Σημερα: §5.4 – 5.6, 6.1

$$\frac{B_t}{\sqrt{t}} \quad \begin{matrix} \nearrow -\infty \\ \searrow \infty \end{matrix} \qquad\qquad \frac{B_t}{t} \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

$$\frac{B_t}{\underbrace{\sqrt{2t\log\log t}}} \qquad [-1,1]$$

§5.4 Επισκέψεις στο 0

B Τ.Μ.Β

$B_t(\omega)$ $B(t)$ $\longrightarrow$

$$T^+ = \inf\{t>0 : B(t)>0\}$$

$$T^- = \inf\{t>0 : B(t)<0\}$$

$$T^+, T^- : \Omega \to [0,\infty]$$

$$\{T^+ < t\} = \bigcup_{0<s<t,\, s\in\mathbb{Q}} \{B(s)>0\} \in \mathcal{F}$$

Πρόταση

$$P(T^+=0) = P(T^-=0) = 1$$

Αποδ.

∀ $a>0$ ισχύει

$$T^+ \overset{d}{=} a^2 T^+$$

$B \qquad a\,B\left(\frac{1}{a^2}t\right) = X(t) \qquad a^2 \frac{t}{a^2} = t$

$\downarrow$

$t_0 \qquad t_0 a^2$

$$\boxed{T^+ \overset{d}{=} a^2 T^+}$$

$f(B) \qquad f(X)$

$$X \overset{d}{=} Y$$

$$f(X) \overset{d}{=} f(Y)$$

Βρίσκουμε την συνάρτηση κατανομής της T^+.

Για $x>0$

$$F_{T^+}(x) = P(T^+ \le x) = 1 - P(T^+ > x)$$

$$= 1 - P(a^2 T^+ > x) = 1 - P\left(T^+ > \frac{x}{a^2}\right)$$

$$\overset{a\to 0^+}{=} 1 - P(T^+ = \infty)$$

Δηλ. $F_{T^+}(x)$ σταθερή στο $(0,\infty)$

Άρα $P(T^+ \in (0,\infty)) =$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{T^+ \in \left(\frac{1}{n}, n\right]\right\}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(T^+ \in \left(\frac{1}{n}, n\right]\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} F_{T^+}(n) - F_{T^+}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\Rightarrow P(T^+ \in \{0,\infty\}) = 1$$

$$\underline{P(T^+ = 0)} + P(T^+ = \infty)$$

$$1 = P\left(\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \infty\right)$$

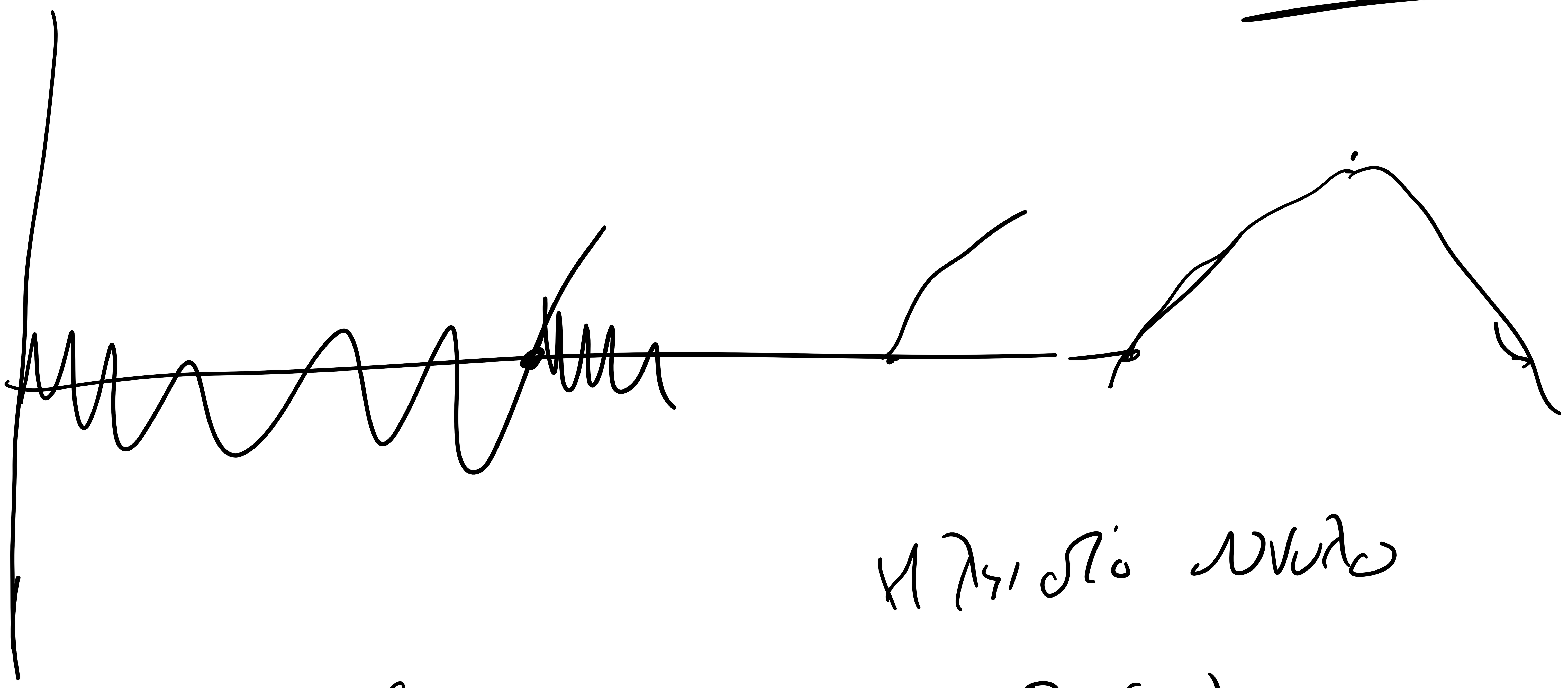
$$\leq P(\exists\, t > 0 : B_t > 0)$$

$$\leq P(T^+ < \infty)$$

$$\Rightarrow P(T^+ < \infty) = 1$$

$-B$

$$T^-(B) = T^+(-B) \overset{d}{=} T^+(B)$$



Η λεγόμενη ...

$$Z_\omega = \{ t \in [0,\infty) : B(t)(\omega) = 0 \}$$

<u>πρόταση</u> $P(\lambda(Z) = 0) = 1$

Απόδ

$$E(\lambda(Z)) = E\left(\int_0^\infty 1_{s\in Z}\, d\lambda(s)\right)$$

$$= \int_0^\infty P(s \in Z_\omega)\, d\lambda(s) =$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{P(B(s)(\omega) = 0)}_{=0} d\lambda(s) = 0$$

$$B(s) \sim N(0,s)$$

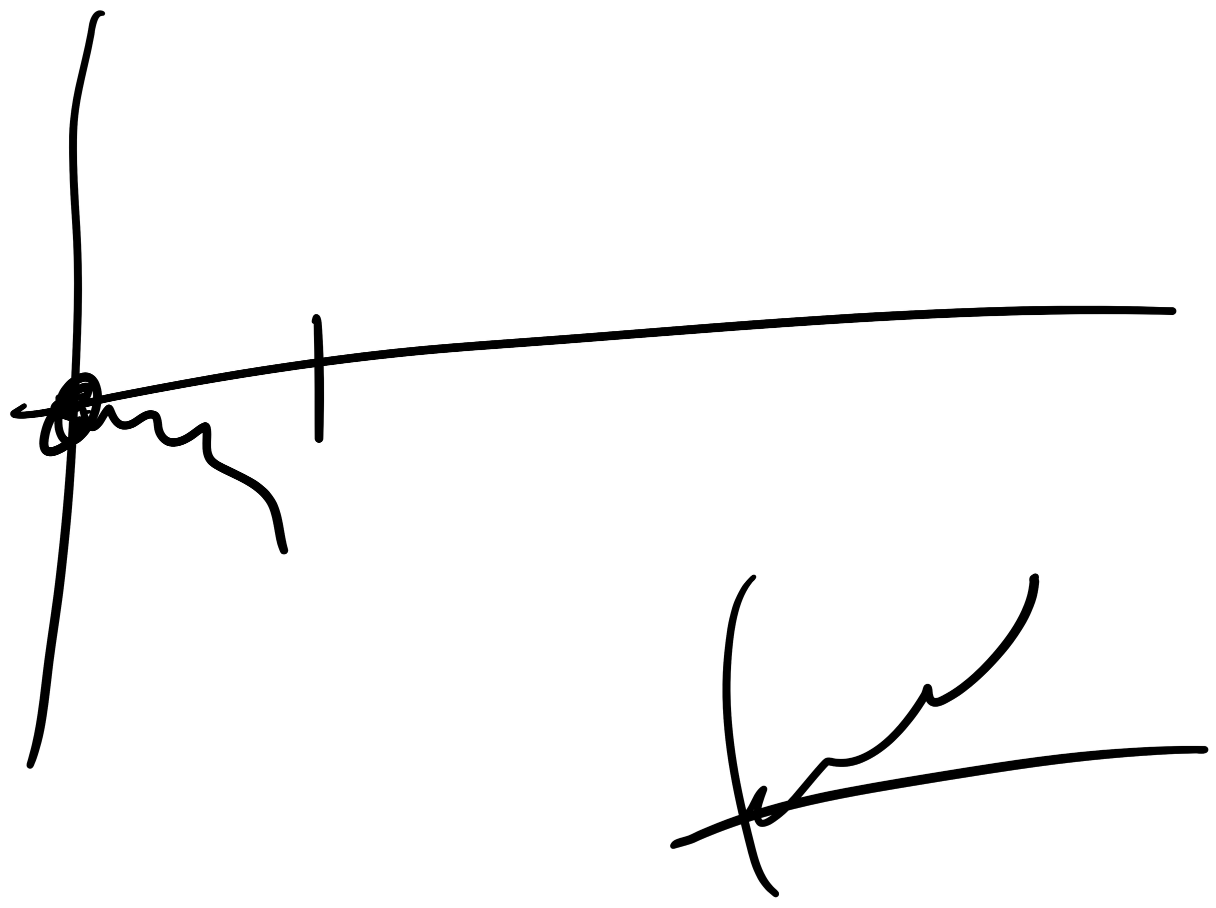
$X \geq 0 \quad EX = 0 \Rightarrow P(X=0) = 1$

5.8 $\quad Z \overset{d}{=} a^2 Z$

5.9 $\quad B$ τ.κ.Β. $t_0 > 0$. Ν.δ. ότι

$P($η B έχει τοπικό μέγιστο στο $t_0) = 0$

Λύση



$\leq 0 \quad T^+ = 0$

$T^- = 0$

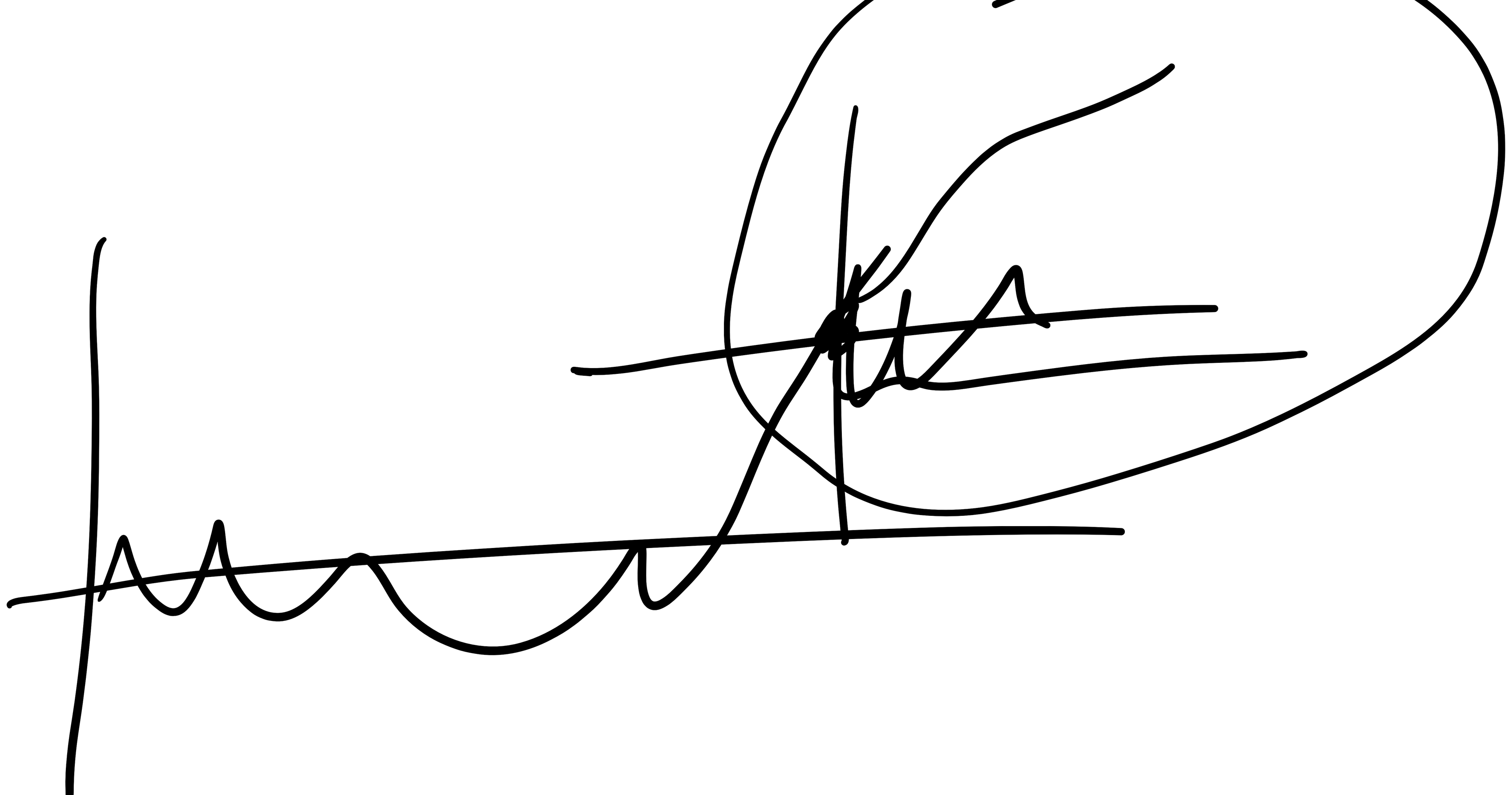
Αν $t_0 = 0$ $\qquad [0, \varepsilon)^c \quad \leq 0$

$\{0$ τοπικό μέγιστο της $B\} \subset \{T^+ > 0\}$

$\{0$ " ελαχ. " $\} \subset \{T^- > 0\}$

$\Rightarrow P(0$ τοπικό μέγιστο$) \leq P(T^+ > 0) + P(T^- > 0) = 0$

Αν $t_0 > 0$

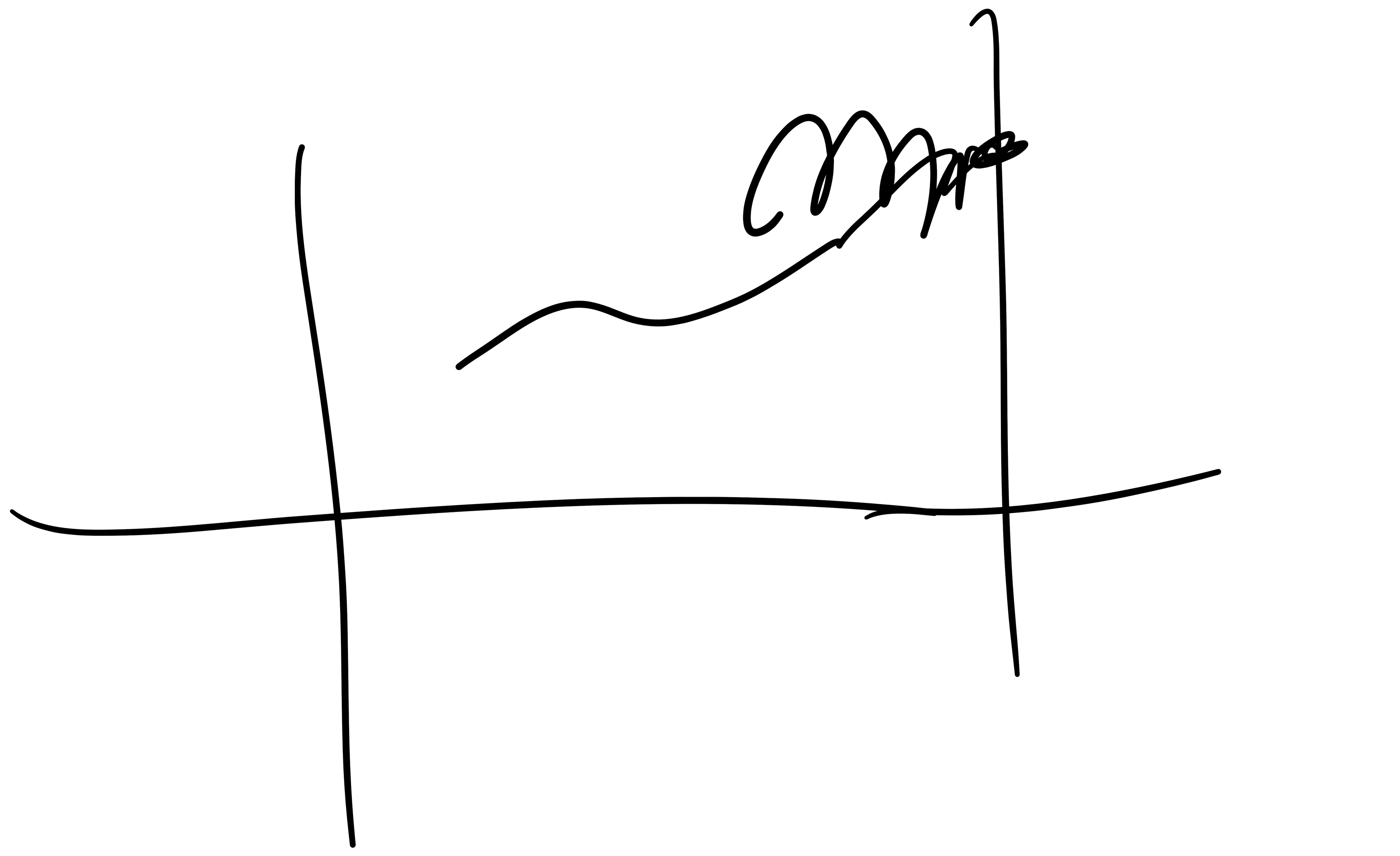


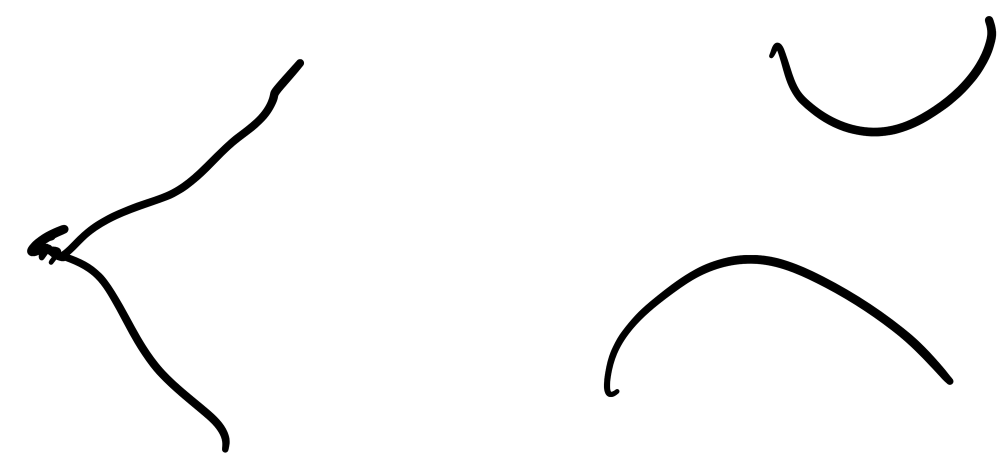
Θεωρούμε την $X(t) = B(t_0+t) - B(t_0)$, $t \geq 0$

$\{B$ τοπικό ακρότατο στο $t_0\} \subset$

$\{X$ τοπικό ακρότατο στο $0\} \leftarrow$

$P(\ \ ) = 0$

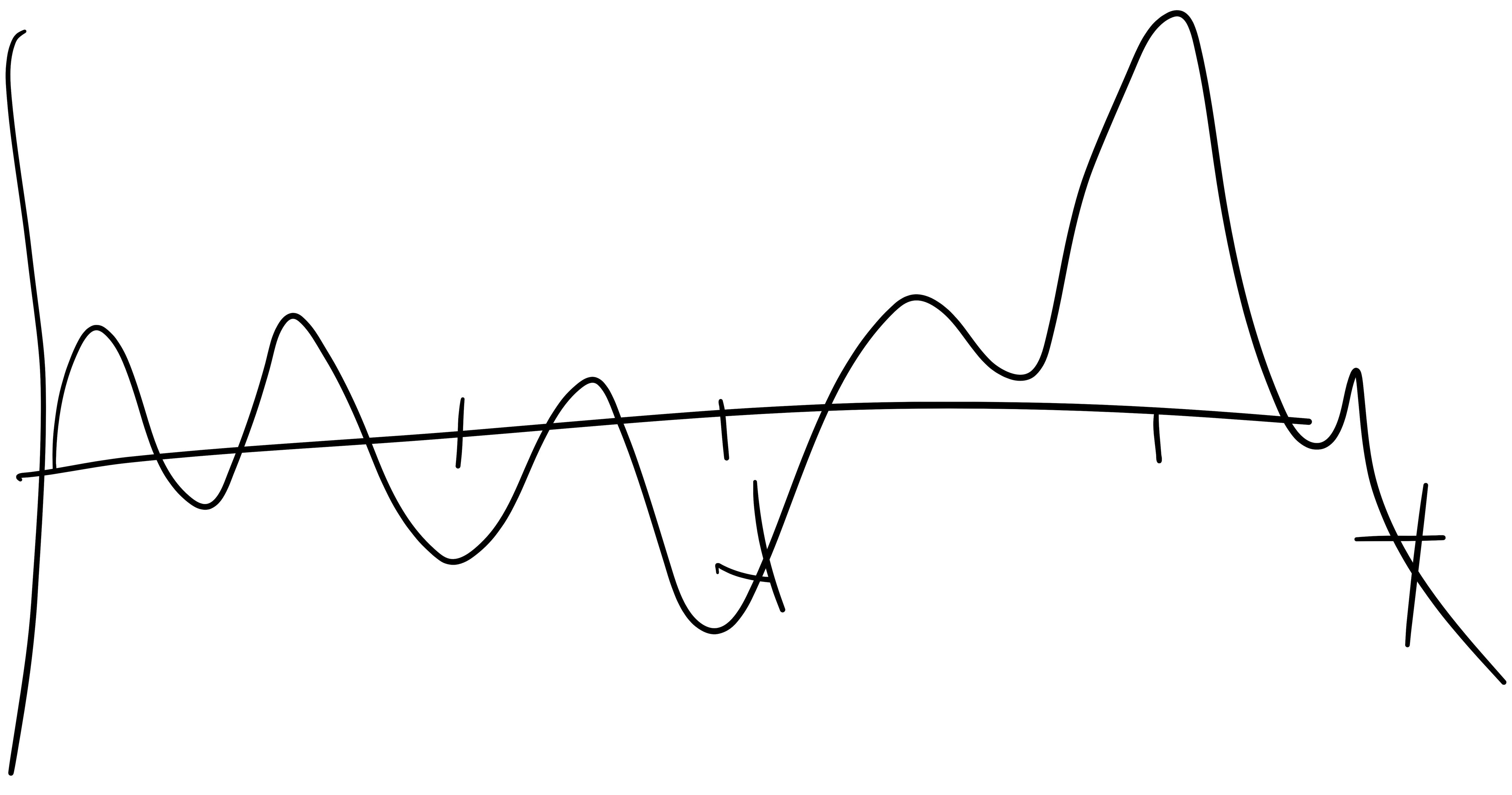




Παρατήρηση: Έστω $A_t = \{\omega \in \Omega :$

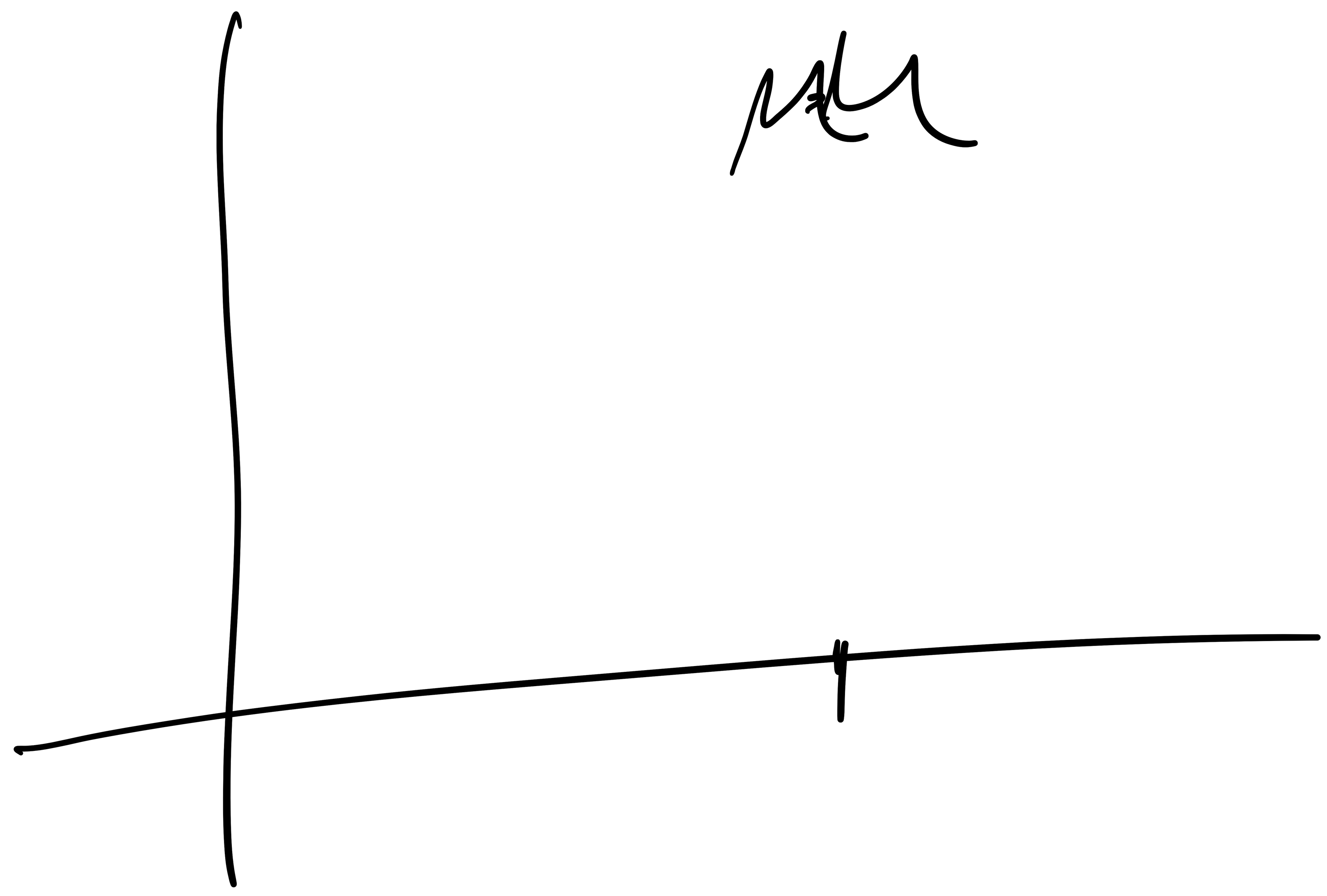
$s \mapsto B(s)(\omega)$ έχει τοπικό ακρότατο στο $t\}$

$t \geq 0$



$$P\Big(\bigcup_{t\geq 0} A_t\Big) \overset{?}{=} 0$$

A_t



$\forall t$ με πιθανότητα 1 η B δεν έχει ακρότατο στο t

Με πιθανότητα 1 $\forall t$ η B δεν έχει ...

$\forall t \quad P(A_t^c) = 1$ ✓

$P(\bigcap A_t^c) = 1$ ✗

$\forall t$ με π.θ. 1 η B δεν είναι διαφορ. στο t

Με π.θ. 1 $\forall t$ η B δεν είναι διαφορ. στο t.

§8.2

§5.5 πολυδιάστατη Κ.Β

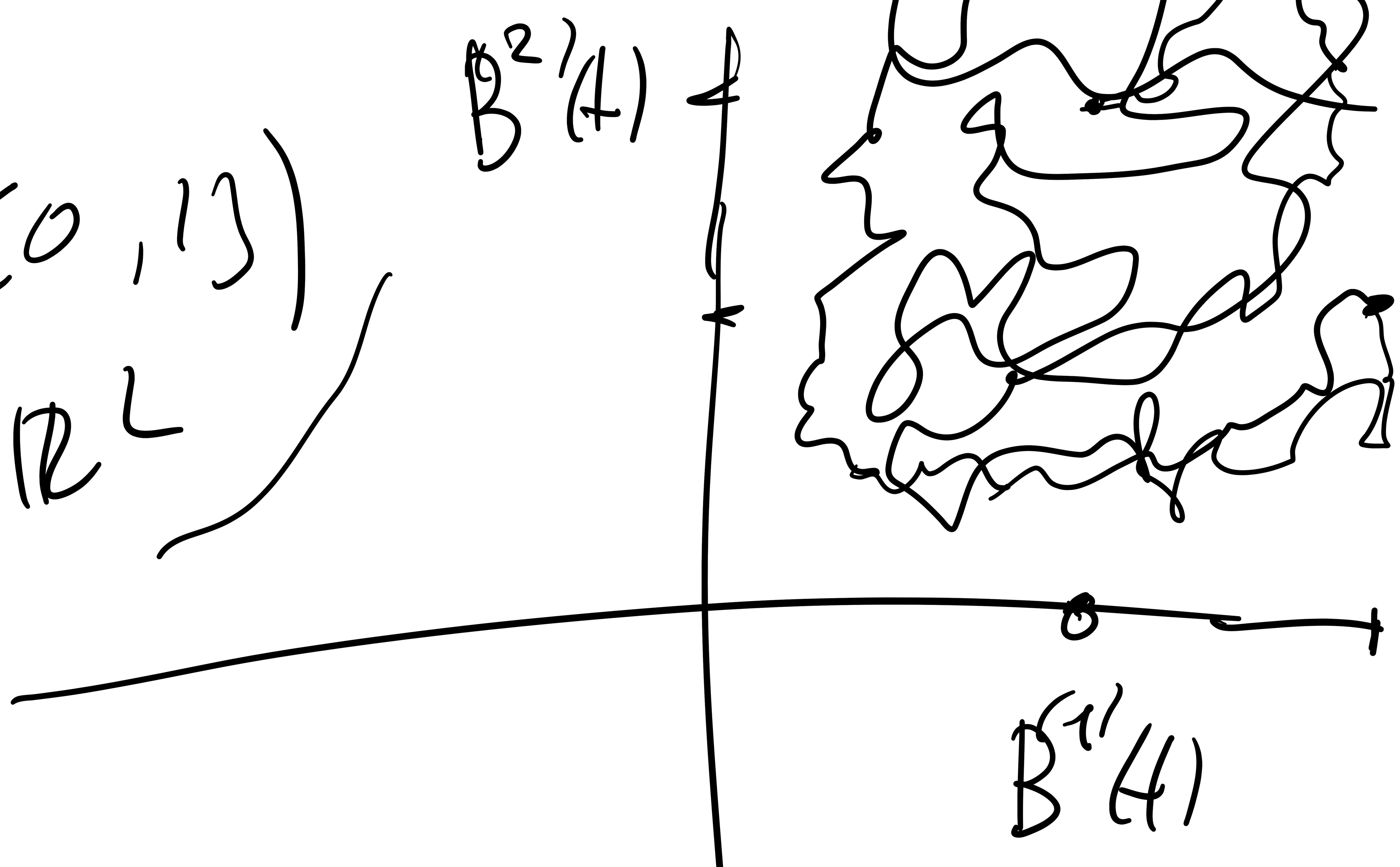
$d \in \mathbb{N}^{1}$. d-διάστατη κίνηση Brown

λέγεται η $B(t) = \begin{pmatrix} B^{(1)}(t) \\ \vdots \\ B^{(d)}(t) \end{pmatrix}$ $\forall t \geq 0$

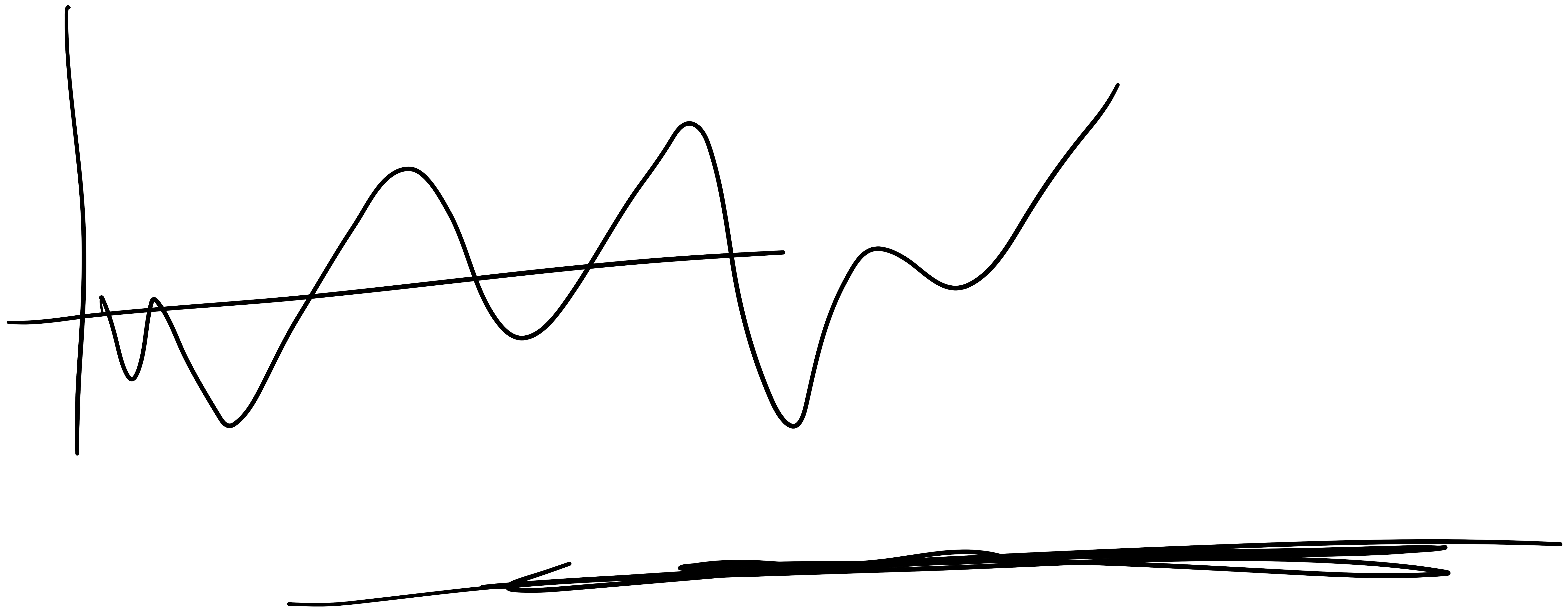
όπου $B^{(1)}, \ldots, B^{(d)}$ είναι μονοδιάστατες ανεξάρτητες κινήσεις Brown.

Αν $B(0) = 0$, τη λέμε τυπική d-διάστατη κίνηση Brown.

π.χ $d = 2$ $B([0,1]) \subset \mathbb{R}^2$



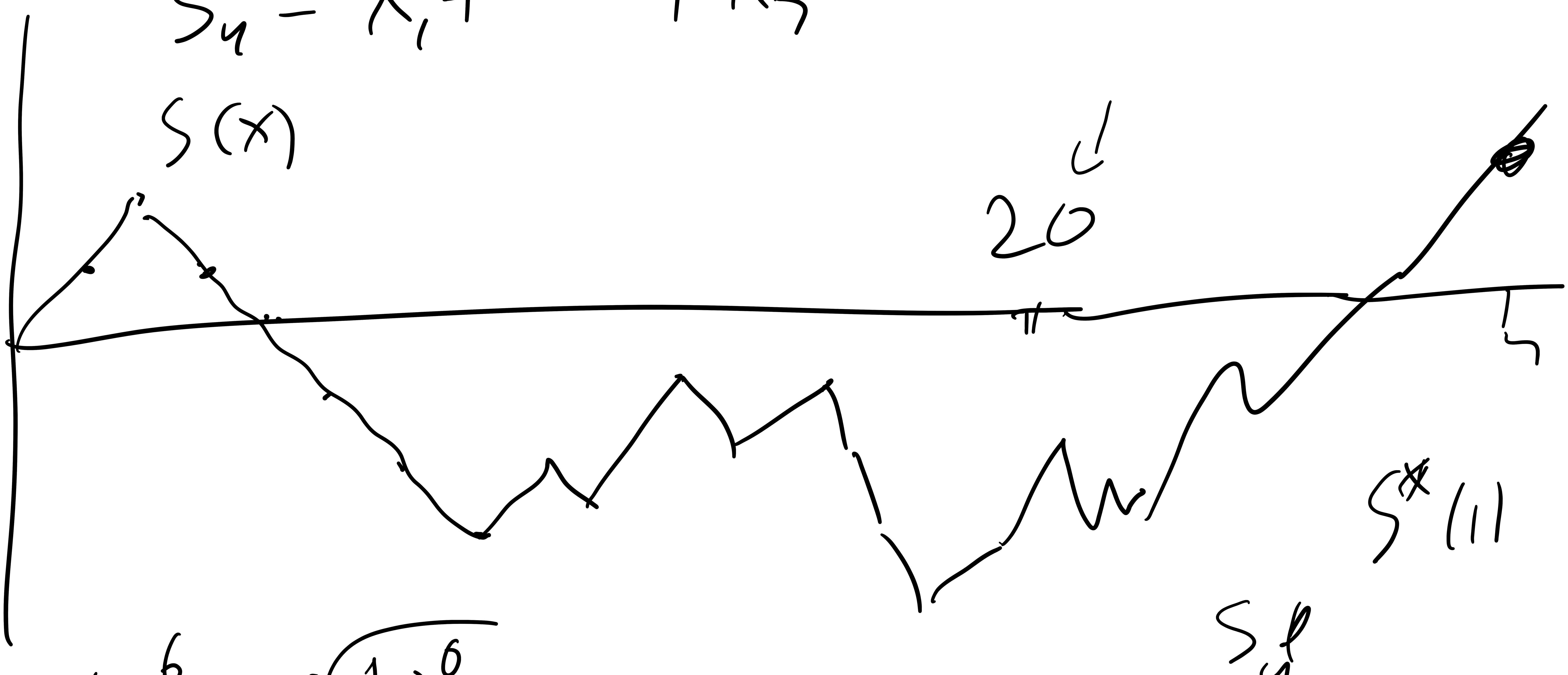
$s > t$



§5.6 Θεώρημα Donsker

(Σχέση Κ.Β με τυχαίο περίπατο)

$S_n = X_1 + \quad + X_n$



10^6 $\sqrt{10^6}$

$(X_i)_{i \geq 1}$ ανεξάρτητες, ισόνομες,

$EX_1 = 0$, $Var(X_1) = 1$

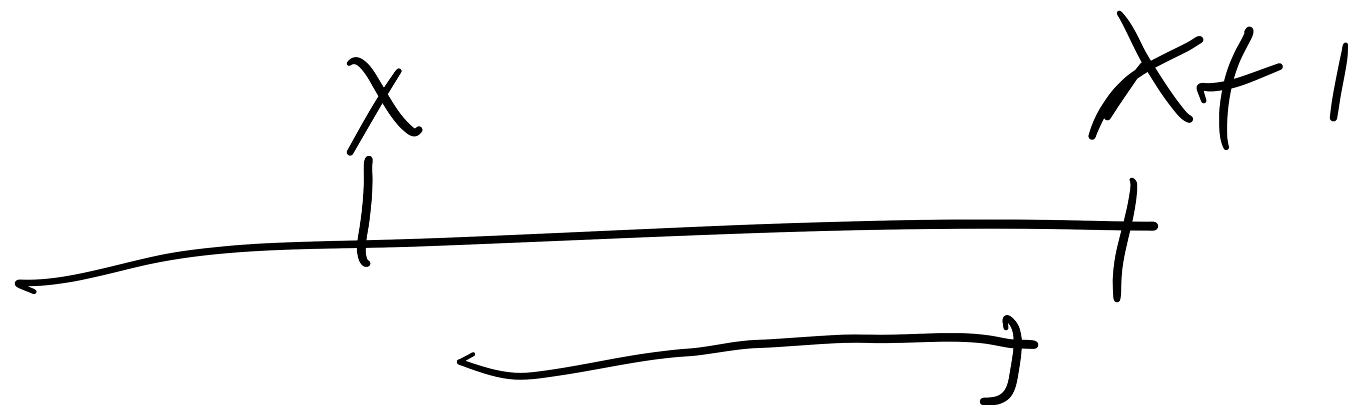
$S_n = X_1 + \quad + X_n$, $S_0 = 0$

Ορίζουμε $S : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με

$$S(x) = \begin{cases} S_x & \text{αν } x \in \mathbb{N} \\ \text{γραμμική επέκταση στο } (x, x+1) & x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$x \in \mathbb{N}$ $\quad (x, x+1)$

Για $t \in (0,1)$



$$S((1-t)x + t(x+1))$$

$$= (1-t)S_x + t S_{x+1}$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, θέτουμε

$S_n^* : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με

$$S_n^*(x) = \frac{S(nx)}{\sqrt{n}}$$

$$S_n^* \in C[0, \infty)$$

$$\|f\|_{[a,b]} = \sup\{ f(x) : x \in [a,b] \}$$

Στον $C[0,\infty)$ ορίζουμε την μετρική

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\|f-g\|_{[0,n]}}{1+\|f-g\|_{[0,n]}}$$

(≤ 1)

$d(f_r, f) \xrightarrow{r\to\infty} 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}^+$ $f_r \to f$ ομοιόμορφα στο $[0,n]$

$\|f_r - f\|_{[0,\infty)} \xrightarrow{r\to\infty} 0$

$f_r(x) = \frac{x}{r}$ $\qquad 0$

$\|f_r\|_{[0,n]} = \frac{n}{r} \xrightarrow{r\to\infty} 0$

S μ.χ. $\quad \mathcal{A} = \mathcal{B}(S)$

$X_n : \Omega_n \to S$, $X : \Omega \to S$ τ.μ.

ορισμός $X_n \Rightarrow X$ (... κατά κατανομή)

αν $E\, g(X_n) \to E\, g(X)$

$\forall g : S \to \mathbb{R}$ συνεχή και φραγμένη

(X_1, X_n με τιμές στο $\mathbb{R}$

$X_n \to X$ αν $P(X_n \le t) \xrightarrow{n\to\infty} P(X \le t)$

$\forall t : P(X=t)=0$)

S_n^* είναι τ.μ. με τιμές στον $C[0,\infty)$

X_1, X_2

$X_1(\omega), X_2(\omega), \quad , X_n(\omega), \quad \dots$

$S_n, \quad S(x), \quad \dfrac{S(nx)}{\sqrt{n}} = S_n^*(x)$

B τ.μ. B η B είναι τ.μ. με τιμές στο $C[0,\infty)$

Θεώρημα (Donsker)

$S_n^* \Longrightarrow B$ για $n\to\infty$.

Δηλ. $E g(S_n^*) \longrightarrow E g(B)$

$\forall g : C[0,\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής

και φραγμένη.

στο $S_n^* \Longrightarrow \sigma B$

Παρατήρηση Donsker $\Longrightarrow$ Κ.Ο.Θ.

έστω $(X_i)_{i \geq 1}$ ανεξάρτητες, ισόνομες,

$E X_1 = 0$, $Var(X_1) = 1$

Ξέρουμε ότι $S_n^* \Longrightarrow B$

$S_n^*(x) = \dfrac{S(nx)}{\sqrt{n}}$ $\dfrac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$

Κ.Ο.Θ. λέει ότι $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \Longrightarrow Z \sim N(0,1)$

$= S_n^*(1)$ $\forall h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχ. φραγμέν.

Δηλ $E\left(h\left(\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right) \longrightarrow E h(Z)$

έστω τέτοια h
Θεωρούμε την $g: C[0,\infty) \to \mathbb{R}$

με $g(f) = h(f(1))$

Αν $f_n \to f$, τότε $\|f_n - f\|_{[0,1]} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

και $f_n(1) \to f(1) \Rightarrow h(f_n(1)) \to h(f(1))$

Άρα η g συνεχής και φραγμένη.

Donsker $\Rightarrow$ $E g(S_n^*) \xrightarrow{n\to\infty} E g(B)$

Όμως

$$E\left(h(S_n^*(1))\right) = E\left(h\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} E\, h(B(1))$$

Όμως $E\, h\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{n\to\infty} E\, h(Z)$

$Z = B(1) \sim N(0,1)$

Άρα $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow Z$

μ, σ^2