Στοχαστικός Λογισμός

Εξέταση 20 Ιουνίου 2017

Στα θέματα 3, 4, 5, $(B_t)_{t\geq 0}$ είναι μια τυπική (μονοδιάστατη) κίνηση Brown.

1. (20 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ διήθηση σε αυτόν. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ και το μέτρο $\mathbf{P}$.
(α) Να δειχθεί ότι $\mathbf{E}(X_n \,|\, \mathcal{F}_m) = X_m$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $m < n$.
(β) Υποθέτοντας επιπλέον ότι $\mathbf{E}(X_n^2) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να δειχθεί ότι η ακολουθία $(X_n^2)_{n\geq 0}$ είναι submartingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ και το μέτρο $\mathbf{P}$.

2. (20 Βαθμοί) (Ένα martingale για την κάλπη του Ehrenfest) Έστω δύο κάλπες A και B. Η κάλπη A περιέχει $N \geq 2$ σφαιρίδια ενώ η B είναι άδεια. Εκτελούμε διαδοχικά το εξής πείραμα. Επιλέγουμε στην τύχη ένα σφαιρίδιο από τα N και το μεταφέρουμε στην άλλη κάλπη από αυτήν από την οποία το εξάγαμε. Έστω A_n ο αριθμός των σφαιριδίων στην κάλπη A μετά την n διεξαγωγή του πειράματος. Προφανώς $A_0 = N, A_1 = N - 1$. Θέτουμε $c := (1 - \frac{2}{N})^{-1}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$$X_n := \begin{cases} A_0 & \text{αν } n = 0, \\ c^n A_n - (c + c^2 + \cdots + c^n) & \text{αν } n \in \mathbb{N}, n \geq 1. \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι:
(α) $\mathbf{E}(A_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = 1 + c^{-1} A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(β) Η ανέλιξη $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

3. (20 Βαθμοί) Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}\left(\int_0^1 B_s^2 e^{B_s}\, ds\right) = \int_0^1 s(1+s)e^{s/2}\, ds.$$

4. (20 Βαθμοί) Να δειχθεί ότι η ανέλιξη $(B_t + t)e^{-B_t - \frac{t}{2}}, t \geq 0$ είναι martingale ως προς τη διήθηση που παράγει η $(B_t)_{t\geq 0}$.

5. (25 Βαθμοί) Έστω $X_t := (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}\, dB_s$ για κάθε $t \in [0, 1)$.
(α) Να δειχθεί ότι η X ικανοποιεί στοχαστική διαφορική εξίσωση της μορφής

$$dX_t = a(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t$$

για κατάλληλες συναρτήσεις a, σ.
(β) Να υπολογιστούν οι $\mathbf{E}(X_t), \mathbf{E}(X_t^2)$.
(γ) Να υπολογιστεί η $\mathbf{E}(X_t^4)$.

Μία $Z \sim N(0,1)$ έχει ροπογεννήτρια $\mathbf{E}(e^{tZ}) = e^{t^2/2}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και ροπές $\mathbf{E}(Z^{2k}) = \frac{(2k)!}{k! 2^k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.

Καλή επιτυχία!