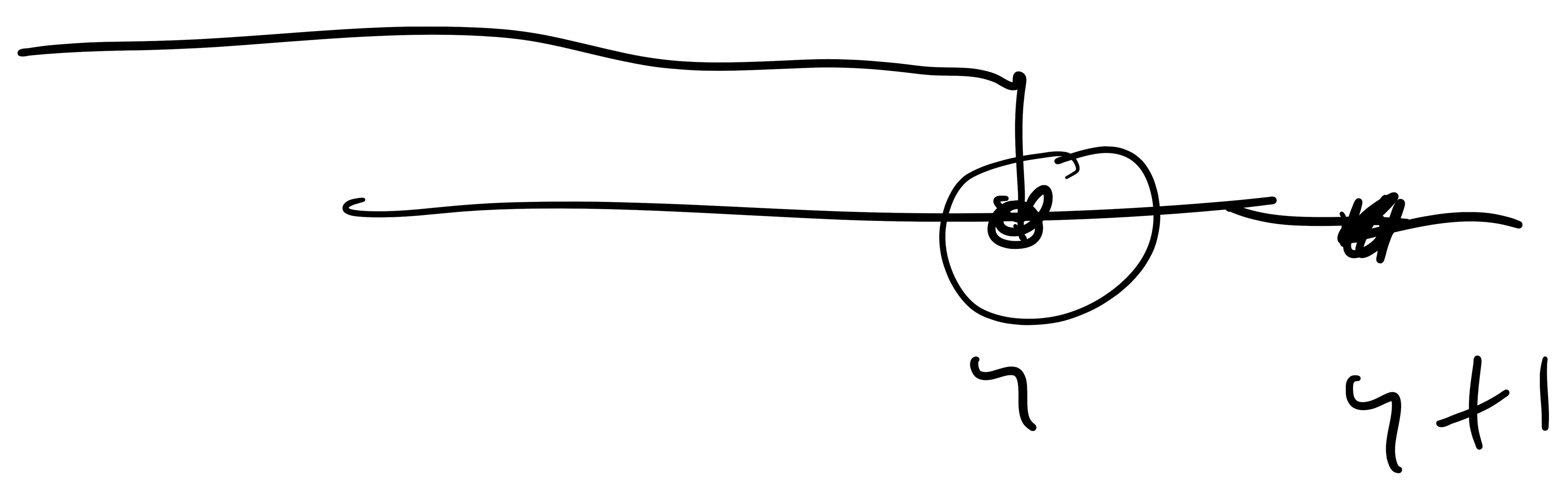
$$\left(P(\Gamma \mid \mathcal{F}_s) := E(1_\Gamma \mid \mathcal{F}_s) \right)$$

$$P(\Gamma) = E(1_\Gamma)$$

$(X_n)_{n \geq 1}$

$$P(X_{n+1} \in A \mid X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n)$$

$$P(X_{n+1} \in A \mid X_n = a_n)$$



<u>Παράδειγμα</u> $(X_i)_{i \geq 1}$ ανεξάρτητες

(σύνορισ). $S_n = X_1 + \ldots + X_n \quad \forall n \geq 1$

$S_0 = 0$

$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$

$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

$I = \mathbb{N}$. Ανέλιξη $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Η $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Markov

πράγματι, για $k\le n$ και $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P(S_n\in A\mid\mathcal{F}_k) \quad \left(\overset{?}{=} P(S_n\in A\mid S_k)\right)$$

$$Y_{k,n}=S_n-S_k=X_{k+1}+\quad+X_n \perp\!\!\!\perp S_k$$

$$P(S_n\in A\mid\mathcal{F}_k)=E\left(\mathbb{1}_{S_k+Y_{k,n}\in A}\mid\mathcal{F}_k\right)$$

Πρόταση 2.13

$$E(h(X,Y)\mid\mathcal{G})=E\,h(x,Y)\Big|_{x=X}$$

X $\mathcal{G}$-μετρ.

$Y\perp\!\!\!\perp\mathcal{G}$

$$h(x,y)=\mathbb{1}_{x+y\in A}$$

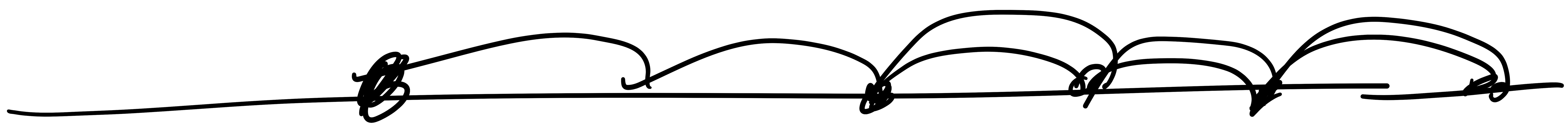
Άρα $P(S_n\in A\mid\mathcal{F}_k)=E\left(\mathbb{1}_{x+Y_{k,n}\in A}\right)\Big|_{x=S_k}$

$$=P(Y_{k,n}\in A-x)\Big|_{x=S_k} \leftarrow (*)$$

Όμοια $P(S_n \in A \mid S_n) = E(1_{S_n + Y_{n+1} \in A} \mid S_n)$

$= \ast\ast$

$S_n = X_1 + \dots + X_n$



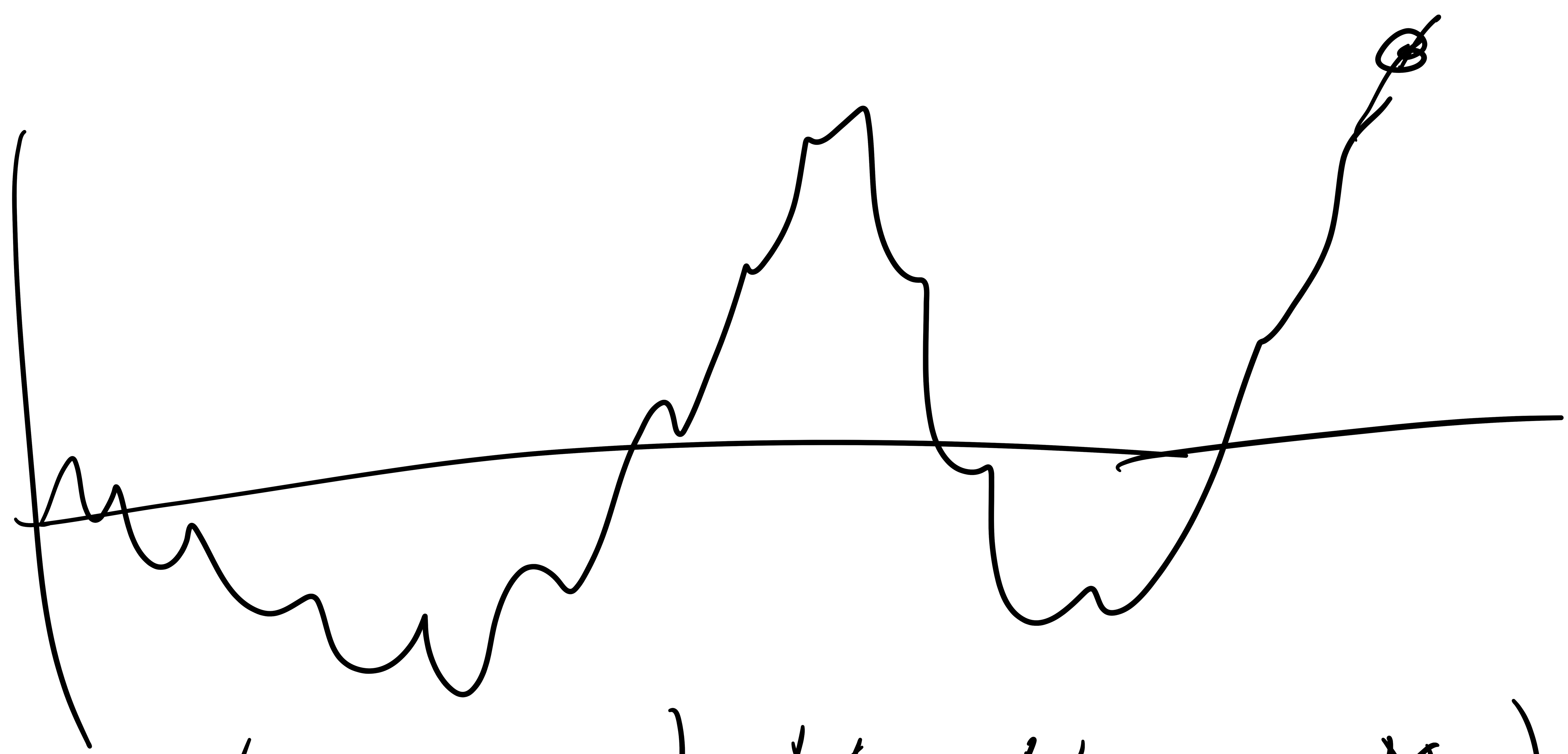
S_n

$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$

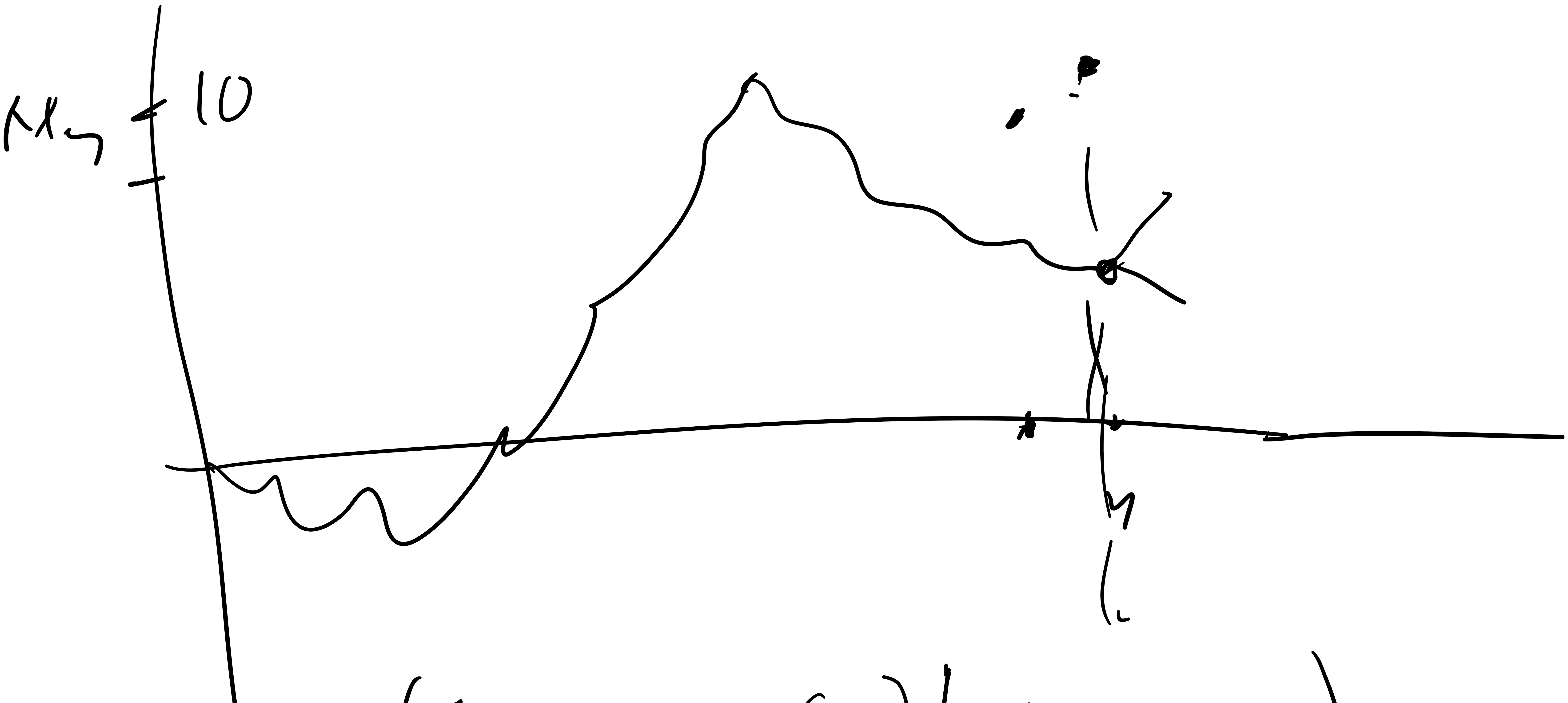
$S_{n+1}, S_n, \dots,$

$M_n = \max\{S_0, S_1, \dots, S_n\}$

δεν είναι Μαρκοβιανή ως προς $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$



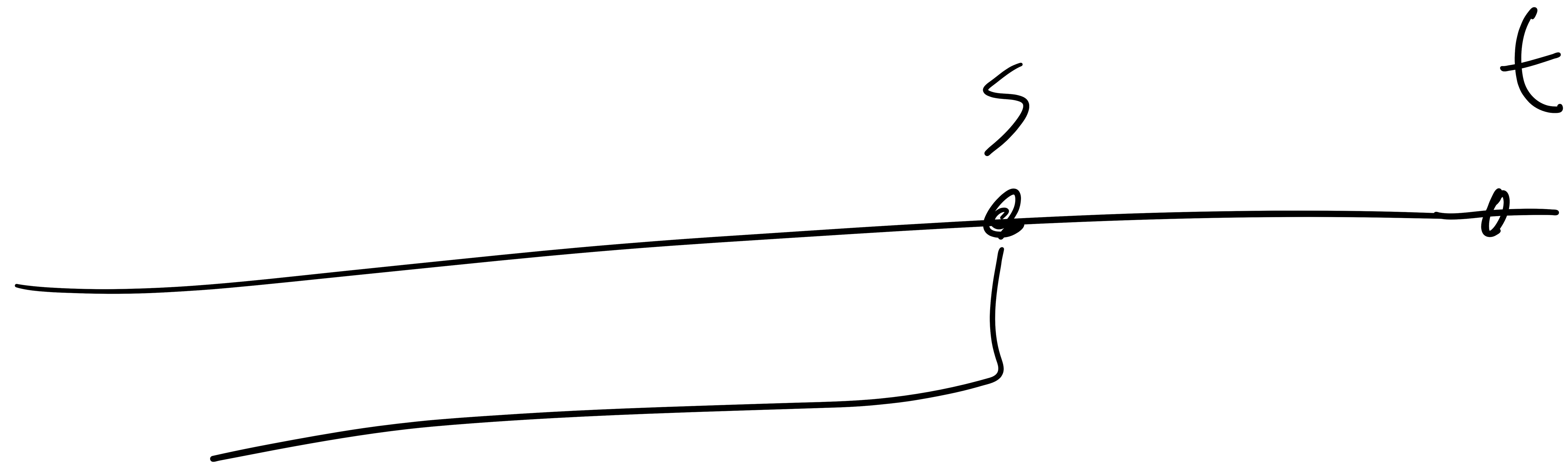
$P(M_{n+1} \in A \mid \underbrace{M_0, M_1, \dots, M_n}{})$



$$P(M_{n+1} \in \cdot \mid M_n = 10)$$

$M_1 = 10 \quad M_{n-1} = 9 \quad \Rightarrow \quad S_n = 10$

$$X_t \mid \mathcal{F}_s \stackrel{d}{=} X_t \mid X_s \qquad s \le t$$



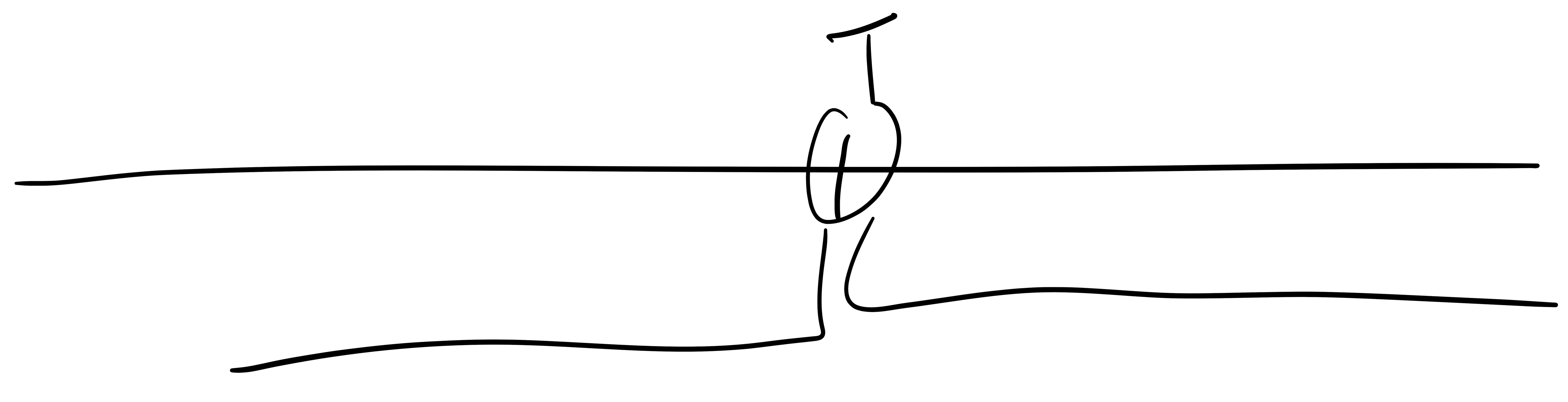
X είναι διαδικασία $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρο πιθανότητας

$(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ διήθηση, $I = [0,\infty)$

Η τ.μ. $T: \Omega \to [0,\infty]$ λέγεται χρόνος διακοπής αν ∀ $t \geq 0$ ισχύει

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

$(X_t)_{t \in I}$ προσαρμοσμένη ανέλιξη

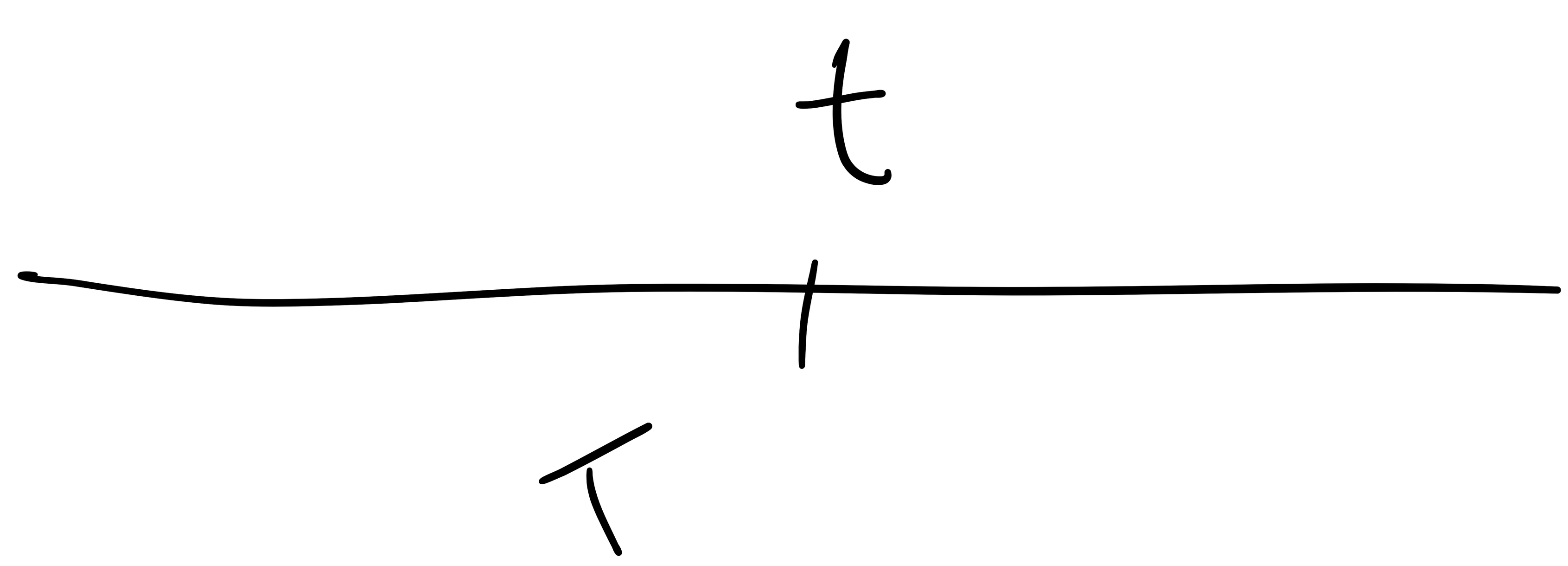


X_T $\mathcal{F}_t$ $\mathcal{F}_T$

$T : \Omega \to [0,\infty)$ χρόνος διακοπής

$$\mathcal{F}_T := \{ A \in \mathcal{F} : \overbrace{A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t}\ \forall t \in I \}$$

$\mathcal{F}_t$



Ορισμός: Λέμε ότι η $(X_t)_{t \in I}$ έχει την ισχυρή ιδιότητα Markov ως προς την $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ αν ∀ χρόνο διακοπής T με τιμές στο I και $t \geq 0$ ισχύει

$$P(X_{T+t}\in A \mid \mathcal{F}_T) = P(X_{T+t}\in A \mid X_T)$$

$$X_t \mid \mathcal{F}_s \qquad \frac{s\le t}{T\le t}$$

Ισχυρή Markov $\Rightarrow$ Markov

(παίρνουμε T σταθερό . . .)

§6.1 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας, B d-διάστατη κίνηση Brown σε αυτόν. ($B: \Omega \to \mathbb{R}^d$)

$$\mathcal{F}_t^0 = \sigma(\{B(s) : s\in[0,t]\}), \quad t\ge 0$$

η φυσιολογική διήθηση.

$\mathcal{N} := \{ N \subset \Omega : \exists A \in \mathcal{F}$ με $A \supset N$, $P(A)=0 \}$

τα μηδενοσύνολα του χώρου.

$$\tilde{\mathcal{F}} := \sigma(\mathcal{F}\cup\mathcal{N}) = \{A\cup N : A\in\mathcal{F}, N\in\mathcal{N}\}$$

ορίζουμε και $\tilde{P} : \tilde{\mathcal{F}} \to [0,1]$

$A' \cup N'$ $\quad P(A') = P(A)$

$\tilde{P}(A \cup N) := P(A)$

$(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ πλήρωση του $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

ορίζουμε

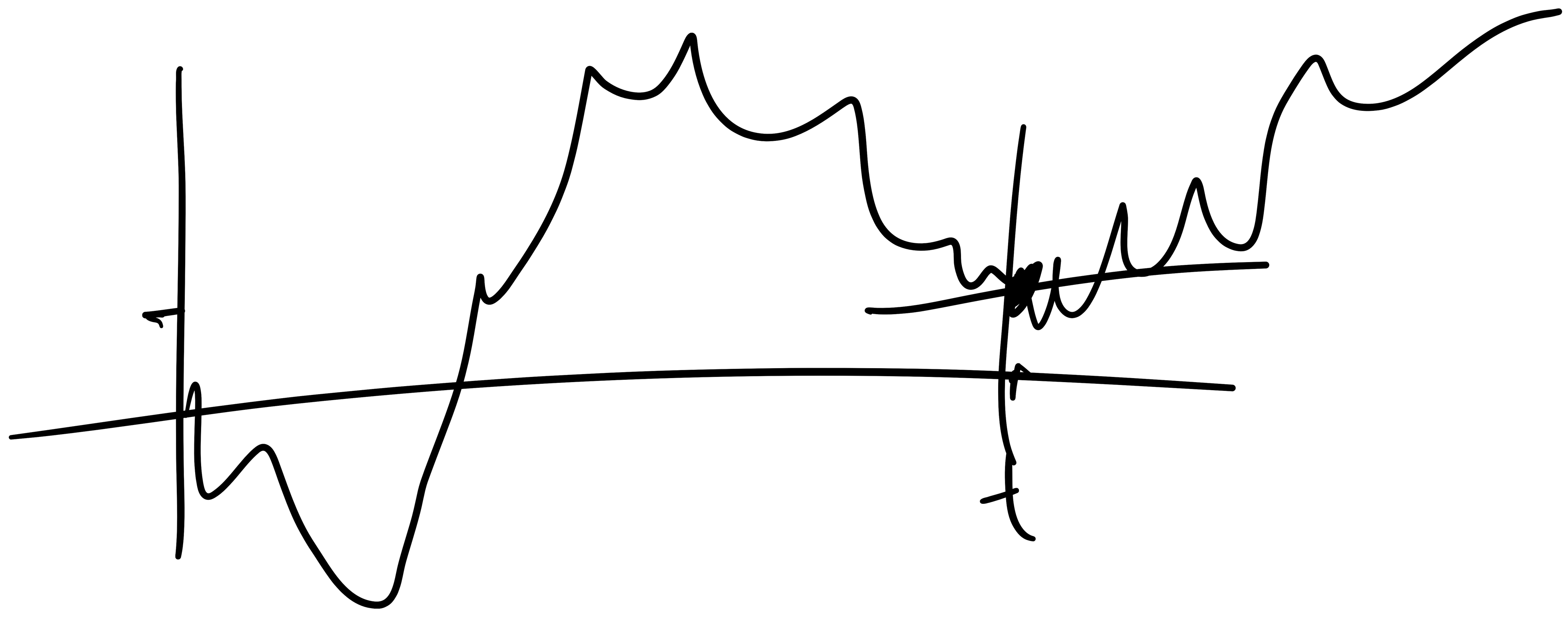
$$\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{F}_t^0 \cup \mathcal{N}) \quad \forall t \geq 0$$

η επαυξημένη διήθηση

Ιδιότητα της μεταφοράς $\quad$ B κανονική κ.Β

$\forall t_0 \geq 0$ η $X(t) = B(t_0 + t) - B(t_0)$, $t \geq 0$

είναι τ.κ.Β ανεξάρτητη από της $\mathcal{F}_{t_0}$.



$\mathcal{F}_{t_0}^0$