Στοχαστικός Λογισμός 2021

Ασκήσεις Ι

1. Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές (σε κοινό χώρο πιθανότητας) ώστε $\mathbf{P}(X < Y) > 0$ και $\mathbf{E}|X|, \mathbf{E}|Y| < \infty$. Θεωρούμε τη σχέση

$$\mathbf{E}(X \mid X < Y) \leqslant \mathbf{E}(X). \tag{1}$$

(α) Να δειχθεί ότι η (1) ισχύει αν υποθέσουμε ένα από τα εξής:

(i) Η Y είναι σταθερή τυχαία μεταβλητή.

(ii) Οι X, Y είναι ανεξάρτητες.

(iii) Ισχύει $(X, Y) \overset{d}{=} (Y, X)$ και $\mathbf{P}(X = Y) = 0$.

(β) Να δειχθεί ότι η υπόθεση $\mathrm{Cov}(X, Y) \leqslant 0$ δεν συνεπάγεται την (1).
[Υποθέτουμε εδώ επιπλέον ότι $\mathbf{E}|XY| < \infty$.]

Σημείωση: Για $A \subset \Omega$ μετρήσιμο με $\mathbf{P}(A) > 0$, ορίζουμε

$$\mathbf{E}(X \mid A) := \frac{1}{\mathbf{P}(A)} \int_A X \, d\mathbf{P}.$$

2. Έστω $(X_n)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{E}|X_1| < \infty$. Θέτουμε $\mathcal{G} := \sigma(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$. Να δειχθεί ότι

(α) $\mathbf{E}(X_i \mid \mathcal{G}) = \mathbf{E}(X_1 \mid \mathcal{G})$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. [Ισότητα με πιθανότητα 1, όχι απλώς ισονομία.]

(β)

$$\mathbf{E}(X_1 \mid \mathcal{G}) = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

3. Άσκηση 5.12 από τις σημειώσεις.

4. (Μηδενικά του συμμετρικού απλού τυχαίου περιπάτου και μηδενικά της κίνησης Brown) Αν $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, θέτουμε

$$N_f := \{t \in [0, 1] : f(t) < 0\}, \tag{2}$$

$$P_f := \{t \in [0, 1] : f(t) > 0\}, \tag{3}$$

$$Z_f := \{t \in [0, 1] : f(t) = 0\}. \tag{4}$$

Αν η f είναι συνεχής, τότε προφανώς $\bar{N}_f \cap \bar{P}_f \subset Z_f$ (για κάθε σύνολο $A \subset \mathbb{R}$, συμβολίζουμε με $\bar{A}$ την κλειστότητά του). Επίσης, θεωρούμε την απεικόνιση $G : C([0, 1]) \to \mathbb{R}$ με

$$G(f) = 0 \vee \sup Z_f.$$

[Αν $Z_f = \emptyset$, τότε $\sup Z_f = -\infty$, και παίρνουμε $G(f) = 0$.]

(α) Να δειχθεί ότι η G είναι συνεχής σε κάθε στοιχείο του συνόλου

$$A := \{f \in C([0, 1]) : Z_f = \bar{N}_f \cap \bar{P}_f\}.$$

(β) Έστω B τυπική κίνηση Brown. Να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(B|[0, 1] \in A) = 1$.
($B|[0, 1]$ είναι ο περιορισμός του μονοπατιού στο $[0, 1]$)

(γ) Έστω $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ο συμμετρικός απλός τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}$ (Παράγραφος 3.1 στις σημειώσεις), και $L_n := \max\{i \leqslant n : S_i = 0\}$. Να δειχθεί ότι

$$\frac{L_n}{n} \Rightarrow \max\{t \in [0, 1] : B_t = 0\}$$

καθώς $n \to \infty$ (σύγκλιση κατά κατανομή).

5. Για κάθε $r \in \mathbb{R}$ θέτουμε $T_r := \inf\{s \geqslant 0 : B_s = r\}$. Έστω $a > 0$ δεδομένο, θέτουμε $T = T_{-a} \wedge T_a$.
(α) Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(e^{-\lambda T}) = \frac{1}{\cosh(a\sqrt{2\lambda})}$$

για κάθε $\lambda > 0$. [Υποδειξη: Για κάθε $r \in \mathbb{R}$, η ανέλιξη $e^{-r^2 t/2}\cosh(rB_t)$ είναι martingale.]
(β) Ας υποθέσουμε ότι η T έχει πυκνότητα f. Να δειχθεί ότι

$$f(t) = \frac{\pi}{2a^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)\exp\left(-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{8a^2}t\right)$$

για κάθε $t > 0$.

[Για την αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace, δείτε για παράδειγμα την παράγραφο 8.2 στο «Βασική Μιγαδική Ανάλυση» των Marsden-Hoffman, μετάφραση Λ. Παπαλουκά.]