



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ:
ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΙΣ
ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

Μελέτη της νοηματοδότησης των γεωμετρικών
μετασχηματισμών από μαθητές της Ε΄ και Στ΄ τάξης δημοτικού

Παναγιώτα Κωνσταντινίδου, Α.Ε.Μ:63

Επιβλέπων καθηγητής: κ. Γεώργιος Ψυχάρης, Επίκουρος Καθηγητής ΕΚΠΑ

ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥΠΟΛΗ, 2018



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ:
ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΙΣ
ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

Μελέτη της νοηματοδότησης των γεωμετρικών
μετασχηματισμών από μαθητές της Ε΄ και Στ΄ τάξης δημοτικού

Παναγιώτα Κωνσταντινίδου, Α.Ε.Μ:63

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Εργασία Ειδίκευσης υποβλήθηκε στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Δημοκρίτειου Πανεπιστημίου Θράκης για την απόκτηση του τίτλου μεταπτυχιακών σπουδών ειδίκευσης στις Επιστήμες της Αγωγής.

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Επιβλέπων καθηγητής: κ. Γεώργιος Ψυχάρης, Επίκουρος Καθηγητής ΕΚΠΑ
2ο Μέλος: κ. Χαράλαμπος Σακονίδης, Καθηγητής ΔΠΘ
3ο Μέλος: κ. Δραμαλίδης Αχιλλέας, Καθηγητής ΔΠΘ

ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥΠΟΛΗ, 2018

Πνευματικά δικαιώματα

Copyright © Κωνσταντινίδου Παναγιώτα, 2018

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή μέρους ή του συνόλου της παρούσας διατριβής. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για εκπαιδευτικό ή ερευνητικό σκοπό, μη κερδοσκοπικού χαρακτήρα, με την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης.

Η έγκριση της Μεταπτυχιακής Εργασίας Ειδίκευσης από το Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Δημοκρίτειου Πανεπιστημίου Θράκης δεν δηλώνει απαραίτητως την αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα.

Υπεύθυνη Δήλωση

Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας της παρούσας Μεταπτυχιακής Εργασίας Ειδίκευσης και ότι κάθε βοήθεια που προσφέρθηκε στην εκπόνησή της αναγνωρίζεται και αναφέρεται στο κείμενο. Επιπλέον, αναφέρονται όλες οι βιβλιογραφικές πηγές που αξιοποιήθηκαν, πρωτογενείς και δευτερογενείς, είτε η συμβολή τους παρατίθεται επακριβώς ως απόσπασμα είτε ως παράφραση.

Η συγγραφέας της εργασίας

Παναγιώτα Κωνσταντινίδου



**DEMOCRITUS UNIVERSITY OF THRACE
SCHOOL OF EDUCATIONAL SCIENCES
PRIMARY EDUCATION DEPARTMENT
SECTOR OF POSITIVE SCIENCE**

POSTGRADUATE COURSE:
EDUCATIONAL SCIENCES: EDUCATION IN MATHEMATICS AND SCIENCES

MASTER DISSERTATION

**A research on the conceptualization of geometrical
transformations by 5th and 6th grade pupils of primary school.**

Panayiota Konstantinidou

A thesis submitted in partial fulfilment of the
requirements for the degree of Master in Education,
Department of Primary Education, Democritus University of Thrace

COMMITTEE OF EXAMINERS

Supervisor: Mr. Giorgos Psycharis, Assistant Professor UOA
Member 2: Mr. Charalambos Sakonidis, Professor DUTH
Member 3: Mr. Achilleas Dramalidis, Professor DUTH

ALEXANDROUPOLI, 2018

All rights reserved

Copyright © Panayiota Konstantinidou, 2018

The approval of the Master's Dissertation by the Department of Primary Education, Democritus University of Thrace, does not necessarily indicate the acceptance of the views of the author.

Statutory Declaration

I certify that I am the author of this Master's Dissertation thesis and that all the help offered for its compilation is acknowledged and is clearly indicated in the text. Furthermore, all primary as well as secondary resources used as well as the materials appearing in it have been properly quoted and attributed.

The author of the report
Panayiota Konstantinidou

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί αποτελούν ένα σημαντικό κομμάτι της γεωμετρίας, είναι πλούσιοι από εννοιολογική σκοπιά και καλλιεργούν σημαντικές χωρικές ικανότητες. Η παρούσα έρευνα διερευνά τον τρόπο που εξελίσσεται ο λόγος των μαθητών Ε' και Στ' δημοτικού για τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, τον ρόλο των χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων στην εξέλιξη αυτή και τον ρόλο της τέχνης ως πλαίσιο νοηματοδότησης των γεωμετρικών μετασχηματισμών. Υπό τον φακό δύο θεωρητικών πλαισίων, της επικοινωνιογνωστικής προσέγγισης και της σημειωτικής διαμεσολάβησης, σχεδιάστηκε μια παρέμβαση, στηριζόμενη στο θεωρητικό παράδειγμα της έρευνας σχεδιασμού, διάρκειας 10 ωρών περίπου. Εφαρμόστηκε σε μία σχολική τάξη, στο πλαίσιο ενός ομίλου μαθηματικών. Πραγματοποιήθηκε σε τρεις φάσεις, όπου διερευνήθηκε η εξέλιξη του λόγου των μαθητών σχετικά με τους μετασχηματισμούς μέσα από δραστηριότητες στο χαρτί και στο δυναμικό περιβάλλον του Geometer's Sketchpad (GSP) και στο τέλος οι μαθητές δημιούργησαν τα δικά τους έργα με τη βοήθεια του GSP. Ο λόγος του συνόλου των μαθητών φάνηκε να εξελίχτηκε σε πιο μαθηματικοποιημένες εκδοχές. Συγκεκριμένα, η χρήση χειραπτικών εργαλείων μοιάζει να ενίσχυσε τον εμπλουτισμό του λεξιλογίου των μαθητών με δυναμικούς/άτυπους όρους. Η χρήση του GSP βοήθησε τους μαθητές να εστιαστούν στα μαθηματικά που διέπουν τους μετασχηματισμούς και να εμπλουτίσουν το λεξιλόγιό τους με περισσότερο τυπικούς μαθηματικούς όρους. Οι χειρονομίες των μαθητών λειτούργησαν ως λέξεις και ως οπτικοί διαμεσολαβητές που υποστήριζαν την έκφραση μαθηματικών ιδεών. Η τέχνη ως πλαίσιο φάνηκε να βοήθησε το σύνολο των μαθητών να νοηματοδοτήσουν τις μαθηματικές έννοιες. Τα ευρήματά μας επιβεβαιώνουν ότι οι μαθητές του δημοτικού με κατάλληλα εργαλεία και δραστηριότητες μπορούν να έχουν πλούσιες νοηματοδοτήσεις για τους μετασχηματισμούς και να αναπτύξουν σημαντικές δεξιότητες.

ΛΕΞΕΙΣ-ΚΛΕΙΔΙΑ

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, Επικοινωνιογνωστική Προσέγγιση, Σημειωτική Διαμεσολάβηση, Escher, Τέχνη, Δυναμικά Ψηφιακά Περιβάλλοντα

ABSTRACT

The geometric transformations constitute an important part of geometry, they are rich from the conceptual point of view and they also cultivate important spatial abilities. This research explores the evolution of the 5th and 6th grade pupils' discourse, as regards the geometrical transformations, the role of the concrete and digital tools in this evolution, as well as the role of art as a framework for the conceptualization of geometrical transformations. Taking into consideration two theoretical frameworks, Commognition and Semiotic Mediation, an intervention was designed based on the theoretical example of a 10-hour design research. It was implemented into the mathematical club of a class. It was conducted in three phases, in which the pupils' evolution of discourse on transformations was explored, through activities on paper and in the dynamic environment of Geometer's Sketchpad. In the end, the pupils created their own projects with the help of GSP. The discourse of all pupils seemed to have evolved into more mathematical versions. In particular, the use of concrete tools seems to have enhanced the enrichment of their vocabulary with dynamic / informal terms. The use of the GSP helped them to focus on mathematics of transformations and enrich their vocabulary with more formal mathematical terms. Their gestures functioned as words and as visual mediators who supported the expression of mathematical ideas. Art as a framework seemed to have helped all pupils to conceptualize mathematical meanings. Our findings confirm that pupils, having been given the appropriate tools and involved in particular activities, can have rich conceptualizations of transformations and develop important skills.

Keywords

Geometric Transformations, Commognition, Semiotic Mediation, Escher, Art, Dynamic Digital Environments

ΠΡΟΛΟΓΟΣ - ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Γιώργο Ψυχάρη για την υποστήριξη του και τη συνεπή στάση του σε όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας, τη βοήθειά του στην κατανόηση και αποσαφήνιση των ερευνητικών ζητημάτων και τις πολύτιμες συμβουλές του σε θέματα σύνταξης και οργάνωσης της εργασίας μου.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κ. Χαράλαμπο Σακονίδη και Αχιλλέα Δραμαλίδη που με τίμησαν με την παρουσία τους, ως μέλη της συμβουλευτικής και εξεταστικής επιτροπής.

Ευχαριστώ, επίσης, τη φίλη μου και συνάδελφο Αθανασία Ρουσίδου για την υποστήριξη και τη βοήθεια που απλόχερα μου προσέφερε κατά τη διάρκεια εφαρμογής της παρέμβασής.

Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω τους γονείς μου Νεοκλή και Αναστασία Κωνσταντινίδη για την αγάπη και την εμπιστοσύνη που μου δείχνουν σε κάθε επιλογή μου.

Ιδιαίτερως θα ήθελα να ευχαριστήσω το σύζυγό μου Σταύρο Παλατίδη για τη στήριξη και τη βοήθεια που μου προσέφερε, ώστε να καταφέρω να ολοκληρώσω το μεταπτυχιακό πρόγραμμα.

Πάνω από όλα, ένα μεγάλο ευχαριστώ στην κόρη μου Σοφία για την τεράστια υπομονή και κατανόηση που επέδειξε σε όλο το διάστημα των σπουδών μου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΜΕΡΟΣ.....	6
Κεφάλαιο 1 Επισκόπηση της βιβλιογραφίας για τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς.....	6
1.1 Οι νοηματοδοτήσεις των μαθητών για τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς.....	6
1.1.1 Η δυναμική φύση των γεωμετρικών μετασχηματισμών.....	6
1.1.2 Οι δυσκολίες των μαθητών σε έργα γεωμετρικών μετασχηματισμών.....	7
1.2 Η διερεύνηση των μετασχηματισμών με ψηφιακά περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας.....	9
1.3 Η τέχνη ως πλαίσιο μελέτης της έννοιας των μετασχηματισμών.....	11
Κεφάλαιο 2 Το θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας.....	14
2.1 Επικοινωνιογνωστική προσέγγιση.....	14
2.1.1 Ο ρόλος του λόγου (discourse) στη μάθηση των μαθηματικών.....	14
2.1.2 Ο ρόλος των χειρονομιών στην εξέλιξη του μαθηματικού λόγου.....	16
2.2 Σημειωτική διαμεσολάβηση	17
2.2.1 Ο ρόλος των εργαλείων στην κατασκευή μαθηματικών νοημάτων.....	17
2.2.2 Οι σημειωτικές δυνατότητες των ψηφιακών εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας.....	19
2.2.3 Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στη σημειωτική διαμεσολάβηση.....	19
ΕΜΠΕΙΡΙΚΟ ΜΕΡΟΣ.....	21
Κεφάλαιο 3 Μεθοδολογία της έρευνας.....	21
3.1 Στόχοι της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα.....	21
3.2 Τα ψηφιακά και χειραπτικά εργαλεία της παρέμβασης.....	22
3.3 Πλαίσιο της έρευνας και συμμετέχοντες.....	25
3.4 Ερευνητική διαδικασία	25
3.4.1 Α Φάση: Διερεύνηση των νοηματοδοτήσεων των μαθητών για τους μετασχηματισμούς.....	26
3.4.2 Β Φάση: Διερεύνηση των μετασχηματισμών μέσα από την τεχνική των πλακοστρώσεων του Escher.....	28

3.4.3 Γ Φάση: Δημιουργία έργων των μαθητών στο περιβάλλον του GSP.....	31
3.5 Συλλογή δεδομένων.....	32
3.6 Μέθοδος Ανάλυσης.....	32
Κεφάλαιο 4 Αποτελέσματα της έρευνας.....	34
4.1 Η αλλαγή στο λόγο των μαθητών για τους μετασχηματισμούς.....	34
4.1.1 Ο λόγος των μαθητών για τους μετασχηματισμούς κατά την έναρξη της παρέμβασης.....	34
4.1.2 Ο λόγος των μαθητών κατά τη διάρκεια της διερεύνησης με χειραπτικό υλικό.....	42
4.1.3 Ο λόγος των μαθητών κατά τη διερεύνηση των μετασχηματισμών στο περιβάλλον του GSP.....	51
4.2 Ο ρόλος των εργαλείων και της τέχνης στην κατασκευή μαθηματικών νοημάτων...	65
4.2.1 Ο ρόλος των εργαλείων στην εξέλιξη των σημείων	66
4.2.2 Η τέχνη ως πλαίσιο νοηματοδότησης των επίπεδων μετασχηματισμών.....	76
Κεφάλαιο 5 Συζήτηση και συμπεράσματα.....	88
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	94
ΕΥΡΕΤΗΡΙΑ ΕΙΚΟΝΩΝ.....	99
ΕΥΡΕΤΗΡΙΑ ΠΙΝΑΚΩΝ.....	101
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	102

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να διερευνήσει την εξέλιξη της σκέψης των μαθητών της Ε΄ και Στ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου, αναφορικά με τους επίπεδους μετασχηματισμούς, εστιάζοντας στον τρόπο που εξελίσσεται ο μαθηματικός τους λόγος, κατά τη συμμετοχή τους σε ένα κατάλληλα σχεδιασμένο περιβάλλον μάθησης που ενσωματώνει πολλά στοιχεία τέχνης. Επιπρόσθετα, διερευνάται ο ρόλος των χειραπτικών και των ψηφιακών εργαλείων σε αυτή την εξελικτική διαδικασία.

Τα τελευταία χρόνια υπάρχει αυξημένο ενδιαφέρον γύρω από τους μετασχηματισμούς λόγω των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας, καθώς τα υπάρχοντα ευρήματα είναι ενθαρρυντικά ως προς το πώς νοηματοδοτούν οι μαθητές έννοιες της γεωμετρίας που είναι απαιτητικές για τις μικρές ηλικίες.

Οι μετασχηματισμοί εντάσσονται στον γεωμετρικό λογισμό έναν τομέα παραμελημένο στο δημοτικό σχολείο, που ωστόσο είναι σημαντικός. Η γεωμετρική συλλογιστική, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, συνδέεται στενά με δραστηριότητες της καθημερινής ζωής και είναι σημαντική για καριέρες που σχετίζονται με τις φυσικές επιστήμες, τη μηχανική, την τεχνολογία κ.α. Δραστηριότητες που εντάσσονται στη γεωμετρική συλλογιστική καλλιεργούν σημαντικές δεξιότητες όπως η χωρική αντίληψη, η χωρική οπτικοποίηση, η ικανότητα νοερής περιστροφής κ.α. (Sinclair & Bruce, 2015; Κολέζα, 2009). Στα ανώτερα μαθηματικά η γεωμετρική σκέψη είναι αυτή που απαιτείται περισσότερο (Jones, 2001 όπ. αναφ. στο Bruce & Hawes, 2015), ενώ φαίνεται η χωρική ικανότητα να αποτελεί σημαντικό παράγοντα πρόγνωσης στις γενικότερες μαθηματικές επιδόσεις σε όλα τα επίπεδα (Sinclair & Bruce, 2015; Κολέζα, 2009).

Ειδικότερα, η δυναμική γεωμετρία των μετασχηματισμών, δηλαδή το πώς τα σχήματα μετακινούνται, αλλάζουν και αλληλεπιδρούν στο επίπεδο ή στον χώρο (συμμετρίες) (Bruce & Hawes, 2015)¹, αποτελούσαν μια πρακτική γνώση της τέχνης και της αρχιτεκτονικής. Αργότερα, όταν το ενδιαφέρον των μαθηματικών στράφηκε στη θεωρία των μετασχηματισμών, έγιναν μαθηματικά αντικείμενα. Θεωρούνται ένα θεμελιώδες κομμάτι της γεωμετρίας, αλλά και της ίδιας της φύσης, καθώς απαντώνται σε κάθε έκφανσή της, εκφράζοντας ομορφιά, τάξη, τελειότητα (Weyl, 1952 όπ. αναφ. στους Swoboda & Vighi, 2016). Φαίνεται, λοιπόν, η τέχνη να αποτελεί ένα κατάλληλο πλαίσιο ανάδειξης των σχετικών μαθηματικών ιδεών.

Οι μετασχηματισμοί θεωρούνται σημαντικές έννοιες τόσο για να μελετηθούν αυτές οι ίδιες, όσο και γιατί χρησιμοποιούνται ως ισχυρά εργαλεία επίλυσης προβλήματος (Sinclair, 2015 και Geary et al, 2000 όπ. αναφ. στο Bruce & Hawes, 2015). Εμπεριέχουν και καλλιεργούν σε μεγάλο βαθμό την ικανότητα νοερής περιστροφής, η οποία αποτελεί γνωστική διαδικασία που μπορεί να αποτελέσει μια σημαντική στρατηγική και ένα απαραίτητο γνωστικό εργαλείο των μαθητών για την εμπλοκή τους σε μαθηματικά έργα (Cheng & Mix, 2013 όπ. αναφ. στο Bruce &

¹ Στην παρούσα εργασία οι όροι συμμετρίες και μετασχηματισμοί θεωρούνται ταυτόσημοι και χρησιμοποιούνται και οι δύο για να εκφράσουν την ίδια μαθηματική έννοια. Επίσης, μελετώνται μόνο οι μετασχηματισμοί στο επίπεδο.

Hawes, 2015). Επίσης, οι συμμετρίες μπορούν να λειτουργήσουν ως ένα ισχυρό εργαλείο περιγραφής, αναγνώρισης και ταξινόμησης δισδιάστατων και τρισδιάστατων αντικειμένων (Ng & Sinclair, 2015). Σημαντικό επίσης είναι το γεγονός ότι οι μετασχηματισμοί είναι πολύ πλούσιοι από εννοιολογική σκοπιά. Δραστηριότητες σχετικές με αυτούς απαιτούν ικανότητες όπως παρατήρηση, ταξινόμηση, αναγνώριση προτύπων, έλεγχος αποστάσεων και διευθύνσεων. Απαιτούνται συντονισμός ματιού και χεριού, επιχειρηματολογία, χρήση της γλώσσας, λογική σκέψη και ευελιξία (Swoboda & Vighi, 2016).

Στο Νέο Αναλυτικό πρόγραμμα για το δημοτικό σχολείο (2003), επισημαίνεται: *...η προσέγγιση των γεωμετρικών σχημάτων περιλαμβάνει τέσσερις κατηγορίες δράσεων: αναγνώριση κατηγοριών σχημάτων, αναγνώριση των ιδιοτήτων των σχημάτων, αναγνώριση των ιδιοτήτων των κατηγοριών, κατασκευές-αναλύσεις/συνθέσεις σχημάτων. Οι δράσεις αυτές συμπληρώνονται με τους μετασχηματισμούς των σχημάτων που αφορούν μετατοπίσεις, στροφές, συμμετρίες και ομοιότητα...*

Στην Ευκλείδεια γεωμετρία του επιπέδου οι μετασχηματισμοί αποτελούν μετακινήσεις ενός γεωμετρικού αντικειμένου με κάποιο τρόπο. Οι σχετικές θέσεις των σημείων του αντικειμένου παραμένουν αμετάβλητες, ενώ μπορεί να μεταβάλλονται οι απόλυτες θέσεις τους. Το γεωμετρικό αντικείμενο διατηρεί τις γεωμετρικές του ιδιότητες. Έτσι, κατά το μετασχηματισμό διατηρούνται σταθερές αποστάσεις, τυχόν παραλληλίες, αναλογίες, γωνίες, μεγέθη και σχήματα (Panaoura et al, 2009).² Επίσης, στους μετασχηματισμούς υπάρχουν οι παράμετροι που είναι διαφορετικοί για κάθε μετασχηματισμό. Έτσι, στη μετάθεση είναι η διεύθυνση και η απόσταση μετάθεσης, στην περιστροφή το σημείο περιστροφής και η γωνία περιστροφής και στην ανάκλαση ο άξονας ανάκλασης (Hollebrands, 2003).

Υπάρχουν τέσσερις βασικές κατηγορίες επίπεδων μετασχηματισμών. Ωστόσο, στην παρούσα εργασία θα διερευνήσουμε τρεις από αυτές:

Στροφή ή περιστροφή κατά γωνία θ (με $\theta \in (-\pi, \pi]$) και κέντρο της στροφής ένα σημείο O , ορίζεται ο μετασχηματισμός του επιπέδου, κατά τον οποίο το O παραμένει σταθερό, ενώ ένα σημείο A αντιστοιχίζεται στο A' , το διάνυσμα OA είναι ίσο με το διάνυσμα OA' και η γωνία AOA' είναι ίση με τη γωνία θ (Martin, 1982). Κάθε στροφή έχει δύο κύρια χαρακτηριστικά: τη γωνία στροφής και το κέντρο στροφής.

Ανάκλαση ως προς μια ευθεία (ε) του επιπέδου (άξονας ανάκλασης ή συμμετρίας) είναι η απεικόνιση, όπου σε κάθε σημείο A του επιπέδου αντιστοιχεί το συμμετρικό του σε A' , ως προς την ευθεία αυτή. Αν σημείο P δεν ανήκει στην ευθεία (ε), τότε απεικονίζεται στο σημείο P' του επιπέδου έτσι ώστε η ευθεία (ε) να είναι η μεσοκάθετος του διανύσματος PP' (Martin, 1982). Βασικό χαρακτηριστικό της ανάκλασης είναι ο άξονας ανάκλασης ή συμμετρίας.

Παράλληλη μεταφορά κατά διάνυσμα a ονομάζεται ο μετασχηματισμός του επιπέδου κατά τον οποίο κάθε σημείο A αντιστοιχίζεται στο σημείο A' , ώστε το

² Στην παρούσα εργασία αναφερόμαστε στις ισομετρικές συμμετρίες, κατά τις οποίες διατηρούνται οι αποστάσεις των σημείων: Δηλαδή εάν $A'=M(A)$ και $B'=M(B)$, τότε $AB=A'B'$ (Martin, 1982)

διάνυσμα AA' να έχει ίσο μήκος και να είναι παράλληλο και ομόρροπο (συγγραμικό) με το διάνυσμα a . Κάθε μεταφορά μετασχηματίζει δύο τυχαία σημεία A και B σε δύο σημεία A' και B' αντίστοιχα, ώστε τα διανύσματα $A'B'$ και AB να είναι ίσα (Martin, 1982). Κάθε μεταφορά έχει δύο κύριες παραμέτρους, τη διεύθυνση και την απόσταση.

Τα ελληνικά διδακτικά εγχειρίδια στο δημοτικό σχολείο αναφέρονται κυρίως στην έννοια του μοτίβου και την κατοπτρική συμμετρία. Οι σχετικές δραστηριότητες αντιμετωπίζουν τι έννοιες αυτές με στατικό τρόπο. Δεν διερευνώνται ως δυναμικές μετακινήσεις αντικειμένων στο επίπεδο και δεν γίνεται αναφορά στις παραμέτρους τους, με αποτέλεσμα οι μαθητές να μην έρχονται σε επαφή με αυτή την προσέγγιση. Η διδασκαλία και η μάθηση των μετασχηματισμών απαιτεί εργαλεία, δραστηριότητες και επικοινωνιακές ευκαιρίες που βοηθούν τους μαθητές να επικεντρώνονται στη δυναμική δράση των μετασχηματισμών και στα αποτελέσματά τους (Ng & Sinclair, 2015). Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω δεδομένα, η παρούσα εργασία εφάρμοσε μία παρέμβαση που εμπεριέχει δραστηριότητες οι οποίες διερευνούν τη δυναμική πτυχή των μετασχηματισμών. Σε πολλές από αυτές επιλέχθηκε το ψηφιακό εργαλείο Geometer's Sketchpad (GSP) γιατί ο δυναμικός του χαρακτήρας φαίνεται να δημιουργεί το κατάλληλο περιβάλλον για τη διερεύνηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών. Η αναπαράσταση ενός μαθηματικού αντικειμένου σε ένα δυναμικό ψηφιακό περιβάλλον, όπως αυτό του GSP, διαφέρει από αυτή στο χαρτί, καθώς στην πρώτη περίπτωση γίνεται περισσότερο ορατό ποιες από τις ιδιότητες του αντικειμένου παραμένουν σταθερές και ποιες μεταβάλλονται (Sinclair & Yurita, 2008). Κατά συνέπεια αλλάζει ο τρόπος αλληλεπίδρασης των μαθητών με τα μαθηματικά αντικείμενα (Jackiw & Sinclair, 2009).

Παράλληλα, οι δραστηριότητες της παρέμβασης πλαισιώνονται από έργα τέχνης, καθώς, όπως επισημάνθηκε, οι έννοιες των γεωμετρικών μετασχηματισμών συνδέονται στενά με την τέχνη και νοηματοδοτούνται μέσα από αυτήν. Για το σκοπό αυτό επιλέχθηκαν παραδείγματα τοιχοποιίας από τα Ξυστά στο Πυργί της Χίου και έργα του Escher που δημιουργήθηκαν με την τεχνική των κανονικών πλακοστρώσεων. Η επιλογή των ξυστών κρίθηκε κατάλληλη γιατί η μορφή τους είναι απλή, αποτελούνται από γνωστά στους μαθητές σχήματα και μοιάζουν με τα μοτίβα που οι μαθητές έρχονται σε επαφή στο σχολείο. Από την άλλη, επιλέχθηκε η τεχνική των πλακοστρώσεων του Escher, γιατί μοιάζει να αποτελεί έναν αποτελεσματικό τρόπο διερεύνησης των μαθηματικών ιδεών, καθώς είναι εποπτική, αναδύονται μέσα από αυτήν πολλές γεωμετρικές έννοιες, συνδέεται ισχυρά με την έννοια των μετασχηματισμών και μπορεί να διερευνηθεί με δυναμικό τρόπο σε ένα ψηφιακό περιβάλλον. Σε σχετική έρευνα (Ford & Gold, 2008) η δημιουργία πλακοστρώσεων με την τέχνη του Escher φάνηκε να είναι ένα κινητήριο εργαλείο διερεύνησης των μαθηματικών ιδεών των επίπεδων μετασχηματισμών στο δημοτικό σχολείο.

Ως πλακόστρωση (tesselation) ορίζεται η κάλυψη του επιπέδου με μία επαναλαμβανόμενη μονάδα-πλακίδιο (tile), που αποτελείται από ένα ή περισσότερα σχήματα, τα οποία έχουν κοινά σημεία μόνο στα όριά τους, έτσι ώστε να μη δημιουργούνται κενά και επικαλύψεις. Η διαδικασία κάλυψης του επιπέδου

συνεχίζεται επ' άπειρον, καθώς το πρότυπο επαναλαμβάνεται προς όλες τις διευθύνσεις (Eberle, 2014; Harris, 2000; Χασάπης, 2015). Σε κάθε πλακόστρωση υπάρχουν σημεία (tiling vertex) όπου συναντιούνται οι γωνίες τριών ή περισσότερων πλακιδίων. Μία πλακόστρωση, όπου ένα κανονικό (regular) πολύγωνο επαναλαμβάνεται, λέγεται κανονική πλακόστρωση. Τα μόνα κανονικά πολύγωνα που μπορούν να δημιουργήσουν πλακόστρωση είναι τα τετράγωνα, τα ισόπλευρα τρίγωνα και τα εξάγωνα. Αυτό συμβαίνει γιατί σε κάθε σημείο της κανονικής πλακόστρωσης, το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών των σχημάτων που συναντιούνται είναι 360 μοίρες (Χασάπης, 2015). Ο τρόπος που δημιουργείται μια πλακόστρωση είναι οι συμμετρίες, που μέσω άκαμπτων³ κινήσεων αποτυπώνουν την πλακόστρωση επάνω στο επίπεδο. Για οποιαδήποτε δύο γειτονικά πλακίδια σε μία πλακόστρωση θα υπάρχει μια άκαμπτη κίνηση που αποτυπώνει το πρώτο επάνω στο δεύτερο (Kaplan & Salesin, 2000).

Εξαιτίας του γεγονότος ότι οι νοητικές αλλαγές δε γίνονται εύκολα αντιληπτές, τα τελευταία χρόνια αναπτύχθηκε η επικοινωνιογνωστική προσέγγιση σύμφωνα με την οποία η μαθηματική σκέψη των μαθητών αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της επικοινωνιακής δραστηριότητας και μπορεί να γίνει αντιληπτή μέσα από την παρατήρηση του μαθηματικού λόγου. Για τη θεωρία αυτή μάθηση αποτελεί αλλαγή του μαθηματικού λόγου των μαθητών με τέτοιο τρόπο, ώστε να αποκτήσει τα χαρακτηριστικά του λόγου που εκφέρεται από τη μαθηματική κοινότητα. Στην παρούσα έρευνα, όπου μελετήθηκε η εξέλιξη της σκέψης των μαθητών αναφορικά με τις έννοιες των μετασχηματισμών, υιοθετήθηκε η προσέγγιση αυτή γιατί οι δραστηριότητες που σχεδιάσαμε ενθάρρυναν τους μαθητές να χρησιμοποιούν πλούσιους επικοινωνιακά τρόπους για να εκφραστούν, ενώ τα ψηφιακά δυναμικά περιβάλλοντα που χρησιμοποιήσαμε προκαλούσαν την επικοινωνία και την επιχειρηματολογία. Ιδιαίτερη σημασία δόθηκε στις χειρονομίες, αφού οι μαθητές αυτής της ηλικίας τις χρησιμοποιούν πολύ έντονα για να εκφράσουν μαθηματικά νοήματα, καθώς δεν έχουν ανεπτυγμένο μαθηματικό λόγο.

Επίσης, η βιβλιογραφία αναδεικνύει σημαντικά τα εργαλεία και τον τρόπο που διαμεσολαβούν για την κατανόηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών (Ng & Sinclair, 2015). Η θεωρία της Σημειωτικής Διαμεσολάβησης (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) αναλύει το ρόλο των χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων και του τρόπου που αυτά μετατρέπονται σε ψυχολογικά εργαλεία και παράγουν μαθηματικά νοήματα. Η προσέγγιση αυτή υιοθετείται από την παρούσα έρευνα γιατί οι μαθητές μικρής ηλικίας χρειάζονται εργαλεία για τη διερεύνηση δύσκολων για αυτούς μαθηματικών εννοιών, όπως είναι οι μετασχηματισμοί. Οι δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν εμπεριέχουν τη χρήση χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων και διερευνάται ο ρόλος τους αναφορικά με την εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης.

Υπό τον φακό των δύο παραπάνω θεωρητικών πλαισίων και λαμβάνοντας υπ' όψη τα ερευνητικά δεδομένα σχετικά με τη διδασκαλία των γεωμετρικών μετασχηματισμών σχεδιάστηκε μια παρέμβαση, στηριζόμενη στο θεωρητικό

³ Με την έννοια ότι περιορίζονται στο επίπεδο

παράδειγμα της έρευνας σχεδιασμού, διάρκειας 9 ωρών περίπου. Η παρέμβαση εφαρμόστηκε σε μία ομάδα οχτώ μαθητών των δύο τελευταίων τάξεων του δημοτικού σχολείου, στο πλαίσιο ενός ομίλου μαθηματικών. Πραγματοποιήθηκε σε τρεις φάσεις. Στην πρώτη φάση διερευνήθηκε ο λόγος των μαθητών σχετικά με τους μετασχηματισμούς μέσα από δραστηριότητες στο χαρτί και στο δυναμικό περιβάλλον. Στη δεύτερη φάση οι μαθητές εξοικειώθηκαν με τους μετασχηματισμούς μέσα από την τεχνική του Escher. Στην τρίτη φάση οι μαθητές κλήθηκαν να εφαρμόσουν τις ιδέες τους, δημιουργώντας τα προσωπικά τους έργα με τη βοήθεια του ψηφιακού εργαλείου GSP. Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης διερευνήθηκε ο τρόπος που εξελίχθηκε ο λόγος των μαθητών αναφορικά με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς κατά τη συμμετοχή τους στις δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν. Επίσης διερευνήθηκε και ο ρόλος των χειραπτικών και των ψηφιακών εργαλείων στην εξέλιξη αυτή. Ποιο συγκεκριμένα, μελετήθηκε η διαδικασία κατά την οποία τα ανθρώπινα εργαλεία αποκτούν μαθηματική υπόσταση και μετατρέπονται σε μαθηματικά σημεία. Παράλληλα διερευνήθηκε και ο ρόλος της τέχνης στην νοηματοδότηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών.

Το πρώτο κεφάλαιο της εργασίας περιλαμβάνει την επισκόπηση της βιβλιογραφίας και αφορά έρευνες σχετικά με τις νοηματοδοτήσεις των μαθητών για τους μετασχηματισμούς, τους τρόπους που μπορούν να λειτουργήσουν από κοινού τα μαθηματικά και η τέχνη, τα ψηφιακά περιβάλλοντα και πώς αυτά επηρεάζουν τη μαθηματική σκέψη.

Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφεται το θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας που στηρίζεται στην επικοινωνιογνωστική προσέγγιση και στη σημειωτική διαμεσολάβηση.

Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφεται η μεθοδολογία της έρευνας, τα ερευνητικά ερωτήματα, το είδος των δεδομένων, ο σχεδιασμός και ο τρόπος ανάλυσης της έρευνας.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας μέσω της ανάλυσης κρίσιμων συμβάντων. Σε αυτά εντοπίζονται αλλαγές στο λόγο των μαθητών καθώς επικοινωνούν τις ιδέες τους για τους μετασχηματισμούς, ενώ στη συνέχεια διερευνάται ο ρόλος των χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων στη διαμεσολάβηση αυτών των ιδεών και ο ρόλος της τέχνης στη νοηματοδότησή τους.

Στο πέμπτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα αποτελέσματα της έρευνας και συνδέονται με τη βιβλιογραφία.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ -ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Κεφάλαιο 1

Επισκόπηση της βιβλιογραφίας για τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς

Στο κεφάλαιο αυτό παρατίθεται η υφιστάμενη γνώση σχετικά με τις κρίσιμες πτυχές των εννοιών που αφορούν τους επίπεδους μετασχηματισμούς. Στο υποκεφάλαιο 1.1 αναλύονται οι νοηματοδοτήσεις των μαθητών για τους μετασχηματισμούς, καθώς κρίθηκε ότι η γνώση για τον τρόπο που οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις σχετικές έννοιες αποτελεί καθοριστικό παράγοντα για τις ερευνητικές και διδακτικές επιλογές της παρούσας έρευνας. Επιπρόσθετα, η παρέμβαση που εφαρμόστηκε στηρίχτηκε σε δύο βασικές συνιστώσες, την τέχνη και το ψηφιακό περιβάλλον. Έτσι, στο υποκεφάλαιο 1.2 περιγράφονται έρευνες που διερευνούν τον τρόπο που η τέχνη επιδρά στην εξέλιξη της σκέψης των μαθητών σχετικά με τις συμμετρίες. Στο υποκεφάλαιο 1.3 αναδεικνύονται οι δυνατότητες του ψηφιακού περιβάλλοντος, ως εργαλείου που βοηθά στη δόμηση της γεωμετρικής σκέψης.

1.1 Οι νοηματοδοτήσεις των μαθητών για τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς

Ο γεωμετρικός κόσμος είναι οικείος στα παιδιά των μικρών ηλικιών. Οι γεωμετρικές έννοιες είναι πιο κοντά στην αντίληψη τους από τις αριθμητικές, ενώ η γεωμετρική γνώση συσχετίζεται με τη φυσική γνώση που αποκτούν για τον κόσμο. Έννοιες όπως η κανονικότητα, χαρακτηριστικό των συμμετριών, είναι ελκυστική, ενώ από μικρή ηλικία τα παιδιά είναι σε θέση να αναγνωρίζουν κανονικές συμμετρικές μορφές και σχήματα (Swoboda & Vighi, 2016). Η αναγνώριση της κανονικότητας μπορεί να συναντηθεί στο επίπεδο 0 του Van Hiele, όπου τα αντικείμενα αναγνωρίζονται από την εμφάνισή τους (Van de Walle, 2005). Ωστόσο, έρευνες που εξετάζουν τη σκέψη των μαθητών μικρής ηλικίας αναδεικνύουν ότι η εκτέλεση των γεωμετρικών μετασχηματισμών είναι μια πολυδιάστατη νοητική διεργασία που δυσκολεύει τους μαθητές (Kider, 1976 όπ. αναφ. στο Ξυστούρη & Πίττα-Πανταζή, 2011). Το πρώτο υπο-υποκεφάλαιο που ακολουθεί επικεντρώνεται στη δυναμική φύση των μετασχηματισμών, η οποία αποτελεί την κύρια αιτία δυσκολίας των μικρών μαθητών. Στο δεύτερο υπο-υποκεφάλαιο εντοπίζονται τα σημεία στα οποία οι μαθητές δυσκολεύονται όταν εμπλέκονται σε έργα με γεωμετρικούς μετασχηματισμούς.

1.1.1 Η δυναμική φύση των γεωμετρικών μετασχηματισμών

Η δυσκολία των μικρών μαθητών να κατανοήσουν την έννοια των μετασχηματισμών οφείλεται στο γεγονός ότι για την ενασχόληση με ανάλογα έργα απαιτούνται η εξοικείωση με τα σχήματα και τις ιδιότητές τους, καθώς και δυναμικές χωρικές

ικανότητες, όπως αυτή της οπτικοποίησης, δηλαδή της ικανότητας νοερού χειρισμού των αντικειμένων (Κολέζα, 2009). Επίσης, άλλες έρευνες αναφέρουν (Swoboda & Vighi, 2016) ότι τα παιδιά μικρής ηλικίας επικεντρώνονται σε συγκεκριμένα κάθε φορά φαινόμενα, όπως για παράδειγμα στο ίδιο το αντικείμενο, στο σχήμα του ή στη σχετική θέση μεταξύ δύο αντικειμένων. Αυτό σημαίνει ότι η αντίληψη των μαθητών εμφανίζεται να είναι στατική, ενώ επηρεάζεται και από αισθητικά κριτήρια. Αυτή η στατική αντίληψη αποτελεί εμπόδιο για την κατανόηση των μετασχηματισμών, οι οποίοι αποτελούνται από πρότυπα που επαναλαμβάνονται, κάτι που υποδηλώνει συνέχεια και κίνηση. Τα πρότυπα αυτά για να γίνουν αντιληπτά απαιτούν αναγνώριση, κατανόηση της δομής τους και ικανότητα αναπαραγωγής τους. Η κατανόηση της δομής των γεωμετρικών μετασχηματισμών είναι σύνθετη και δύσκολη διαδικασία και απαιτεί κατάλληλες δραστηριότητες που να εμπεριέχουν και δυναμικές πτυχές, ώστε οι μαθητές να αντιληφθούν τη δυναμικότητα και τη συνέχεια του προτύπου και σταδιακά να ξεφύγουν από την περιορισμένη ματιά που το αντιλαμβάνονται.

Συνεπώς, έχει νόημα να σχεδιάζονται κατάλληλες δραστηριότητες που να δομούν την έννοια των γεωμετρικών μετασχηματισμών αναδεικνύοντας όλα τα παραπάνω. Σχετικές έρευνες δείχνουν ότι η χωρική ικανότητα μπορεί να καλλιεργηθεί ή να βελτιωθεί μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες. Για παράδειγμα, η εμπλοκή μαθητών ηλικίας 4 έως 8 ετών σε έργα δυναμικών χωρικών έργων είχε θετικό αντίκτυπο στην ικανότητά τους να εκτελούν νοερές περιστροφές στο δισδιάστατο και τρισδιάστατο επίπεδο (Bruce & Hawes, 2015).

1.1.2 Οι δυσκολίες των μαθητών σε έργα γεωμετρικών μετασχηματισμών

Όπως έχει επισημανθεί στο εισαγωγικό μέρος, στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς σημεία του επιπέδου απεικονίζονται σε άλλα σημεία του επιπέδου μέσα από μία διαδικασία μετακίνησης⁴. Αυτή η διαδικασία για να είναι κατανοητή περιλαμβάνει την κατανόηση των βασικών παραμέτρων των μετασχηματισμών, των σχέσεων μεταξύ αυτών των παραμέτρων, τον τρόπο που συνδέονται τα αντικείμενα στην αρχική και στην τελική τους θέση και των ιδιοτήτων που διατηρούνται σε κάθε μετασχηματισμό (Hollebrands, 2003).

Σχετικά με τον τρόπο που κατανοούν οι μαθητές του δημοτικού σχολείου τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, έρευνες όπως αυτή των Schultz & Austin (1983) έδειξαν ότι οι μαθητές δεν αντιμετώπιζαν δυσκολίες στον μετασχηματισμό της μετάθεσης, ανεξάρτητα της διεύθυνσης της. Αντίθετα, φαίνεται πως η διεύθυνση ήταν ένας παράγοντας που επηρέαζε την κατανόηση της στροφής και της ανάκλασης. Σε άλλη έρευνα (Callingham, 2004), όπου μελετήθηκαν οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί μέσα από τις πλακοστρώσεις, διαπιστώθηκε ότι οι περισσότεροι μαθητές του δημοτικού σχολείου ήταν σε θέση να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν τα σχήματα από τα οποία αποτελούνταν οι πλακοστρώσεις. Η αναγνώριση, ωστόσο, των

⁴ Οι μετασχηματισμοί στην παρούσα εργασία δεν διερευνώνται ως συνάρτηση, αλλά υπό την έννοια της μετακίνησης

μετασχηματισμών ήταν περιορισμένη, ιδιαιτέρως όταν τα γεωμετρικά σχήματα ήταν λιγότερο οικεία. Κάποιοι μαθητές αντιλήφθηκαν την πλακόστρωση ως το αποτέλεσμα της μετακίνησης σχημάτων χρησιμοποιώντας, ωστόσο, μη τυπικούς όρους για την περιγραφή τους.

Ο μετασχηματισμός της ανάκλασης αποτελεί τον πιο οικείο μετασχηματισμό για τους μαθητές του δημοτικού σχολείου. Η ικανότητα τους σε έργα ανάκλασης ελέγχεται από τρεις παράγοντες σύμφωνα με τους Ξυστούρη & Πίττα-Πανταζή (2011). Την αναγνώριση των ιδιοτήτων της ανάκλασης, τον προσδιορισμό της σχέσης του αντικειμένου με το είδωλό του και την κατασκευή ανακλώμενων σχημάτων. Τα αποτελέσματά της έρευνας έδειξαν ότι τα πιο συνηθισμένα λάθη των μαθητών ήταν ότι τοποθετούσαν το αντικείμενο σε λανθασμένη απόσταση από τον άξονα συμμετρίας και δυσκολεύονταν να αναγνωρίσουν τη διεύθυνσή του όταν αυτός ήταν υπό κλίση.

Διερευνώντας τις αρχικές ιδέες των μαθητών λυκείου η Hollebrands (2004) διαπίστωσε ότι αντιλαμβάνονταν τους μετασχηματισμούς ως κινήσεις σχημάτων, αλλά δεν κατανοούσαν τον ρόλο των παραμέτρων τους. Ο μετασχηματισμός που ήταν περισσότερο οικείος για αυτούς ήταν η ανάκλαση, την οποία αποκαλούσαν καθρέφτη. Ομοίως με τους Schultz & Austin, η Hollebrands διαπίστωσε ότι ο μη κατακόρυφος άξονας ανάκλασης δυσκόλευε τους μαθητές. Η μετάθεση ήταν ο μετασχηματισμός στον οποίο οι μαθητές αντιμετώπισαν τα περισσότερα προβλήματα. Τέλος, αναφορικά με την περιστροφή οι προβλέψεις για γωνίες 90, 180 και 270 μοιρών ήταν περισσότερο επιτυχημένες, ενώ η επιλογή του σημείου περιστροφής τους δυσκόλεψε ιδιαίτερα.

Φαίνεται η περιστροφή να αποτελεί έναν μετασχηματισμό που δυσκολεύει τους μαθητές σε όλες τις ηλικίες, εξαιτίας του γεγονότος ότι η κατανόηση της περιστροφής στηρίζεται στην κατανόηση της έννοιας της γωνίας. Ειδικότερα στους μετασχηματισμούς, η έννοια της γωνίας παίρνει μια πιο δυναμική μορφή, όπου δεν έχει τη στατική έννοια της γωνίας ενός σχήματος, αλλά αφορά το μέτρο με το οποίο περιστρέφεται ένα γεωμετρικό αντικείμενο. Η αντίληψη της γωνίας με την έννοια της στροφής φαίνεται να είναι αυτή που δυσκολεύει ακόμη περισσότερο τους μαθητές (Mitchelmore 1998; Clements, Battista, Sarama and Swaminathan, 1996 όπ. αναφ. στους Sinclair & Bruce, 2015). Ένα άλλο νοητικό εμπόδιο είναι η υπεροχή της ορθής γωνίας η οποία γίνεται αντιληπτή ως πρότυπο γωνία, με αποτέλεσμα πολλοί μαθητές να δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν γωνίες μικρότερες ή μεγαλύτερες οι οποίες δεν είναι πολλαπλάσια της ορθής (Devichi and Munier, 2013 όπ. αναφ. στους Sinclair & Bruce, 2015).

Συνοψίζοντας, η κανονικότητα των συμμετριών είναι ελκυστική ιδιότητα και αναγνωρίσιμη από τους μαθητές, οι οποίοι όμως φαίνεται να έχουν μια στατική αντίληψη για αυτούς. Συνεπώς, χρειάζονται κατάλληλες δραστηριότητες που να τους επιτρέπουν να κατανοούν τη δομή των μετασχηματισμών και να αντιλαμβάνονται τη δυναμική φύση τους. Από τις σχετικές έρευνες μοιάζει η ανάκλαση να είναι εύκολα αντιληπτός μετασχηματισμός, αλλά ο μη κατακόρυφο άξονα φαίνεται να δυσκολεύει

τους μαθητές, ενώ η περιστροφή είναι ο μετασχηματισμός που δημιουργεί τα περισσότερα νοητικά εμπόδια καθώς σχετίζεται με την έννοια της γωνίας.

1.2 Η διερεύνηση των μετασχηματισμών με ψηφιακά περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας

Ένα μεγάλο μέρος των ερευνών από τα μέσα της δεκαετίας του '90 αξιοποίησε τα δυναμικά περιβάλλοντα γεωμετρίας (Dynamic Geometry Environments - DGE), καθώς φαίνεται να βοηθούν στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης (Hollebrands & Lee 2016; Ng & Sinclair, 2015; Tatar et al, 2014). Τα περιβάλλοντα αυτά δεν αποτελούν απλώς ένα επιπρόσθετο εργαλείο της διδακτικής διαδικασίας, αλλά συνιστούν συστατικό της στοιχείο αλληλεπιδρώντας με όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της. Οι μαθητές δημιουργούν ατομικές αναπαραστάσεις και νοητικές κατασκευές που τους επιτρέπουν να εκτελούν δραστηριότητες με το δυναμικό εργαλείο, οδηγούμενοι κατ' επέκταση, σύμφωνα με τη θεωρία του Vygotsky, στη δόμηση της ίδιας της μαθηματικής γνώσης (Laborde, 2001). Μια αναπαράσταση ενός μαθηματικού αντικειμένου διαφέρει σε ένα δυναμικό περιβάλλον από αυτήν στο χαρτί, γιατί η πρώτη μπορεί να μεταμορφωθεί και να μεταβληθεί διατηρώντας αναλλοίωτα κάποια χαρακτηριστικά (Gomes και Vergnaud, 2004 όπ. αναφ. στους Sinclair & Yurita, 2008). Η διαφορά αυτή είναι εννοιολογική, καθώς στα δυναμικά περιβάλλοντα αναδύονται διαφορετικές ιδέες από αυτές που αναδύονται στο χαρτί (Sinclair & Yurita, 2008).

Ο όρος «δυναμικός» εμπεριέχει από τη μια τη μαθηματική διάσταση, όπου ερμηνεύεται ως μια ισχυρή, αν και πρόσκαιρη, αναπαράσταση μιας εξέλιξης και μιας συνεχούς αλλαγής και από την άλλη την παιδαγωγική διάσταση που αναφέρεται στην αμεσότητα της αλληλεπίδρασης με τη μαθηματική αναπαράσταση. Αυτές οι δύο διαστάσεις αλληλεπιδρούν και ενισχύουν η μία την άλλη (Jackiw & Sinclair, 2009).

Τα δυναμικά περιβάλλοντα επιτρέπουν στους μαθητές να δημιουργήσουν ένα μεγάλο αριθμό παραδειγμάτων για συγκεκριμένα μαθητικά αντικείμενα, με τη βοήθεια εργαλείων που διαθέτουν όπως το «σύρσιμο» (dragging) (Jackiw & Sinclair, 2009). Η δυνατότητα του συρσίματος ενισχύει την επαγωγική λογική (Mariotti, 2000). Ακόμη, υποστηρίζεται ότι τα δυναμικά εργαλεία αποτελούν διαμεσολαβητικά μέσα μεταξύ του σχήματος που διαχειρίζονται οι μαθητές και του θεωρητικού γεωμετρικού σχήματος που αυτό υλοποιεί (Laborte, 1992 όπ. αναφ. στο Jackiw & Sinclair, 2009). Φαίνεται ότι η χρήση των δυναμικών περιβαλλόντων βοηθά τους μαθητές να επικεντρώνονται στις ιδιότητες των σχημάτων και να μετακινούνται σε ανώτερα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης, σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση Van Hiele (Battista & Borrow, 1997 όπ. αναφ. στο Jackiw & Sinclair, 2009). Από την άλλη, τα δυναμικά περιβάλλοντα αποτελούν ένα «αφήγημα» που προέρχεται από τις δυναμικές αλλαγές του αντικειμένου σε αντιδιαστολή με τον τρόπο σκέψης που αναπτύσσεται από μεμονωμένα παραδείγματα, όπως αυτά που διερευνώνται στο χαρτί (Healy & Sinclair, 2007).

Πολλές έρευνες υποστηρίζουν ότι τα δυναμικά περιβάλλοντα ενισχύουν διερευνητικές διαδικασίες (Clements & Battista, 1994; Hollebrands, 2002 όπ. αναφ. στο Jackiw & Sinclair, 2009), εικασίες (Vincent & MaCrae, 1999 όπ. αναφ. στο Jackiw & Sinclair, 2009) και την επίλυση προβλημάτων (Sinclair, 2002). Άλλες, ότι τα περιβάλλοντα αυτά βοηθούν τους μαθητές να αναπτύξουν πιο σταθερές ιδέες για τα μαθηματικά θεωρήματα να τα επαληθεύσουν ή να τα ανασκευάσουν μέσα από αντιπαραδείγματα (Mariotti, 2000). Έρευνες εστιασμένες στο πεδίο της ψυχολογίας θεωρούν ότι τα δυναμικά περιβάλλοντα είναι πιο αποτελεσματικά στο να εμπλέκουν και να κινητοποιούν τους μαθητές (Sinclair 2002). Ο Hollebrands (2003) εντόπισε ότι μετά από επτά εβδομάδες εξάσκησης μαθητές λυκείου χρησιμοποιούσαν την διαδικασία του «συρσίματος» στο Sketchpad για να αιτιολογήσουν τις ιδέες τους, να ελέγξουν τις εικασίες τους, να παρατηρήσουν τη συμπεριφορά των αντικειμένων και να ψάξουν μεταβλητότητες.

Άλλες έρευνες επικεντρώνονται στο πώς τα δυναμικά περιβάλλοντα αλλάζουν τα ίδια τα μαθηματικά αντικείμενα. Μέσα από τα περιβάλλοντα αυτά, τα μαθηματικά αντικείμενα παίρνουν μια νέα υπόσταση που διαμορφώνεται μέσα από το ίδιο το περιβάλλον στο οποίο δημιουργείται (Jackiw & Sinclair, 2009). Η έρευνα των Sinclair & Yurita (2008) έδειξε ότι η χρήση ενός δυναμικού εργαλείου, όπως το Geometers Sketchpad, σε ένα λύκειο οδήγησε σε μία θεμελιώδη αλλαγή του λόγου των μαθητών για τα μαθηματικά αντικείμενα σε σχέση με τους συμμαθητές τους που διερευνούσαν με στατικά αντικείμενα. Τα δυναμικά αυτά αντικείμενα με τα οποία εμπλέκονταν οι μαθητές άλλαζαν τις πρακτικές που τα αφορούσαν αλλάζοντας, κατά συνέπεια, τα ίδια τα μαθηματικά.

Επίσης, τα δυναμικά περιβάλλοντα μπορούν να αλλάξουν και τον τρόπο που οι μαθητές νοηματοδοτούν τους μαθηματικούς όρους. Σε έρευνα των Sinclair & Moss (2012) παρατηρήθηκε μετακίνηση στο λόγο μιας ομάδας παιδιών προσχολικής ηλικίας αναφορικά με την έννοια του τριγώνου, αλλάζοντας τον τρόπο που χρησιμοποιούσαν τη λέξη «τρίγωνο». Αρχικά η λέξη χρησιμοποιούνταν ως ένα ουσιαστικό, όπου περιέγραφε ένα σχήμα με τρεις πλευρές και κανονικό προσανατολισμό, ενώ μετά από εμπλοκή των παιδιών στη χρήση του δυναμικού εργαλείου Geometer's Sketchpad, η λέξη απέκτησε έναν ευρύτερο χαρακτήρα και χρησιμοποιούνταν για να περιγράψει διαφορετικά είδη τριγώνων που μοιράζονταν την ιδιότητα των τριών πλευρών.

Αναφορικά με τη διερεύνηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών η έρευνα της Hollebrands (2004) διαπίστωσε ότι το δυναμικό περιβάλλον του GSP βοηθούσε τους μαθητές να επικεντρώνονται στις παραμέτρους των μετασχηματισμών, όπως στην επιλογή διανύσματος κατά τη μετάθεση και του άξονα ανάκλασης κατά την ανάκλαση.

Τέλος, αλλαγή στη σκέψη των μικρών παιδιών κατά τη διάρκεια διερεύνησης της κατοπτρικής συμμετρίας στο δυναμικό περιβάλλον του GSP διαπιστώθηκε στην έρευνά των Ng & Sinclair (2015). Οι μαθητές ξεκίνησαν με ένα λόγο στατικό αναφορικά με τη συμμετρία, ο οποίος εστίαζε σε μία περιορισμένη αντίληψη για αυτή και αφορούσε έναν μικρό αριθμό συμμετρικών σχημάτων με κατακόρυφο άξονα

συμμετρίας. Κατά τη διάρκεια των μαθημάτων, οι μαθητές ξεκίνησαν να έχουν έναν περισσότερο διευρυμένο λόγο, ο οποίος επικεντρωνόταν στη συναρτησιακή σχέση μεταξύ του αντικειμένου και του ειδώλου του. Οι μαθητές παρήγαγαν νέες λέξεις, κινήσεις και διαγράμματα, ως αποτέλεσμα αλληλεπίδρασης με τον εκπαιδευτικό εντός του δυναμικού περιβάλλοντος. Τόσο το ίδιο το λογισμικό, όσο και οι συγκεκριμένες δραστηριότητες που ενεπλάκησαν τα παιδιά συνέβαλαν σε αυτή την αλλαγή, καθώς βοήθησαν στο να γίνει ορατή η συμμεταβλητότητα στην κίνηση μεταξύ αντικειμένου και του ειδώλου του ελέγχοντας συγκεκριμένες μεταβλητές, όπως η απόσταση από τον άξονα συμμετρίας.

Συνοψίζοντας, τα δυναμικά περιβάλλοντα μοιάζει να αποτελούν ένα αποτελεσματικό εργαλείο για την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης. Η δυνατότητα δυναμικής αναπαράστασης των μαθηματικών αντικειμένων βοηθούν τους μαθητές να διευρύνουν τον τρόπο με τον οποίο τα κατανοούν, να επικεντρώνονται στις ιδιότητες τους, να αντιλαμβάνονται ποιες από αυτές παραμένουν σταθερές και ποιες μεταβάλλονται και να αλλάζουν τον τρόπο που αλληλεπιδρούν μαζί τους.

1.3 Η τέχνη ως πλαίσιο μελέτης της έννοιας των μετασχηματισμών

Εδώ και χρόνια, στο πλαίσιο ερευνών και διδακτικών προσεγγίσεων επιχειρείται μια σύνδεση των μετασχηματισμών με έργα τέχνης. Αυτή η σύνδεση μοιάζει να είναι σημαντική γιατί επιτρέπει μια εναλλακτική προσέγγιση της διδασκαλίας των μαθηματικών, όπως διαφαίνεται από τις σύγχρονες θεωρητικές τάσεις στη μαθηματική εκπαίδευση, που εστιάζουν, πέρα των άλλων συνιστωσών, σε μία κοινωνικοπολιτισμική διάσταση των διαδικασιών μάθησης και διδασκαλίας που λαμβάνουν χώρα μέσα σε μια τάξη μαθηματικών. Οι ερευνητές φαίνεται να αναγνωρίζουν κοινά στοιχεία στην τέχνη και στα μαθηματικά, όπως η ανοιχτή τύπου δημιουργικότητα, η ερμηνεία των συμβολικών εκφράσεων και η αισθητοποίηση των μαθηματικών εννοιών (Ernest & Nemirovsky, 2015).

Σύμφωνα με το National Council of Teachers of Mathematics η ενσωμάτωση της τέχνης στο μάθημα των μαθηματικών μοιάζει να δίνει κίνητρα στους μαθητές για μεγαλύτερη εμπλοκή ακόμη και σε αυτούς που φοβούνται το συγκεκριμένο μάθημα (Stylianou & Grzegorzczak, 2005).

Επιχειρήματα υπέρ αυτής της ενσωμάτωσης αναφέρουν ότι προσφέρεται στους μαθητές και στους εκπαιδευτικούς, πνευματικά και συναισθηματικά, παρωθητικές εμπειρίες μάθησης (Russel & Zempylas, 2007). Επίσης, υποστηρίζεται ότι η ενσωμάτωση της τέχνης, ως μία διαδικασία που εκ των πραγμάτων δημιουργεί συνδέσεις, μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές περισσότερο ολιστικά, επιτρέποντας τη συσχετιστική κατανόηση (Van de Walle 2005), δηλαδή την κατανόηση που προκύπτει μέσα από ένα σύνολο νοητικών συνδέσεων, ενώ παράλληλα αποδίδει νόημα στη μαθηματική σκέψη (Ernest & Nemirovsky, 2015).

Παράλληλα, υπάρχουν αυτοί που υποστηρίζουν ότι η ενσωμάτωση της τέχνης στην εκπαιδευτική διαδικασία πριμοδοτεί την κινητικότητα μεταξύ των αντικειμένων και ενδεχομένως ευνοεί καλύτερες επιδόσεις των μαθητών. Επιπρόσθετα,

υποστηρίζεται ότι καλλιεργούνται στοιχεία όπως η δημιουργικότητα και η καινοτομία (Ernest & Nemirovsky, 2015), ενώ φαίνεται η μάθηση των μαθηματικών να γίνεται αποτελεσματικότερη στο πλαίσιο μαθημάτων βασισμένων στην τέχνη (Willett, 1992 όπ. αναφ. στο Styliou & Grzegorzczk, 2005).

Πολλές έρευνες επιχείρησαν να ενσωματώσουν την τέχνη στο μάθημα της γεωμετρίας και να μελετήσουν τον τρόπο που διευκολύνεται η κατανόηση των μαθητών για τις μαθηματικές έννοιες. Σε μια τέτοια έρευνα (Styliou & Grzegorzczk, 2005) διερευνήθηκε ο τρόπος που οι φοιτητές κατανοούσαν τη συμμετρία μέσα από ένα περιβάλλον που συνδύαζε τα μαθηματικά με την τέχνη και προσομοίαζε με ένα καλλιτεχνικό στούντιο. Υποστηρίχτηκε ότι η τέχνη θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως ένα απτό εργαλείο για την κατανόηση και εφαρμογή αφηρημένων μαθηματικών ιδεών. Οι φοιτητές μετά το τέλος του εργαστηρίου, ανέπτυξαν την ικανότητα να εντοπίζουν τη συμμετρία σε μια ποικιλία σχεδίων και να ταξινομούν βάσει της τάξης συμμετρίας και των ιδιοτήτων τους, ενώ φάνηκε να αποκτούν θετικότερη στάση απέναντι στα μαθηματικά. Επιπρόσθετα, δημιούργησαν προϊόντα τέχνης ενσωματώνοντας τις μαθηματικές ιδέες της συμμετρίας. Οι παρατηρήσεις στο λόγο τους ανέδειξε δύο τρόπους με τους οποίους χρησιμοποίησαν την τέχνη προσπαθώντας να κατανοήσουν τη συμμετρία. Η προσέγγιση της συμμετρίας μέσω της τέχνης και η προσέγγιση της τέχνης μέσω της συμμετρίας.

Σε άλλη έρευνα που αφορά ένα προπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών γεωμετρίας, οι φοιτητές δημιούργησαν έργα τέχνης εμπνευσμένοι από μαθηματικές ιδέες, όπως αυτή της προοπτικής (Ernest & Nemirovsky, 2015). Οι ερευνητές κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι ο συγκερασμός τέχνης και μαθηματικών φέρνει σε επαφή τα μαθηματικά με την καθημερινή εμπειρία, δημιουργεί καταστάσεις που εγείρουν διερευνητικούς τρόπους μάθησης και αλλάζει τις στάσεις απέναντι στην τέχνη. Οι αναλύσεις του λόγου των φοιτητών έδειξαν ότι κάποιοι από αυτούς, μέσω της δημιουργίας έργων τέχνης που βασίστηκαν σε μαθηματικές ιδέες, έκαναν σημαντικές συνδέσεις μεταξύ μαθηματικών ιδεών και των έργων τέχνης, εξέφρασαν προσωπικά νοήματα, ενώ τους δόθηκε η ευκαιρία να σκεφτούν πάνω σε μη συνηθισμένες μαθηματικές καταστάσεις, που πιθανόν να μην είχαν συναντήσει στην τάξη.

Τέλος, τα πλεονεκτήματα ενσωμάτωσης της τέχνης διερευνήθηκαν σε μία τάξη μαθηματικών μέσης εκπαίδευσης, όπου αναδείχθηκε η ιδέα της δημιουργικότητας, και στο πλαίσιο αυτό δημιουργήθηκαν εργαστήρια μαθητών λυκείου που δημιούργησαν προϊόντα όπως αφίσες και μπλούζες, τα σχέδια των οποίων ήταν βασισμένα στις μαθηματικές ιδέες της συμμετρίας (Shaffer, 1997). Στην έρευνα υποστηρίζεται ότι τέτοιου είδους περιβάλλοντα διευκολύνουν τη μάθηση των μαθηματικών και νοηματοδοτούν τα μαθηματικά που εμπεριέχονται στη συμμετρία. Αναδεικνύονται δύο λόγοι που συμβαίνει αυτό. Ο ένας είναι η ελευθερία που δίνεται στους μαθητές στη λήψη αποφάσεων και στον έλεγχο της μάθησης και ο άλλος είναι η δυνατότητα για προσωπική έκφραση. Οι συμμετέχοντες φαίνεται ότι κατανόησαν τις έννοιες της συμμετρίας και ανέπτυξαν γενικότερες δεξιότητες επίλυσης προβλήματος.

Συνοψίζοντας, η σχετική έρευνα υποστηρίζει την ιδέα ότι η σύνδεση της τέχνης με τα μαθηματικά ισχυροποιεί τις μαθηματικές ιδέες, ενώ παράλληλα ενισχύει τη δημιουργικότητα και αναπτύσσει το αισθητικό κριτήριο. Με αυτόν τον τρόπο τα μαθηματικά εντάσσονται σε ένα κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο το οποίο τους προσδίδει νόημα και υπόσταση. Αναφορικά με τη συμμετρία είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την τέχνη, η οποία φαίνεται να αποτελεί ένα αποτελεσματικό πλαίσιο ανάδειξης των σχετικών μαθηματικών ιδεών.

Κεφάλαιο 2

Το θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας

Στα δύο υποκεφάλαια που ακολουθούν περιγράφονται τα βασικά σημεία δύο θεωρητικών οπτικών, οι οποίες προέρχονται από το βιγκοτσιανό παράδειγμα. Σε αυτές αναδεικνύεται σημαντικός ο ρόλος του λόγου (discourse) που αναπτύσσεται ανάμεσα στους εμπλεκόμενους στη μαθησιακή διαδικασία και ο ρόλος των εργαλείων. Η πρώτη από αυτές είναι η επικοινωνιογνωστική προσέγγιση, (commognition) η οποία θεωρεί ότι η μαθηματική σκέψη των μαθητών αποτελεί ένα αναπόσπαστο κομμάτι της επικοινωνιακής δραστηριότητας και μπορεί να γίνει αντιληπτή μέσα από την παρατήρηση του μαθηματικού λόγου. Η δεύτερη αποκαλείται σημειωτική διαμεσολάβηση (semiotic mediation) και αναλύει τον ρόλο των εργαλείων στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές.

2.1 Επικοινωνιογνωστική προσέγγιση

Τα τελευταία χρόνια, η μαθηματική εκπαίδευση έστρεψε την προσοχή της στο πλαίσιο μέσα στο οποίο λαμβάνει χώρα η μάθηση. Αυτή η εστίαση στο πλαίσιο οδήγησε στην εστίαση στην επικοινωνία και στη γλώσσα. Έτσι, η διερεύνηση της μάθησης άρχισε να επικεντρώνεται στο λόγο που αναπτύσσεται μέσα στις κοινότητες μάθησης (Nardi et al, 2014). Στη διδασκαλία των μαθηματικών η γλώσσα φαίνεται να είναι θεμελιώδης, καθώς τα μαθηματικά αντικείμενα δεν είναι άμεσα προσβάσιμα από τον νου. Ειδικά η γεωμετρία απαιτεί πολύπλοκες γνωστικές δραστηριότητες, που διεγείρουν χειρονομίες, γλώσσα και όραση, η συνέργεια των οποίων είναι θεμελιώδης στην κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών (Duval, 1993 όπ. αναφ. στο Swoboda & Vighi, 2016). Αναγνωρίζοντας το σημαντικό ρόλο της γλώσσας στην κατασκευή μαθηματικών νοημάτων η Sfard (2008) και οι συνεργάτες της ανέπτυξαν την επικοινωνιογνωστική προσέγγιση. Στη συνέχεια αναλύονται τα κύρια θεωρητικά της στοιχεία.

2.1.1 Ο ρόλος του λόγου (discourse) στη μάθηση των μαθηματικών

Στην επικοινωνιογνωστική προσέγγιση, ο αγγλικός όρος commognition προκύπτει από το συγκεκριασμό των όρων communication (επικοινωνία) και cognition (σκέψη), δηλώνοντας ότι η σκέψη ορίζεται ως η εξατομικευμένη μορφή (άτομο) μιας διαπροσωπικής επικοινωνίας (ομάδα). Ο ενδοπροσωπικός και διαπροσωπικός λόγος συνδιαμορφώνονται και αλληλοενημερώνονται συνεχώς (Sfard, 2001). Η επικοινωνία δεν αποτελεί τρόπο έκφρασης της σκέψης, αλλά αποτελεί την ίδια τη διαδικασία της σκέψης (Sinclair & Ng, 2015). Με βάση αυτή τη θεώρηση, η μαθηματική σκέψη μπορεί να διερευνηθεί μέσα από την παρατήρηση του μαθηματικού λόγου, ενώ η μάθηση λαμβάνει χώρα όταν υπάρχει αλλαγή στο μαθηματικό λόγο των μαθητών (Sfard, 2008), έτσι ώστε να αποκτήσει τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα του λόγου που χρησιμοποιεί η μαθηματική κοινότητα. Στην επικοινωνιογνωστική προσέγγιση το

ερώτημα σχετικά με το τι αναμένεται να μάθουν οι συμμετέχοντες γίνεται ισοδύναμο με το ποιες αλλαγές απαιτούνται στους τρόπους που οι μαθητές επικοινωνούν (Sfard, 2009b). Η δε αλλαγή στο λόγο επέρχεται από μία γνωστική σύγκρουση, η οποία εγείρεται όταν διαφορετικοί συνομιλητές ενεργούν σύμφωνα με διαφορετικούς επικοινωνιακούς κανόνες (Sfard, 2007).

Για τη Sfard (2001) ο *λόγος* (discourse) σημαίνει οποιαδήποτε περίσταση επικοινωνίας, που λαμβάνει χώρα την ίδια ή διαφορετική χρονική στιγμή, ανάμεσα σε διαφορετικά άτομα ή στο ίδιο το άτομο με τον εαυτό του, είτε λεκτικά είτε με τη βοήθεια κάποιου άλλου συμβολικού συστήματος. Οι συνομιλητές μοιράζονται συγκεκριμένους κανόνες και τύπους επικοινωνίας, που αφορούν αποκλειστικά αυτή την ομάδα συνομιλητών αποκλείοντας άλλους (Sfard, 2009b).

Ο μαθηματικός λόγος διαφοροποιείται ως προς τα μαθηματικά αντικείμενα που αφορά και τα μέσα που χρησιμοποιούνται στην εκφορά του. Μπορεί να αναγνωριστεί από τέσσερα αλληλένδετα χαρακτηριστικά: *λεξιλόγιο και σύνταξη* (vocabulary and syntax), *οπτικοί διαμεσολαβητές* (visual mediators), *ρουτίνες* (routines) και *αφηγήσεις* (endorsed narratives).

Οι λέξεις στο μαθηματικό λόγο αναφέρονται στα μαθηματικά αντικείμενα. Παραδείγματα μαθηματικού λεξιλογίου αποτελούν οι αριθμολέξεις, τα ονόματα αριθμητικών πράξεων, τα ονόματα γεωμετρικών σχημάτων κ.α., τα οποία χρησιμοποιούνται με έναν σαφώς μαθηματικό τρόπο. Όταν ένας μαθητής συμμετέχει σε ένα μαθηματικό λόγο, μαθαίνει νέες χρήσεις γνωστών μαθηματικών λέξεων, όπως τρίγωνο ή τετράγωνο ή μπορεί να μάθει όρους που δεν τους έχει συναντήσει πριν και είναι αποκλειστικά μαθηματικοί. Βέβαια, λέξεις όπως σχήμα ή αριθμός μπορεί να απαντηθούν και σε μη μαθηματικές συνομιλίες. Ο τρόπος, ωστόσο, που εκφέρονται στο λόγο που αναπτύσσεται σε ένα περιβάλλον μάθησης, όπως είναι το σχολείο, υπαγορεύουν μια αποκλειστικά μαθηματική χρήση (Sfard, 2007).

Οι μαθηματικοί *οπτικοί διαμεσολαβητές* (visual mediators) είναι φυσικά αντικείμενα με τη βοήθεια των οποίων οι συμμετέχοντες στο μαθηματικό λόγο αποδίδουν ταυτότητα στο αντικείμενο για το οποίο μιλάνε και οργανώνουν τη συνομιλία τους. Οι μαθηματικοί διαμεσολαβητές συχνά αφορούν συμβολικά αντικείμενα που δημιουργούνται ειδικά για τη συγκεκριμένη μορφή επικοινωνίας. Μερικά από τα πιο κοινά παραδείγματα οπτικών διαμεσολαβητών είναι τα αλγεβρικά σύμβολα, αριθμογραμμές, διαγράμματα, γραφήματα, διάφορα εικονικά σχέδια κ.λ.π. Καθώς επικοινωνούμε διαχειριζόμαστε τους διαμεσολαβητές με συγκεκριμένους τρόπους. Εντός του επικοινωνιογνωστικού πλαισίου οι οπτικοί διαμεσολαβητές δεν θεωρούνται βοηθητικά μέσα έκφρασης μιας ήδη προϋπάρχουσας σκέψης, αντίθετα αποτελούν κομμάτι της επικοινωνίας και κατά συνέπεια της ίδιας της σκέψης (Sfard, 2007).

Στην παρούσα έρευνα, για την ανάλυση της εξέλιξης του λόγου των μαθητών αναφορικά με την έννοια των μετασχηματισμών αναζητήθηκαν αλλαγές σε δύο από τα τέσσερα χαρακτηριστικά που αναφέρθηκαν παραπάνω: το μαθηματικό λεξιλόγιο και οι μαθηματικοί οπτικοί διαμεσολαβητές. Η επιλογή αυτών των χαρακτηριστικών έγινε γιατί στις ηλικίες των παιδιών που αφορά η έρευνα, δεν εντοπίζονται αφηγήσεις

και ρουτίνες. Για το λόγο αυτό, αυτά τα δύο χαρακτηριστικά δεν θα αναλυθούν περαιτέρω.

2.1.2 Ο ρόλος των χειρονομιών στην εξέλιξη του μαθηματικού λόγου

Ο ρόλος των χειρονομιών δεν είναι ξεκάθαρος στην επικοινωνιογνωστική προσέγγιση. Η Sfard (2009a) αναφέρει ότι οι χειρονομίες είναι κρίσιμες για την αποτελεσματικότητα της μαθηματικής επικοινωνίας, συνυπάρχουν με τις λέξεις στον μαθητικό λόγο και λειτουργούν από κοινού για την παραγωγή μαθηματικών νοημάτων. Επιπρόσθετα βοηθούν τους συμμετέχοντες να μιλούν για το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο. Ωστόσο, οι χειρονομίες δεν συγκαταλέγονται στα 4 χαρακτηριστικά του μαθηματικού λόγου της Sfard. Φαίνεται ότι τα χαρακτηριστικά αυτά ικανά να αναλύσουν τον γραπτό λόγο, δεν αρκούν για να αναλύσουν όλους τους τρόπους επικοινωνίας των μικρών μαθητών (Sinclair & Ng, 2015).

Ο προφορικός λόγος είναι πολυτροπικός και δεν περιορίζεται μόνο στις λέξεις που εκφέρονται. Οι συμμετέχοντες σε ένα επικοινωνιακό γεγονός εννοούν, ως ομιλητές, και καταλαβαίνουν, ως ακροατές, πολύ περισσότερα από αυτά που μεταφέρονται στη λεκτική επικοινωνία. Εξωλεκτικά στοιχεία, όπως οι επιτονισμοί, οι παύσεις κ.λ.π., η εκμετάλλευση του γλωσσικού περιβάλλοντος, οι κοινές εμπειρίες, οι εκφράσεις του προσώπου και οι κινήσεις του σώματος συμπληρώνουν και εμπλουτίζουν τον γλωσσικό κώδικα (Μήτσης, 2007).

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, οι χειρονομίες συμπληρώνουν τον λόγο (Kendon 2000 όπ. αναφ. στο Sinclair & Ng, 2015), παράγουν από κοινού τη σκέψη (McNeil, 1992) και μπορούν να λειτουργήσουν είτε ως λέξεις είτε ως οπτικοί διαμεσολαβητές στην μαθηματική τάξη (Sinclair & Ng, 2015). Έρευνες έχουν δείξει ότι οι κινήσεις συχνά καμιά φορά προηγούνται ή άλλες φορές συνεκφέρονται με τον προφορικό μαθηματικό λόγο, ενώ συχνά κουβαλάνε τη δική τους ξεχωριστή σημασία, υποκαθιστώντας την προφορική εκφορά του λόγου (Goldin-Meadow et al, 2001). Οι χειρονομίες είναι βοηθητικές στην επικοινωνία μαθηματικών νοημάτων που αφορούν οπτικά αντικείμενα που κινούνται και αλλάζουν στον χρόνο (Nunez, 2003 όπ. αναφ. στο Sinclair & Ng, 2015), κάτι που τις καθιστά ιδιαίτερα σημαντικές σε ένα δυναμικό περιβάλλον. Από τη στιγμή που οι χειρονομίες είναι ορατές από όλους τους συμμετέχοντες μέσα στην τάξη των μαθηματικών λειτουργούν ως οπτικοί διαμεσολαβητές που διευκολύνουν τη μαθηματική επικοινωνία (Sinclair & Ng, 2015).

Στην παρούσα έρευνα, χρησιμοποιήσαμε πλαίσιο της επικοινωνιογνωστικής προσέγγισης προκειμένου να αναλύσουμε την εξέλιξη του λόγου των μαθητών για την έννοια των μετασχηματισμών. Αναφορικά με τα δύο πρώτα χαρακτηριστικά διερευνήθηκαν στον γραπτό και προφορικό λόγο μαθηματικές λέξεις που να σχετίζονται με τους μετασχηματισμούς και τις παραμέτρους τους. Εντοπίστηκαν οι αλλαγές στις λέξεις και στις εκφράσεις των μαθητών, καθώς προσπαθούσαν να διαχειριστούν τα μαθηματικά νοήματα. Μελετήθηκε η διαφοροποίηση στο λόγο τους

όταν αλληλεπιδρούσαν με τα χειραπτικά και τα ψηφιακά εργαλεία. Παράλληλα αναζητήθηκαν οπτικοί διαμεσολαβητές οι οποίοι χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθητές για να οργανώσουν το λόγο τους. Επίσης, διερευνήθηκαν οι χειρονομίες των μαθητών, όταν προσπαθούσαν να εκφράσουν τα μαθηματικά νοήματα, καθώς αλληλεπιδρούσαν με τα εργαλεία και με τους συνομιλητές τους και αναζητήθηκε ο ρόλος τους στην δημιουργία μαθηματικών νοημάτων.

2.2 Σημειωτική διαμεσολάβηση

Εδώ και χρόνια, η έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση αναδεικνύει τον σημαντικό ρόλο των εργαλείων στην εξέλιξη της σκέψης των μαθητών. Η εισαγωγή των εργαλείων επηρεάζει τις νόρμες που καθορίζουν την αλληλεπίδραση των συμμετεχόντων στην εκπαιδευτική διαδικασία και τους ρόλους τους. Η χρήση των εργαλείων και η γνωστική ανάπτυξη φαίνεται να έχουν μια αμφίροπη σχέση. Η πρακτική χρήση του εργαλείου φαίνεται να εξελίσσει τη σκέψη και αντίστροφα η εξελιγμένη σκέψη να συμβάλλει σε πιο επινοητικούς τρόπους χρήσης του εργαλείου. Αυτή η διαλεκτική σχέση που περιγράφηκε παραπάνω αποτελεί την κεντρική ιδέα της *Σημειωτικής Διαμεσολάβησης (Semiotic Mediation)*.

2.2.1 Ο ρόλος των εργαλείων στην κατασκευή μαθηματικών νοημάτων

Η θεωρία της σημειωτικής διαμεσολάβησης βασίζεται στις ιδέες του Vygotsky σχετικά με τον ρόλο των εργαλείων στην μάθηση. Ο Vygotsky (1978 όπ. αναφ. στους Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) περιγράφει τη διαλεκτική σχέση μεταξύ των *σημείων (signs)* και των *εργαλείων (artifacts)* αναφέροντας ότι σε πρακτικό επίπεδο τα *εργαλεία* υποστηρίζουν τον άνθρωπο στη χειρονακτική εργασία, σε αντιδιαστολή με τα *σημεία* που υποστηρίζουν πνευματικές δραστηριότητες. Σύμφωνα με τη βιγκοτσιανή ορολογία τα *σημεία* αποκαλούνται ψυχολογικά *εργαλεία* και ελέγχονται από εσωτερικούς παράγοντες σε αντίθεση με τα ανθρώπινα εργαλεία που ελέγχονται από εξωτερικούς παράγοντες. Παραδείγματα εργαλείων στην εκπαίδευση θεωρούνται η γραπτή και προφορική γλώσσα, το σώμα, τα βιβλία, ο πίνακας, τα μολύβια, οι χάρακες, οι διαβήτες κ.α. Ο θεμελιώδης ρόλος των εργαλείων στην γνωστική ανάπτυξη είναι ευρέως αποδεκτός. Ωστόσο, οι ψυχολογικές προσεγγίσεις κάνουν έναν ξεκάθαρο διαχωρισμό μεταξύ των υλικών εργαλείων και των σημείων, σε αντίθεση με την βιγκοτσιανή άποψη που εντοπίζει μια αναλογία μεταξύ τους.

Σύμφωνα με τη θεωρία της σημειωτικής διαμεσολάβησης η χρήση των εργαλείων παράγει σημεία τα οποία μπορούν να διαμορφώσουν καινούρια νοήματα. Η παραγωγή σημείων λαμβάνει χώρα μέσω μιας πολύπλοκης διαδικασίας, η οποία ονομάζεται *εσωτερίκευση (internalization)* και πραγματοποιείται κατά την αλληλεπίδραση των συμμετεχόντων σε μια κοινότητα μάθησης. Δηλαδή, η εσωτερίκευση λαμβάνει χώρα όταν εργαλεία και διαδικασίες, που αξιοποιούνται στο πλαίσιο επίτευξης ενός σκοπού σε μια κοινότητα μάθησης, μεταμορφώνονται σε εργαλεία του νου με τα οποία κατασκευάζονται νοήματα. Συνεπώς, η εσωτερίκευση

έχει δύο κυρίαρχους άξονες: είναι κοινωνική και στηρίζεται σε μία σημειωτική διαδικασία, δηλαδή στην παραγωγή, ερμηνεία και χρήση σημείων μεταξύ των συμμετεχόντων, ώστε να ανταλλάξουν πληροφορίες και να επικοινωνήσουν. Μέσω αυτής της κοινωνικοσημειωτικής διαδικασίας αναπτύσσονται υψηλές πνευματικές λειτουργίες και γνωστικές δεξιότητες (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Παραδείγματα σημείων είναι λέξεις, σχέδια, χειρονομίες, οπτικοί διαμεσολαβητές κ.α. (Ng & Sinclair, 2015). Οποιοδήποτε εργαλείο χρησιμοποιείται από τον εκπαιδευτικό ως μέσο παραγωγής μαθηματικού νοήματος είναι δυνατό να παραγάγει σημεία.

Τα σημεία εξελίσσονται κατά τη διάρκεια της μαθηματικής δραστηριότητας, διατηρώντας, ωστόσο, κάποια σχέση με τα εργαλεία και τις δραστηριότητες από τις οποίες παράχθηκαν. Υπάρχουν τρεις βασικές κατηγορίες σημείων. Τα κριτήρια αυτής της κατηγοριοποίησης έχουν να κάνουν με τη θέση των σημείων στην εξελικτική διαδικασία, ξεκινώντας από τα σημεία που συνδέονται στενότερα με τη δραστηριότητα, το εργαλείο και τα προσωπικά νοήματα και στα σημεία που συνδέονται με τα τυπικά μαθηματικά νοήματα, έτσι όπως μοιράζονται από τη μαθηματική κοινότητα. Έτσι, ανάλογα με το βαθμό απόστασης από την αναφορά στο εξωτερικό εργαλείο τα σημεία χωρίζονται σε (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008):

Σημεία που συνδέονται στενά με τα εργαλεία (artifact signs). Αυτής της κατηγορίας τα σημεία αναδύονται μέσα από τη χρήση των εργαλείων και συνδέονται σε μεγάλο βαθμό με αυτά. Η σημασία τους απορρέει από την εμπειρία χρήσης του εργαλείου και τα προσωπικά νοήματα του χρήστη.

Μαθηματικά σημεία (mathematical signs). Η σημασία τους είναι μαθηματική και έχουν τη μικρότερη σύνδεση με τα εργαλεία από τα οποία παράγονται. Τα νοήματα που εκφέρουν προσεγγίζουν τα τυπικά μαθηματικά και συνιστούν το στόχο της σημειωτικής διαμεσολάβησης.

Ενδιάμεσα σημεία (pivot signs). Η διαδικασία κατασκευής μαθηματικού νοήματος μέσω της εξέλιξης των σημείων που συνδέονται σε μεγάλο βαθμό με τα εργαλεία σε μαθηματικά σημεία είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη. Σε αυτή σημαντικό ρόλο παίζει μια τρίτη κατηγορία σημείων, τα ενδιάμεσα σημεία, τα οποία συνδέονται με τα εργαλεία από τα οποία προέρχονται, αλλά παράλληλα εμπεριέχουν και μαθηματικά νοήματα. Ενέχουν δηλαδή διττή σημασία, με αποτέλεσμα να είναι προβληματικός ο διαχωρισμός τους από τα υπόλοιπα είδη σημείων. Εκφράζουν μια εν μέρει αποσύνδεση από τα εργαλεία, διατηρώντας, ωστόσο, ακόμη τη σύνδεση με αυτά.

Με βάση τη σημασία τους σημεία όπως λέξεις, χειρονομίες, εικόνες κ.λ.π. μπορούν να διαμεσολαβήσουν είτε νοήματα που να σχετίζονται με το εργαλείο, με το οποίο αλληλεπιδρά ο μαθητής, είτε νοήματα που να έχουν μαθηματικό περιεχόμενο. Μια λέξη, από τη στιγμή που θεωρείται σημείο, μπορεί να απαντάται σε διαφορετικές κατηγορίες, ανάλογα με τη σημασία του στη σημειωτική δραστηριότητα. Για παράδειγμα η λέξη «συνάρτηση» μπορεί να χρησιμοποιηθεί με τον τρόπο που χρησιμοποιείται στον καθημερινό λόγο. Σε αυτή την περίπτωση θεωρείται σημείο αλλά συνδέεται στενά με την ανθρώπινη δραστηριότητα, άρα ανήκει στην πρώτη κατηγορία. Μπορεί να αρχίζει να αποκτά κάποιου είδους αυτονομία από την αρχική

αναφορά και να θεωρηθεί ενδιάμεσο σημείο. Τέλος, μπορεί να αναφέρεται ρητά στο μαθηματικό ορισμό και να αποτελεί μαθηματικό σημείο (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008).

2.2.2 Οι σημειωτικές δυνατότητες των ψηφιακών εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας

Η σημειωτική διαμεσολάβηση διερευνά ιδιαιτέρως τις σημειωτικές δυνατότητες των ψηφιακών εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας, καθώς φαίνεται να επιτρέπουν την ανάπτυξη νέων τρόπων επικοινωνίας, δηλαδή καινούριων λέξεων, διαφορετικών χειρονομιών, άρα εναλλακτικού τρόπου σκέψης. Αυτό που διαφοροποιεί ένα δυναμικό εργαλείο από ένα χειραπτικό είναι ο άμεσος χειρισμός των αντικειμένων και η γρήγορη εμφάνιση των αλλαγών όταν ο μαθητής επιδρά σε αυτά (Mariotti, 2000). Μοιάζει μέσω αυτών των εργαλείων να παράγονται σημεία με τρόπο διαφορετικό από ότι από ένα μη ψηφιακό εργαλείο. Η διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι ο τρόπος που θα αναδυθούν οι μαθηματικές ιδέες αποτελεί πολύπλοκη διαδικασία που εξαρτάται τόσο από τις σχεδιαστικές επιλογές του κατασκευαστή όσο και από τον τρόπο που εκτελεί τις εντολές ο χρήστης (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008).

Η διαδικασία της σημειωτικής διαμεσολάβησης μπορεί να επιτευχθεί μέσω λειτουργιών που διαθέτουν τα προγράμματα δυναμικής γεωμετρίας και οι οποίες επιτρέπουν τους μαθητές να δρουν επάνω στα αντικείμενα που εμφανίζονται στο περιβάλλον τους. Παραδείγματα τέτοιων λειτουργιών είναι το «σύρσιμο» (dragging) ή η «δημιουργία ίχνους» (tracing) και οι οποίες αποτελούν εξωτερικά προσανατολισμένες δράσεις που μπορεί να εσωτερικευθούν διαμορφώνοντας προσωπικά νοήματα για διάφορες μαθηματικές έννοιες. Μέσω αυτών των διαδικασιών παράγονται πολλά σημεία τα οποία είναι δυνατόν να εξελιχθούν μέσω της διαδικασίας της σημειωτικής διαμεσολάβησης σε μαθηματικά σημεία (Mariotti, 2009). Θα πρέπει να διευκρινιστεί ότι ανάλογα με την περίπτωση σημείο μπορεί να θεωρηθεί είτε ένα αντικείμενο στην οθόνη είτε μια εντολή ή λειτουργία του προγράμματος. Για παράδειγμα η λειτουργία του «συρσίματος» μπορεί να εκληφθεί ως σημείο από τη στιγμή που αφορά μια μαθηματική έννοια, όπως για παράδειγμα την έννοια της συνάρτησης (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008).

Σε σχετική έρευνα που έγινε σε μικρά παιδιά (Sinclair & Ng, 2015), η αλλαγή που εντοπίστηκε στο λόγο τους αποδόθηκε στη διαδικασία της σημειωτικής διαμεσολάβησης. Το εργαλείο «συρσίματος» του δυναμικού περιβάλλοντος, η γλώσσα και οι χειρονομίες του εκπαιδευτικού και των παιδιών μετατράπηκαν σε ενδιάμεσα σημεία (pivot signs) που διευκόλυναν την επικοινωνία βασικών εννοιών της κατοπτρικής συμμετρίας.

2.2.3 Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στη σημειωτική διαμεσολάβηση

Στη σημειωτική διαμεσολάβηση ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι καίριος. Λειτουργεί ως ο διαμεσολαβητής μεταξύ του αρχικού εργαλείου και του μαθηματικού νοήματος

που πρέπει να δομήσουν οι μαθητές. Για να λειτουργήσει ένα εργαλείο στη σημειωτική διαμεσολάβηση θα πρέπει ο εκπαιδευτικός, εκ προθέσεως, να διαμεσολαβήσει το μαθηματικό περιεχόμενο μέσω μιας σχεδιασμένης διδακτικής παρέμβασης, που να είναι προσαρμοσμένη στο γνωστικό επίπεδο των μαθητών (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008).

Ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί τα εργαλεία για να κατευθύνει τα μαθηματικά νοήματα που αναπτύσσονται. Εκμεταλλεύεται τις μαθησιακές ευκαιρίες διευκολύνοντας την κοινωνική ανταλλαγή νοημάτων κατά τη διάρκεια χρήσης των εργαλείων (Marriotti 2009). Οργανώνει τη μαθησιακή διαδικασία με τέτοιο τρόπο, ώστε να βοηθήσει στην αποσύνδεση των σημείων από τα εργαλεία και στην εξέλιξή τους σε μαθηματικά σημεία. (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008).

Επίσης, ο εκπαιδευτικός μεριμνά με τέτοιο τρόπο, ώστε οι μαθητές να λειτουργούν τόσο σε γνωστικό όσο και σε μετα-γνωστικό επίπεδο. Δηλαδή, από τη μια καθοδηγεί τους μαθητές στην ανάπτυξη των μαθηματικών νοημάτων και από την άλλη φροντίζει ώστε οι μαθητές να έχουν επίγνωση της μαθησιακής τους κατάστασης (Marriotti 2009).

Στην παρούσα εργασία, θεωρήσαμε τη θεωρία της σημειωτικής διαμεσολάβησης κατάλληλη, γιατί στην παρέμβασή μας χρησιμοποιήσαμε χειραπτικά και ψηφιακά εργαλεία προκειμένου να μελετήσουμε την αλλαγή του λόγου των μαθητών αναφορικά με την έννοια των μετασχηματισμών. Η χρήση των εργαλείων είναι απαραίτητη για την διερεύνηση μιας τόσο δυναμικής έννοιας όπως αυτή των γεωμετρικών μετασχηματισμών από τους μικρής ηλικίας μαθητές. Συνεπώς, ο ρόλος τους είναι σημαντικός να διερευνηθεί. Ερευνήσαμε πώς αυτά τα εργαλεία διαμεσολαβούν στις κατανοήσεις και στην εξέλιξη της σκέψης των μαθητών. Επιπλέον, διερευνήσαμε την εξέλιξη των νοημάτων που σχετίζονται με τα εργαλεία σε περισσότερο μαθηματικά νοήματα.

ΕΜΠΕΙΡΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Κεφάλαιο 3 Μεθοδολογία της έρευνας

Η παρούσα έρευνα στηρίζεται μεθοδολογικά στο παράδειγμα της έρευνας σχεδιασμού η οποία συνδυάζει τον διδακτικό σχεδιασμό με την εκπαιδευτική έρευνα και έχει πέντε κυρίαρχα χαρακτηριστικά. Το πρώτο είναι ο παρεμβατικός της χαρακτήρας, καθώς έχει πρόθεση να ελέγξει εκπαιδευτικές καινοτομίες και να μελετήσει νέους τρόπους διδασκαλίας. Το δεύτερο χαρακτηριστικό της είναι ότι παράγει θεωρία για τη διαδικασία της διδασκαλίας και των εργαλείων που την υποστηρίζουν. Το τρίτο χαρακτηριστικό της είναι ότι ελέγχει τις διαδικασίες και τα μέσα κάνοντας υποθέσεις για τα ερευνητικά αποτελέσματα, ενώ ταυτόχρονα ο αναστοχαστικός της χαρακτήρας της επιτρέπει να επαναπροσδιορίζει τον αρχικό σχεδιασμό και να τον τροποποιεί. Ο συνδυασμός αυτών των δύο χαρακτηριστικών αποδίδει στην έρευνα σχεδιασμού, το τέταρτο χαρακτηριστικό, τον επαναληπτικό της χαρακτήρα. Καθώς οι αρχικές υποθέσεις ελέγχονται και πιθανώς ανατρέπονται, νέες υποθέσεις αναπτύσσονται και τίθενται εκ νέου σε έλεγχο, κατά τη διάρκεια της έρευνας. Το πέμπτο και τελευταίο χαρακτηριστικό της είναι η στενή σύνδεσή της με την πράξη, καθώς εφαρμόζεται σε πραγματικές τάξεις, με όλη την πολυπλοκότητα που λαμβάνει χώρα σε ένα τέτοιο περιβάλλον (Cobb et al., 2003; Collins, Joseph & Bielaczyc, 2004; Design-Based Research Collective, 2003; Prediger, Gravemeijer & Confrey, 2015).

Με ανάλογο τρόπο, η παρούσα έρευνα προσεγγίζει τα χαρακτηριστικά της έρευνας σχεδιασμού. Πρώτον είχε παρεμβατικό χαρακτήρα, καθώς πρόθεσή της ήταν να εξελίξει τη σκέψη των μαθητών αναφορικά με την έννοια των μετασχηματισμών. Η καινοτομία της παρέμβασης έγκειται στο γεγονός ότι τα εργαλεία και οι δραστηριότητες που επιλέχθηκαν επικεντρώθηκαν στη δυναμική φύση των μετασχηματισμών, η οποία είναι δύσκολα αντιληπτή για τους μαθητές του δημοτικού. Επίσης, συνδυάζει δύο διαφορετικά πεδία, την τέχνη και τα ψηφιακά δυναμικά περιβάλλοντα. Κατά τη διάρκεια της έρευνας, οι διδακτικές επιλογές επανεξετάζονταν και οι δραστηριότητες επανασχεδιάζονταν, καθώς νέα δεδομένα ανέκυπταν που ανέτρεπαν τον αρχικό σχεδιασμό. Για παράδειγμα, η δραστηριότητα της 2^{ης} συνάντησης δεν ήταν στον αρχικό σχεδιασμό. Σχεδιάστηκε εκ των υστέρων όταν έγινε αντιληπτή η ανάγκη να δημιουργηθεί μια δραστηριότητα που θα επέτρεπε στους μαθητές να μιλήσουν για τους μετασχηματισμούς με πιο δυναμικούς όρους. Τέλος, η έρευνα έλαβε χώρα σε ένα πραγματικό περιβάλλον μέσα στο οποίο ένας μεγάλος αριθμός από μη ελέγξιμους παράγοντες επηρέασε την πορεία της παρέμβασης.

3.1 Στόχοι της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα

Στην παρούσα έρευνα μελετάμε το λόγο των μαθητών Ε΄ και Στ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου αναφορικά με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, καθώς εμπλέκονται σε δραστηριότητες που χρησιμοποιούν διαφορετικού τύπου εργαλεία, χειραπτικά και ψηφιακά, και πλαισιώνονται με έργα τέχνης. Η έννοια των γεωμετρικών μετασχηματισμών έχει απασχολήσει τη μαθηματική έρευνα που υποστηρίζει ότι σημαντικές χωρικές δεξιότητες συνδέονται με αυτούς. Ωστόσο, οι μαθητές δεν έρχονται σε επαφή με τους μετασχηματισμούς κατά τη διάρκεια του δημοτικού σχολείου. Λόγω της δυναμικής τους φύσης οι έννοιες αυτές είναι δύσκολα αντιληπτές από τους μικρής ηλικίας μαθητές. Για το λόγο αυτό απαιτούνται εργαλεία, δραστηριότητες και επικοινωνιακές ευκαιρίες που να επικεντρώνονται στη δυναμική δράση τους. Επιπλέον, οι μετασχηματισμοί συνδέονται στενά με την τέχνη. Έργα τέχνης που απεικονίζουν μοτίβα και πλακοστρώσεις αποτελούν αποτελεσματικό πλαίσιο διερεύνησης της έννοιας των μετασχηματισμών, καθώς είναι εποπτικά, αναδύονται μέσα από αυτά πολλές σχετικές ιδέες, ενώ είναι εφικτή η διερεύνηση τους με δυναμικό τρόπο μέσα από ένα ψηφιακό περιβάλλον. Συνεπώς, είναι κρίσιμο να δούμε αν και με ποιο τρόπο μπορούν ανάλογες δραστηριότητες να βοηθήσουν τους μικρής ηλικίας μαθητές να νοηματοδοτήσουν γεωμετρικές έννοιες που σχετίζονται με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς.

Στόχος της παρούσας έρευνας είναι η διερεύνηση της εξέλιξης της σκέψης των μαθητών της Ε΄ και Στ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου, εστιάζοντας στον τρόπο που εξελίσσεται ο μαθηματικός τους λόγος αναφορικά με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, κατά τη συμμετοχή τους σε ένα κατάλληλα σχεδιασμένο περιβάλλον μάθησης. Επιπρόσθετα, η ερευνά στοχεύει και στη διερεύνηση του ρόλου των χειραπτικών και των ψηφιακών εργαλείων σε αυτή την εξελικτική διαδικασία, καθώς και του ρόλου της τέχνης στην νοηματοδότηση των μετασχηματισμών. Χρησιμοποιήσαμε τα θεωρητικά πλαίσια της επικοινωνιογνωστικής προσέγγισης και της σημειωτικής διαμεσολάβησης που τα θεωρήσαμε κατάλληλα, καθώς εστιάζομαστε στην επικοινωνία των μαθητών, στον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούν τα εργαλεία και στον τρόπο που τα εργαλεία αυτά διαμεσολαβούν τις κατανοήσεις τους και τις αλλαγές στο λόγο τους αναφορικά με την έννοια των μετασχηματισμών.

Τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας έρευνας είναι τα εξής:

1. Εάν και με ποιους τρόπους εξελίσσεται ο λόγος (discourse) των μαθητών αναφορικά με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς σε πιο μαθηματικοποιημένες εκδοχές.
2. Ποιος είναι ο ρόλος των διαθέσιμων εργαλείων, ψηφιακών και χειραπτικών καθώς και του πλαισίου δραστηριοτήτων στην κατασκευή των μαθηματικών νοημάτων.

3.2 Τα ψηφιακά και χειραπτικά εργαλεία της παρέμβασης

Μια σειρά από δραστηριότητες σχεδιάστηκαν και εφαρμόστηκαν στην παρέμβαση, επικεντρωμένα στη χρήση χειραπτικών υλικών και του ψηφιακού δυναμικού περιβάλλοντος Geometer' Sketchpad, ως εργαλεία της σημειωτικής διαμεσολάβησης.

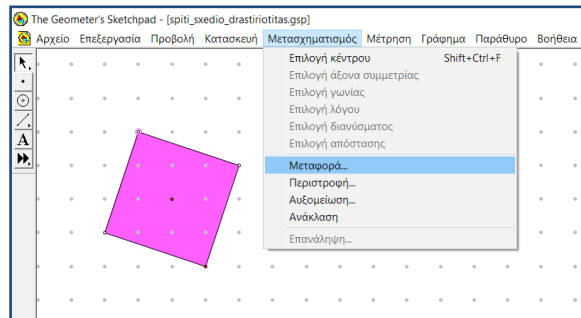
Η σημασία των χειραπτικών εργαλείων αναγνωρίζεται από τη βιβλιογραφία για τη διερεύνηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών. Ο ρόλος τους θεωρείται σημαντικός στις δραστηριότητες γεωμετρίας, ειδικά για τα μικρότερα παιδιά που δεν μπορούν να λειτουργήσουν σε συμβολικό επίπεδο. Η επαφή με τα αντικείμενα προωθεί την χωρική, οπτική και απτή εμπειρία. Ένα κατάλληλο μαθησιακό περιβάλλον πλούσιο σε χειραπτικά υλικά ευνοεί την σχετικιστική μάθηση. Μέσω αυτών οι μαθητές μπορεί να εστιάσουν στη δράση και όχι μόνο στο αποτέλεσμα της δράσης. Η έμφαση δίνεται στην παρατήρηση των κινήσεων, στα τελικά αποτελέσματα των μετασχηματισμών, αλλά και στην ικανότητα να προβλέπεις το αποτέλεσμα ενός μετασχηματισμού (Swoboda & Vighi, 2016).

Ένα από τα χειραπτικά υλικά, που χρησιμοποιείται στην παρέμβαση για τη διερεύνηση των ιδεών αναφορικά με τους μετασχηματισμούς και τις παραμέτρους τους, είναι το χαρτί με κουκκίδες. Ο συγκεκριμένος τύπος χαρτιού έχει τυπωμένες κουκκίδες ανά 1 εκατοστό και στις δύο διαστάσεις. Έτσι δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να ελέγχουν τις παραμέτρους των μετασχηματισμών. Για παράδειγμα, μπορούν να αντιληφθούν ότι ένα αντικείμενο μετακινήθηκε 3 εκατοστά αριστερά ή δεξιά μετρώντας τις κουκκίδες. Ένα άλλο εργαλείο είναι το διαφανές χαρτί. Με αυτό δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να αντιγράψουν τα σχέδια που θέλουν να μετασχηματίσουν, ώστε να μπορούν να οπτικοποιήσουν και να παρακολουθήσουν τις μετακινήσεις τους. Επιπλέον, μεταλλικές βελόνες μπορούν να σταθεροποιήσουν τα αντικείμενα, υλοποιώντας το σημείο περιστροφής. Τέλος, για τη διερεύνηση της γωνίας διεύθυνσης στη μετάθεση, κατασκευάστηκε ένα χάρτινο «ρολόι» που αναπαριστά τις γωνίες διεύθυνσης.

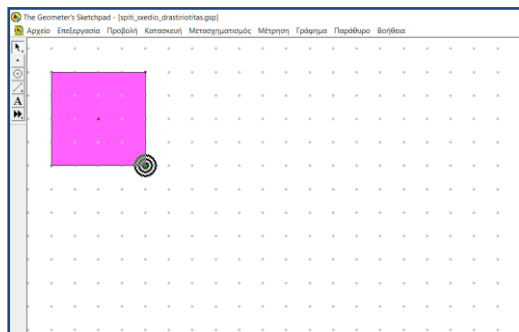
Αναφορικά με το ψηφιακό εργαλείο Geometer's Sketchpad, αυτό είναι ένα εκπαιδευτικό λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας. Επιλέχθηκε γιατί σύμφωνα με τη βιβλιογραφία βοηθά στη διαμεσολάβηση των μαθηματικών ιδεών, παράγοντας πολλά σημεία (signs) (Mariotti 2009 όπ. αναφ. στο Ng & Sinclair, 2015). Το πρόγραμμα επιτρέπει στους μαθητές να παρατηρήσουν και να χειριστούν οπτικά αντικείμενα που κινούνται και αλλάζουν κατά τη διάρκεια του χρόνου. Το περιβάλλον του προγράμματος περιλαμβάνει δυναμικούς οπτικούς διαμεσολαβητές που διαφοροποιούνται από τους στατικούς διαμεσολαβητές που αναφέρει η Sfard. Η διαφορά τους έγκειται στο γεγονός ότι οι στατικοί οπτικοί διαμεσολαβητές δημιουργούν στατικές εικόνες για τα μαθηματικά αντικείμενα, όπως ένα τρίγωνο ή μια αριθμογραμμή. Αντίθετα οι δυναμικοί οπτικοί διαμεσολαβητές μπορεί να αναδείξουν μαθηματικές σχέσεις και ιδιότητες, όπως για παράδειγμα να αναπαραστήσουν μια αμετάβλητη ιδιότητα ενός μαθηματικού αντικειμένου (Ng & Sinclair, 2015).

Με το συγκεκριμένο εργαλείο είναι δυνατή η κατασκευή μαθηματικών αντικειμένων όπως σημεία, ευθείες, κύκλοι και καμπύλα σχήματα. Επίσης, είναι δυνατή η κατασκευή παράλληλων και κάθετων ευθειών, η κατασκευή του μέσου ενός ευθύγραμμου τμήματος κ.λ.π. Επιπρόσθετα, διαθέτει μια σειρά εργαλείων που επιτρέπουν του επίπεδους μετασχηματισμούς. Η χρήση των εργαλείων αυτών επιτρέπει την εφαρμογή των τεσσάρων μετασχηματισμών: της ανάκλασης, της

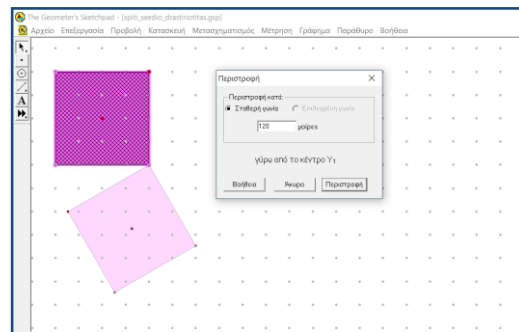
περιστροφής, της μετάθεσης και της αυξομείωσης (Εικ. 3.1). Επιλέγοντας την κατάλληλη εντολή εμφανίζεται μια καρτέλα με τις παραμέτρους του κάθε μετασχηματισμού. Ορθογώνιες ή πολικές συντεταγμένες για τη μετάθεση, σημείο περιστροφής και γωνία για την περιστροφή και άξονας ανάκλασης για την ανάκλαση. Στην εικόνα 3.2 φαίνεται το σημείο περιστροφής, το οποίο επιλέγεται με διπλό κλικ. Ένα παλλόμενο γραφικό υποδεικνύει το σημείο. Στη συνέχεια, αφού επιλεγθεί ο μετασχηματισμός της περιστροφής, ανοίγει η καρτέλα όπου ο χρήστης συμπληρώνει τη γωνία περιστροφής (Εικ.3.3).



Εικόνα 3.1: Οι εντολές των μετασχηματισμών στο GSP



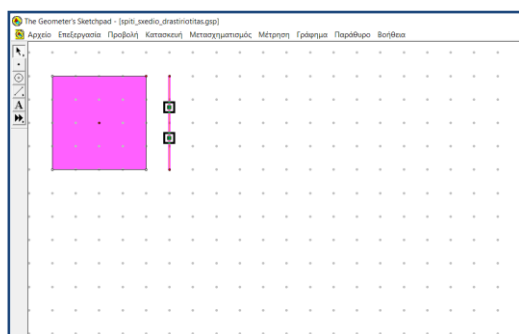
Εικόνα 3.2: Η επιλογή της γωνίας περιστροφής



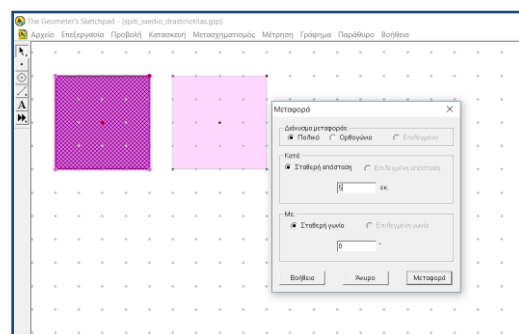
Εικόνα 3.3: Η επιλογή του σημείου περιστροφής

Με παρόμοιο τρόπο επιλέγεται και ο άξονας της ανάκλασης όπως φαίνεται στην εικόνα 3.4.

Στη μετάθεση ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να επιλέξει, συμπληρώνοντας τα πεδία της καρτέλας που ανοίγει, είτε πολικές συντεταγμένες, δηλαδή γωνία διεύθυνσης και απόσταση, είτε ορθογώνιες συντεταγμένες.



Εικόνα 3.4: Η επιλογή του άξονα ανάκλασης



Εικόνα 3.5: Η επιλογή των πολικών συντεταγμένων στη μετάθεση

3.3 Πλαίσιο της έρευνας και συμμετέχοντες

Η έρευνα εφαρμόστηκε σε μία σχολική τάξη, στο πλαίσιο ενός ομίλου μαθηματικών σε δημοτικό σχολείο της Αλεξανδρούπολης. Συμμετείχαν 8 μαθήτριες/τές. 4 κορίτσια και ένα αγόρι της Ε΄ τάξης και 3 αγόρια της Στ΄ τάξης.

Οι συναντήσεις ήταν εβδομαδιαίες, πραγματοποιούνταν μετά το σχολείο στην αίθουσα των υπολογιστών. Η παρουσία των μαθητών ήταν εθελοντική και ελεύθερη, συνεπώς η επιλογή του δείγματος ήταν τυχαία. Προηγήθηκε πρόσκληση συμμετοχής στον όμιλο, όπου εκδήλωσαν ενδιαφέρον οι συγκεκριμένοι μαθήτριες/τές. Όλα τα παιδιά δήλωσαν ότι είχαν καλή σχέση με τα μαθηματικά και το ενδιαφέρον τους για αυτά αποτελούσε κίνητρο για τη συμμετοχή τους στον όμιλο. Οι γνώσεις τους για τους μετασχηματισμούς περιορίζονταν στην έννοια του μοτίβου και την κατοπτρική συμμετρία. Με τις έννοιες αυτές είχαν έρθει σε επαφή μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια των προηγούμενων τάξεων. Δεν γνώριζαν τίποτα άλλο για την έννοια των μετασχηματισμών και δεν διερεύνησαν ποτέ τη δυναμική τους φύση. Η σχέση τους με τους υπολογιστές ήταν σχετικά καλή για την ηλικία τους, αν και δεν είχαν εμπειρία σε προγράμματα γεωμετρίας. Μόνο δύο κορίτσια της Ε΄ τάξης ανέφεραν ότι δεν είχαν πολύ καλή σχέση με τους υπολογιστές. Πριν την εφαρμογή της παρέμβασης, προηγήθηκε μια συνάντηση εξοικείωσης με το περιβάλλον GSP, όπου παρουσιάστηκαν οι βασικές εντολές και τα εργαλεία του προγράμματος, όχι όμως με τις εντολές των μετασχηματισμών. Οι μαθητές πειραματίστηκαν και κατασκεύασαν απλά σχέδια. Φάνηκε να εξοικειώνονται εύκολα και δεν αντιμετώπισαν κάποιο πρόβλημα με τη χρήση του προγράμματος.

Η ερευνητική ομάδα αποτελούνταν από την ερευνήτρια και τη βοηθό της. Εφαρμόσαμε την παρέμβαση, ηχογραφήσαμε, βιντεοσκοπούσαμε και παρατηρούσαμε όλα όσα συνέβαιναν στην τάξη. Ο ρόλος της ερευνήτριας ήταν διττός. Λειτουργούσε ως ερευνήτρια και ως εκπαιδευτικός. Κατά τη διάρκεια της εμπλοκής των μαθητών με τις δραστηριότητες προσπαθούσαμε να είμαστε όσο γίνεται λιγότερο παρεμβατικές και να διευκολύνουμε τις διαδικασίες όπου χρειάζεται. Επειδή οι τρόποι επικοινωνίας μεταξύ των μαθητών ήταν σημαντικοί για τη διερεύνηση της σκέψης τους, φροντίζαμε να εκφράζονται ελεύθερα και να επικοινωνούν όσο περισσότερο γίνεται. Η γραπτή και προφορική έκφραση των ιδεών τους φάνηκε να μην ήταν ιδιαίτερα εύκολη. Έτσι τους ενθαρρύναμε να αποσαφηνίζουν κάθε φορά τις ιδέες τους και τα νοήματα στο λόγο τους.

3.4 Ερευνητική διαδικασία

Η παρέμβαση ολοκληρώθηκε σε 7 εβδομαδιαίες συναντήσεις, διάρκειας περίπου 1,5 ώρας η κάθε μία. Οι δραστηριότητες οργανώθηκαν με τέτοιο τρόπο, ώστε οι μαθητές να δουλέψουν ομαδικά, ανά δύο ή τρία άτομα, με πρόθεση οι ομάδες αυτές να παραμείνουν σταθερές σε όλη τη διάρκεια της παρέμβασης. Η διδακτική ακολουθία δομήθηκε σε τρεις βασικές φάσεις. Στην πρώτη φάση θέλαμε να διερευνήσουμε τις νοηματοδοτήσεις των μαθητών σχετικά με τους μετασχηματισμούς, πριν την

εφαρμογή της παρέμβασης, και στη συνέχεια να διερευνήσουμε πώς εξελίσσονται οι νοηματοδοτήσεις αυτές κατά την εμπλοκή των μαθητών με τη χρήση χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων. Στη δεύτερη φάση στόχος μας ήταν να εμπλέξουμε περαιτέρω τους μαθητές με τι έννοιες των μετασχηματισμών μέσα από τα έργα του Escher που είναι πλούσια στις ιδέες αυτές. Με τον τρόπο αυτό προσδοκούσαμε να εξοικειωθούν οι μαθητές με τη τεχνική των πλακοστρώσεων του Escher, ώστε να την χρησιμοποιήσουν αργότερα σε δικά τους σχέδια. Στην τρίτη φάση θέλαμε να δούμε κατά πόσο οι μαθητές θα μπορούσαν να εφαρμόσουν τις μαθηματικές ιδέες των μετασχηματισμών με τρόπο σχετικά αυτόνομο στα δικά τους έργα.

3.4.1 Α Φάση: Διερεύνηση των νοηματοδοτήσεων των μαθητών για τους μετασχηματισμούς

Η Α φάση χωρίστηκε σε τρεις εβδομαδιαίες συναντήσεις (Α1, Α2, Α3). Οι διδακτικοί στόχοι της Α1 υποφάσης ήταν να διερευνηθούν οι νοηματοδοτήσεις των μαθητών για τους επίπεδους μετασχηματισμούς, πριν την εφαρμογή της παρέμβασης, μέσα από την προβολή βίντεο και εικόνων των ξυστών. Τα ξυστά είναι ένας είδος τοιχογραφίας που αποτελείται από γεωμετρικά διακοσμητικά μοτίβα, χαραγμένα και ξυσμένα πάνω σε φρέσκο κονίαμα στις προσόψεις κατοικιών και άλλων κτιρίων και βρίσκονται αποκλειστικά στο χωριό Πυργί της Χίου. Όπως επισημάνθηκε στην εισαγωγή, τα ξυστά χρησιμοποιήθηκαν για την πρώτη επαφή των μαθητών με τους μετασχηματισμούς γιατί τα μοτίβα τους αποτελούνται από γνωστά γεωμετρικά σχήματα, εμπεριέχουν απλούς μετασχηματισμούς και αισθητικά προσεγγίζουν τα παραδείγματα μοτίβων που εμπεριέχονται στα σχολικά εγχειρίδια.

Ετοιμάστηκε για να προβληθεί ένα βίντεο διάρκειας 1,5 λεπτών, το οποίο απομονώθηκε από ένα ωριαίο ντοκιμαντέρ της ΕΡΤ με τίτλο «Συνάντησα ευτυχισμένους μαστόρους: Τα Ξυστά της Χίου». Στο βίντεο γίνεται μια περιήγηση στο χωριό, ενώ παράλληλα ένας δημοσιογράφος και ένας τεχνίτης συζητάνε για τη συγκεκριμένη τεχνική. Επίσης, ετοιμάστηκε για να προβληθεί μία παρουσίαση με εικόνες από τοιχοποιίες κτηρίων του χωριού.

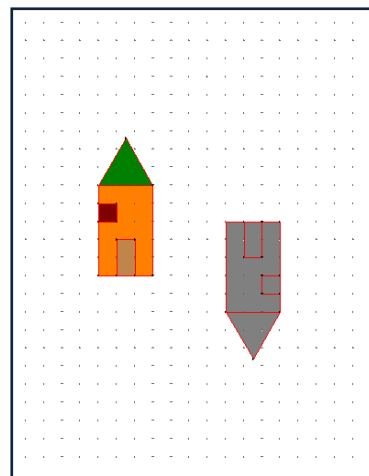


Εικόνα 3.6: Τοιχοποιία κτηρίου στο χωριό Πυργί (Πηγή Εικ.: <https://www.dinfo.gr>)

Στόχος ήταν να δημιουργηθούν τα πρώτα ερεθίσματα, ώστε να ακολουθήσει ομαδική συζήτηση με τους μαθητές αναφορικά με τις παρατηρήσεις τους και τον τρόπο που πιστεύουν ότι δημιουργήθηκαν τα μοτίβα. Για τη συνέχεια ετοιμάστηκε το φύλλο

εργασίας 1, όπου οι μαθητές, χωρισμένοι σε ομάδες, καλούνται να διερευνήσουν τα μοτίβα των ζυστών. Αποτελείται από μια φωτογραφία που απεικονίζει μοτίβα από τα Ξυστά και ζητείται από τους μαθητές να απαντήσουν γραπτώς σε τρία ερωτήματα που αφορούν την αναγνώριση των σχημάτων από τα οποία αποτελούνται τα σχέδια, την περιγραφή του τρόπου με τον οποίο επαναλαμβάνεται το μοτίβο και τη διεύθυνση στην οποία αναπτύσσεται. Η καταγραφή των απαντήσεων αποτελεί μια αναστοχαστική διαδικασία και αποσκοπεί στην αποσαφήνιση της σκέψης των μαθητών, καθώς προσπαθούν να διατυπώσουν τις ιδέες τους.

Η Α2 υποφάση δεν ήταν στον αρχικό σχεδιασμό. Προέκυψε εξαιτίας της δυσκολίας των μαθητών στην υποφάση Α1 να αντιληφθούν τη δημιουργία των σχεδίων ως μετακινήσεις σχημάτων. Στηριχθήκαμε στην ιδέα ενός on line παιχνιδιού και φτιάξαμε στο GSP διάφορα σχέδια, όπου υπήρχε ένα σπίτι και η σκιά του, η οποία είχε υποστεί μετασχηματισμούς. Εκτυπώσαμε τα σχέδια σε χαρτί με κουκκίδες για να μοιραστούν στις ομάδες (Εικ. 3.7). Η εκφώνηση του φύλλου εργασίας 2 ζητούσε να περιγράψουν οι μαθητές τον τρόπο που θα μετακινήσουν το σπίτι για να πέσει πάνω στη σκιά του.

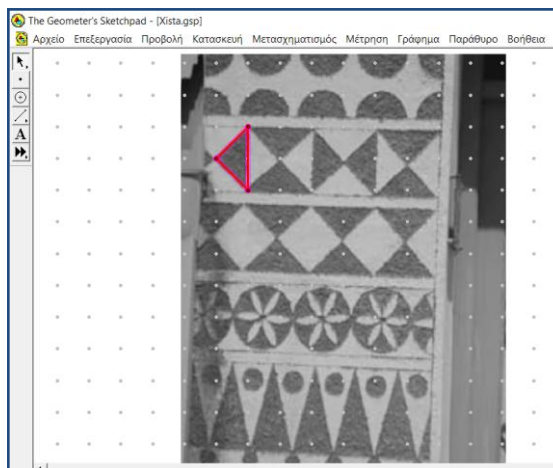


Εικόνα 3.7: Το σπίτι και η σκιά του

Στη συνέχεια, η εκφώνηση ζητούσε από τις ομάδες να ανταλλάξουν τις περιγραφές τους και να προσπαθήσουν να τοποθετήσουν τη σκιά του σπιτιού μόνο από τις περιγραφές των άλλων ομάδων. Σκοπός ήταν οι μαθητές να «αναγκαστούν» να μιλήσουν με όρους μετακίνησης και να στραφεί η προσοχή τους στις παραμέτρους των μετασχηματισμών. Και πάλι οι γραπτές περιγραφές στόχευαν στις ακριβείς γλωσσικές εκφράσεις και στη σαφήνεια του τρόπου περιγραφής και μετακίνησης των σχημάτων. Στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές θα διαχειρίζονταν μόνο χειραπτικά υλικά όπως χαρτί με κουκκίδες, μολύβι, διαφανές χαρτί και βελόνες.

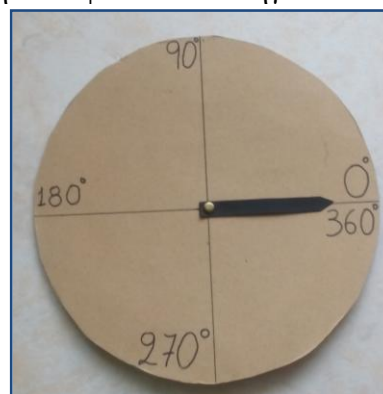
Στην Α3 υποφάση σχεδιάστηκε μια δραστηριότητα για το περιβάλλον του GSP, ώστε να διαπιστωθεί εάν θα άλλαζε ο λόγος των μαθητών σχετικά με τους μετασχηματισμούς, κατά την αλληλεπίδρασή τους με το ψηφιακό εργαλείο. Αρχικά, προγραμματίστηκε μια ομαδική συζήτηση που θα συνέδεε τις άτυπες, προσωπικές εκφράσεις των μαθητών με τους τυπικούς όρους των επίπεδων μετασχηματισμών. Αυτή η σύνδεση εξυπηρετεί τη συσχέτιση των ατομικών νοημάτων με τα μαθηματικά. Σύμφωνα με την Sfard (2007) είναι αδύνατο να εισαχθεί ένας νέος λόγος χωρίς να ονομαστούν από την αρχή τα πραγματικά αντικείμενα, αλλά επίσης είναι δύσκολο να χρησιμοποιηθούν νέα ονόματα χωρίς να συνδεθούν με κάτι οικείο. Από την άλλη, αυτή η σύνδεση είχε ως σκοπό την εξοικείωση των μαθητών με τους τυπικούς όρους των εργαλείων του προγράμματος.

Για τη συνέχεια σχεδιάστηκε η εξής δραστηριότητα: Επικολλήσαμε μια εικόνα με μοτίβα ξυστών στην επιφάνεια του GSP και δημιουργήσαμε το πρώτο επαναλαμβανόμενο στοιχείο (Εικ. 3.8) Το φύλλο εργασίας ζητούσε από τους μαθητές να αποτυπώσουν το μοτίβο χρησιμοποιώντας τις εντολές των μετασχηματισμών και περιγράφοντας γραπτώς τον τρόπο που το έκαναν. Ο σκοπός της δραστηριότητας ήταν να διερευνήσουν οι μαθητές τους μετασχηματισμούς σε ένα δυναμικό περιβάλλον και να διαπιστωθεί εάν ο λόγος τους για τους μετασχηματισμούς



Εικόνα 3.8: Η δραστηριότητα με τα μοτίβα των ξυστών στο GSP (Πηγή Εικ.: Stathopoulou, 2007)

διαφοροποιείται σε σχέση με τη δραστηριότητα στο χαρτί που προηγήθηκε. Και αυτή η δραστηριότητα οργανώθηκε έτσι ώστε οι μαθητές να δουλέψουν σε ομάδες δύο ή τριών ατόμων. Πριν την εμπλοκή τους με τη δραστηριότητα αποφασίστηκε να γίνει μια παρουσίαση των εντολών των μετασχηματισμών και επίδειξη του τρόπου που λειτουργούν. Παράλληλα, δημιουργήθηκε ένα βοηθητικό φυλλάδιο οδηγιών που αφορούσε τις εντολές του προγράμματος, ώστε οι μαθητές να ανατρέχουν σε αυτό (Παράρτημα). Στο πρόγραμμα η μετάθεση μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Με πολικές και με ορθογώνιες συντεταγμένες. Κρίθηκε ότι έπρεπε να συζητηθεί η έννοια των πολικών συντεταγμένων, δηλαδή η γωνία διεύθυνσης και η απόσταση. Η διεύθυνση της μετάθεσης στο πρόγραμμα καθορίζεται με την επιλογή γωνίας. Έτσι η επιλογή των 0 και των 360 μοιρών κινεί το αντικείμενο δεξιά, οι 90 μοίρες επάνω, οι 180 μοίρες αριστερά και οι 270 μοίρες κάτω. Επικουρικά κατασκευάστηκε ένα βοηθητικό εργαλείο, ένα «χάρτινο ρολόι», που αναπαριστούσε τη συγκεκριμένη αντιστοίχιση της διεύθυνσης με τις μοίρες.



Εικόνα 3.9: Το χάρτινο ρολόι

3.4.2 Β Φάση: Διερεύνηση των μετασχηματισμών μέσα από την τεχνική των πλακοστρώσεων του Escher

Στη Β φάση χρησιμοποιήθηκαν τα έργα του Ολλανδού καλλιτέχνη M. C. Escher (1898-1972) για την περαιτέρω διερεύνηση των μετασχηματισμών. Ο Escher ήταν γραφίστας. Οι μαθηματικές ιδέες αποτέλεσαν πηγή έμπνευσης για αυτόν και τις χρησιμοποίησε για να αναπτύξει εξαιρετικά έργα τέχνης. Αν και η πρόθεση του δεν ήταν να κάνει μαθηματικά, πολλά από τα έργα του αποτελούν καθαρά παραδείγματα

των ιδιοτήτων της επίπεδης γεωμετρίας και των μετασχηματισμών. Επηρεασμένος από τα αραβικά μοτίβα κατέληξε στην ιδέα ότι μια επιφάνεια μπορεί να διαιρεθεί ή να καλυφθεί με κανονικό τρόπο από όμοιες μορφές που εφάπτονται η μια με την άλλη χωρίς κενά και επικαλύψεις (Stylianou & Grzegorzczk, 2005).

Η επιλογή των έργων του για την διερεύνηση των μετασχηματισμών έγινε γιατί αποτελεί ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα συνδυασμού της τέχνης και των μαθηματικών. Τα έργα του αποτελούν ένα μέσο σύνδεσης των γεωμετρικών εννοιών των μετασχηματισμών με τις εικαστικές τέχνες και υπό αυτή τη θεώρηση το έργο του πλαισίωσε την παρέμβαση. Στα έργα του τα μοτίβα δεν έχουν τη μορφή γεωμετρικών σχημάτων, εμπεριέχουν πολυπλοκότερους μετασχηματισμούς και δεν είναι τόσο κοντά στα βιώματα των μαθητών. Για αυτό και αποφασίστηκε να έρθουν οι μαθητές σε επαφή με τα έργα του στα μέσα της παρέμβασης και αφού είχαν αποκτήσει κάποια εμπειρία με τους μετασχηματισμούς.

Στη τεχνική του ο Escher ξεκινούσε από ένα κανονικό πολύγωνο που δημιουργούσε πλακόστρωση και αφού μετέβαλλε τις πλευρές του με τρόπο που δεν διατάρασσε την κανονικότητά του, διατηρώντας ίδιο αριθμό κορυφών και κάνοντας ανάλογες τροποποιήσεις, δημιουργούσε την πλακόστρωση χρησιμοποιώντας κάποιο κατάλληλο μετασχηματισμό⁵. Στη συνέχεια, έδινε τη μορφή κάποιας πραγματικής φιγούρας όπως ένα πουλί, ή ενός ανθρώπου. Δημιούργησε, περίπου, 130 έργα περίπου, βασισμένα σε αυτή την τεχνική (Bachmeier, 2016).

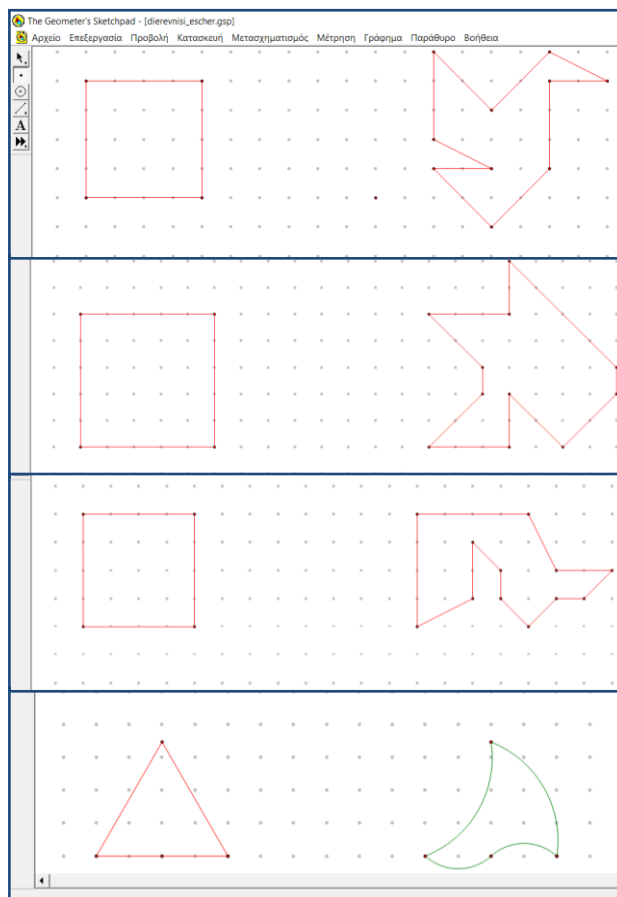
Η Β φάση πραγματοποιήθηκε σε δύο εβδομαδιαίες συναντήσεις. Για την Β1 υποφάση, ετοιμάσαμε μια παρουσίαση με έργα του Escher (Εικ.3.10), βάσει των οποίων προγραμματίσαμε συλλογική συζήτηση με σκοπό να διερευνήσουμε εάν τα παιδιά θα μπορούσαν να αναγνωρίσουν τους μετασχηματισμούς στα έργα του Escher, αφού είχε προηγηθεί κάποια εξοικείωση με τις έννοιες αυτές στις προηγούμενες συναντήσεις. Επίσης, στόχο είχαμε να εντοπίσουμε αλλαγές στο λόγο τους και στον τρόπο αλληλεπίδρασής τους με τα έργα αυτά. Πρόκειται για τα έργα: «Circle Limit III, 1959» που δημιουργήθηκε με την εφαρμογή των μετασχηματισμών της περιστροφής, της μετάθεσης και της αυξομείωσης, «Clowns, 1938» και «Shells and Starfish, 1941» που αποτελούν δείγματα περιστροφικής συμμετρίας, «Bird Fish 1938», «The bird, 1968», «Dragonfly, 1941» που εμπεριέχουν τον μετασχηματισμό της μετάθεσης και «Two birds, 1938», «Fish, 1954» και «Eagle, 1938» που δημιουργήθηκαν με τους μετασχηματισμούς της ανάκλασης και της μετάθεσης.

⁵ Η τεχνική του ονομάζεται “regular division of the plane”



Εικόνα 3.10: Τα έργα του Escher
(Πηγή Εικ.: <http://www.mcescher.com>)

Η Β2 υποφάση αφορούσε τη διερεύνηση της τεχνικής του Escher, όπου ένα γνωστό γεωμετρικό σχήμα που μπορεί να δημιουργήσει πλακόστρωση τροποποιείται κατάλληλα και αφού υποστεί κάποιον μετασχηματισμό καλύπτει το επίπεδο. Ετοιμάσαμε στο περιβάλλον GSP τέσσερα ζευγάρια σχημάτων (το αρχικό και το τελικό σχήμα), ώστε οι μαθητές να βρουν πώς προέκυψε το δεύτερο από το πρώτο (Εικ. 3.11). Στη συνέχεια οι μαθητές θα έπρεπε να πλακοστρώσουν με το τροποποιημένο σχήμα χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο μετασχηματισμό. Στόχος ήταν να διερευνήσουν οι μαθητές περαιτέρω τους μετασχηματισμούς και να εξοικειωθούν με τη τεχνική του Escher για να την χρησιμοποιήσουν στα δικά τους σχέδια.



Εικόνα 3.11: Τα τέσσερα ζευγάρια πλακιδίων

3.4.3 Γ Φάση: Δημιουργία έργων των μαθητών στο περιβάλλον του GSP

Στη Γ φάση θέλαμε οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν τις ιδέες τους για τους μετασχηματισμούς για να κατασκευάσουν τα δικά τους σχέδια στο GSP, εξετάζοντας κατά πόσο θα μπορούσαν να εφαρμόσουν τις μαθηματικές ιδέες των μετασχηματισμών με τρόπο σχετικά αυτόνομο. Αυτά τα σχέδια θα αποτυπώνονταν σε αφίσες και κούπες. Η φάση αυτή σχεδιάστηκε να ολοκληρωθεί σε δύο εβδομαδιαίες συναντήσεις. Εκτυπώθηκαν διάφορα σχέδια βασισμένα στην τεχνική του Escher, ώστε οι μαθητές να πάρουν ιδέες. Αποφασίσαμε τα σχέδια των μαθητών να πληρούν ορισμένα κριτήρια, όπως να χρησιμοποιήσουν όσο περισσότερους μετασχηματισμούς μπορούν, να συνδυάσουν διαφορετικούς μετασχηματισμούς και τα έργα τους να είναι αισθητικά όμορφα.

Συνοψίζοντας, οι δραστηριότητες της παρέμβασης είχαν τα εξής κυρίαρχα χαρακτηριστικά: τη χρήση διαφορετικού τύπου εργαλείων, την ένταξη σε ένα πλαίσιο αντιστοιχίας των μαθηματικών με την τέχνη και την ενθάρρυνση της επικοινωνίας μεταξύ των μαθητών. Κινήθηκαν σε τρεις βασικούς άξονες. Ο πρώτος άξονας αφορούσε τη διερεύνηση του λόγου των μαθητών και κατ' επέκταση των ιδεών τους

σχετικά με τους μετασχηματισμούς μέσα από δραστηριότητες στο χαρτί και στο δυναμικό περιβάλλον. Ο δεύτερος άξονας είχε ως στόχο την εξοικείωση των μαθητών με πολυπλοκότερους μετασχηματισμούς, πλαισιώνοντας τα μαθηματικά νοήματα μέσα από την τεχνική του Escher. Ο τρίτος άξονας αφορούσε την εφαρμογή των ιδεών των μαθητών, μέσα από μια δημιουργική διαδικασία κατασκευής των δικών τους έργων.

3.5 Συλλογή δεδομένων

Για τη συλλογή δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν μαγνητόφωνα τα οποία τοποθετήθηκαν δίπλα σε κάθε ομάδα. Επίσης όλες οι ομάδες βιντεοσκοπούνταν. Η μία ομάδα δούλευε σε έναν φορητό υπολογιστή, ο οποίος διέθετε κάμερα και η οποία ήταν ενεργοποιημένη κατά τη διάρκεια της παρέμβασης. Ένα δεύτερος φορητός υπολογιστής με κάμερα ήταν στραμμένος στις άλλες δύο ομάδες και τις μαγνητοσκοπούσε την ώρα που δούλευαν σε σταθερούς υπολογιστές. Παράλληλα, καταγραφείς οθόνης κατέγραφαν τις ενέργειες των μαθητών στον υπολογιστή. Κατά τη διάρκεια των συναντήσεων μετακινούμασταν ανάμεσα στις ομάδες και παρατηρούσαμε όλα όσα συνέβαιναν.

Τα δεδομένα στα οποία βασίστηκε η έρευνα είναι:

1. Οι απομαγνητοφωνήσεις από κάθε ομάδα
2. Βίντεο από κάθε ομάδα
3. Βίντεο από τον καταγραφέα οθόνης για κάθε υπολογιστή
4. Απαντημένα φύλλα εργασίας των μαθητών
5. Ψηφιακά αρχεία του GSP από τη δουλειά κάθε ομάδας
6. Φύλλα από διάστικτο χαρτί, που οι μαθητές ζήτησαν ως πρόχειρο για να αποφασίζουν τις ιδέες τους.

3.6 Μέθοδος Ανάλυσης

Η ανάλυση των δεδομένων της έρευνας στηρίχτηκε στον εντοπισμό των κρίσιμων συμβάντων, ώστε να αναδειχθούν εκείνα τα περιστατικά που αποκαλύπτουν τις ιδέες των μαθητών για τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Κρίσιμα συμβάντα είναι γεγονότα που λαμβάνουν χώρα κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, καταδεικνύουν μια σημαντική αλλαγή ή ένα εννοιολογικό άλμα σε σχέση με προηγούμενη κατανόηση και οδηγούν τον εκπαιδευτικό να αναρωτηθεί για τις ενέργειες του ή τις αποφάσεις που πρέπει να πάρει, ώστε να βελτιώσει τη διδασκαλία του (Goodell, 2006).

Για την ανάλυση χρησιμοποιήθηκαν οι απομαγνητοφωνήσεις των διαλόγων, τα αρχεία της βιντεοσκόπησης και του καταγραφέα οθόνης, τα απαντημένα φύλλα εργασίας, καθώς και τα ψηφιακά αρχεία με τα έργα των μαθητών στο περιβάλλον του GSP, από όλες τις ομάδες.

Ως κρίσιμα συμβάντα επιλέχθηκαν αυτά στα οποία εντοπίζονται οι νοηματοδοτήσεις των μαθητών για τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς στην αρχή

της παρέμβασης, οι αλλαγές στο λόγο των μαθητών κατά τη διάρκεια της παρέμβασης και δεδομένα που να αναδεικνύουν τον τρόπο που η τέχνη νοηματοδοτεί τα μαθηματικά. Επίσης επιλέχθηκαν κρίσιμα συμβάντα που να αναδεικνύουν τον ρόλο των χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων στη διαμεσολάβηση των μαθηματικών εννοιών.

Η ανάλυση έλαβε χώρα σε δύο επίπεδα. Το πρώτο επίπεδο ανάλυσης αφορά δεδομένα που καταδεικνύουν την εξέλιξη του λόγου των μαθητών όπως λέξεις, χειρονομίες και οπτικοί διαμεσολαβητές. Το δεύτερο επίπεδο ανάλυσης αφορά τον εντοπισμό σημείων όλων των κατηγοριών δηλαδή, σημεία που προέρχονται από τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν, ενδιάμεσα και μαθηματικά σημεία.

Οι ερμηνείες των δεδομένων είναι θεμελιωμένες στα ίδια τα δεδομένα που προέκυψαν από την παρούσα έρευνα, ακολουθώντας τις αρχές της θεμελιωμένης θεωρίας (Grounded Theory), βάσει των νοημάτων και των σκοπών της συγκεκριμένης ομάδας των μαθητριών/των που μελετήθηκαν (Cohen, Manion & Morrison, 2008: 37).

Κεφάλαιο 4

Αποτελέσματα της έρευνας

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας. Αποτελείται από δύο μέρη. Στο πρώτο υποκεφάλαιο διερευνάται η εξέλιξη του μαθηματικού λόγου των μαθητών κατά τη διάρκεια της παρέμβασης. Στο δεύτερο υποκεφάλαιο μελετάται ο ρόλος των διαθέσιμων εργαλείων χειραπτικών και ψηφιακών στην κατασκευή μαθηματικών νοημάτων. Παράλληλα αναζητείται και ο ρόλος της τέχνης στη διαδικασία αυτή ως πλαίσιο νοηματοδότησης των μαθηματικών ιδεών.

4.1 Η αλλαγή στο λόγο των μαθητών για τους μετασχηματισμούς

Σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο της επικοινωνιογνωστικής προσέγγισης που υιοθετείται στην παρούσα εργασία, η διερεύνηση της αλλαγής στο λόγο των μαθητών μας επιτρέπει τη διερεύνηση των εννοιολογικών αλλαγών που συντελούνται στη σκέψη τους για τους μετασχηματισμούς, καθώς αλληλεπιδρούν με τα μαθηματικά αντικείμενα. Τα αποσπάσματα που ακολουθούν μας δίνουν τη δυνατότητα να συγκρίνουμε τον τρόπο που εξελίχθηκε ο λόγος των μαθητών για τις συμμετρίες καθώς αποκτούν εμπειρία με τις έννοιες των μετασχηματισμών στην πορεία της διδασκαλίας. Από την ανάλυση των δεδομένων διαπιστώθηκε ότι και οι τρεις ομάδες μετακινήθηκαν σταδιακά από την 1^η μέχρι την 3^η φάση σε περισσότερο μαθηματικοποιημένους τρόπους με τους οποίους αντιμετώπισαν τα μαθηματικά αντικείμενα. Δεν εντοπίστηκαν μεγάλες διαφοροποιήσεις ανάμεσα στις ομάδες, όσον αφορά την εξέλιξη αυτή.

Κρίσιμα συμβάντα επιλέχθηκαν από όλες τις φάσεις της παρέμβασης. Ωστόσο, τα περισσότερα προέρχονται από δύο συναντήσεις οι οποίες θεωρήθηκαν σημαντικές, καθώς εντοπίστηκε μεγαλύτερη διαφοροποίηση στο λόγο των μαθητών συγκριτικά με αυτόν που εκφέρανε πριν. Αυτές ήταν η 2^η συνάντηση (υποφάση Α2), όπου οι μαθητές ενεπλάκησαν με τη χρήση χειραπτικών υλικών και η 3^η (υποφάση Α3) συνάντηση, όπου ο λόγος τους εμπλουτίστηκε με μαθηματικοποιημένες εκφράσεις, κατά τη διάρκεια αλληλεπίδρασης για πρώτη φορά με το ψηφιακό περιβάλλον.

4.1.1 Ο λόγος των μαθητών για τους μετασχηματισμούς κατά την έναρξη της παρέμβασης

Στο υπο-υποκεφάλαιο αυτό, αναλύεται ο λόγος των μαθητών σχετικά με την έννοια των μετασχηματισμών στην έναρξη της παρέμβασης, ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση με τον λόγο τους στη συνέχεια. Η ανάλυση του λόγου των μαθητών που εκφράστηκε στην αρχή κινήθηκε σε τρεις άξονες. Ο πρώτος αφορά νοηματοδοτήσεις σχετικά με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, ο δεύτερος νοηματοδοτήσεις αναφορικά με τον τρόπο δημιουργίας των επαναλαμβανόμενων προτύπων και ο

τρίτος νοηματοδοτήσεις που σχετίζονται με τις ιδιότητες των σχημάτων των γεωμετρικών ακολουθιών.

Οι νοηματοδοτήσεις σχετικές με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς

Δεδομένου ότι οι μαθητές ήταν μικρής ηλικίας και δεν είχαν καμία προηγούμενη εμπειρία με τη μαθηματική έννοια των γεωμετρικών μετασχηματισμών, θα ήταν άσκοπο να αναζητηθούν από την αρχή στο λόγο τους άμεσες αναφορές σε αυτούς. Εκείνο που έχει σημασία να διερευνηθεί είναι νοήματα που να σχετίζονται με τους μετασχηματισμούς και τα οποία να αποτελούν στοιχείο της εμπειρίας των μαθητών. Τέτοια στοιχεία είναι η έννοια του μοτίβου, της επανάληψης της κανονικότητας κ.λ.π. Η έννοια της επανάληψης, για παράδειγμα, αποτελεί στοιχείο των επίπεδων μετασχηματισμών, καθώς ο μετασχηματισμός ενός αντικειμένου μπορεί να εκληφθεί ως ο τρόπος δημιουργίας ενός προτύπου που επαναλαμβάνεται με κάποιο τρόπο σε μία ή δύο διαστάσεις.

Από την ανάλυση, λοιπόν, του λόγου των μαθητών προέκυψε ότι όλοι οι μαθητές αναγνώρισαν τα σχέδια ως ένα επαναλαμβανόμενο πρότυπο Συγκεκριμένα ένας μαθητής χρησιμοποίησε λέξεις και εκφράσεις για να περιγράψει αυτό το στοιχείο όπως: «γεωμετρικά», «ομοιόμορφα», «είναι το ίδιο», «έχουν ένα σχέδιο», «δεν είναι μπερδεμένα», «μοτίβο», «κάτι που επαναλαμβάνεται συνέχεια».

Το απόσπασμα που ακολουθεί προέρχεται από την ομαδική συζήτηση κατά τη διάρκεια της 1ης συνάντησης (υποφάση Α1). Είχε προβληθεί σε μια επιτοίχια οθόνη ένα βίντεο και στη συνέχεια εικόνες από μοτίβα των ξυστών της Χίου. Όλοι οι μαθητές κάθονταν περιμετρικά της οθόνης και παρατηρούσαν τις εικόνες. Ακολούθησε ομαδική συζήτηση με σκοπό να διερευνηθούν τα νοήματα που κατασκεύαζαν οι μαθητές και να αναζητηθούν στο λόγο τους στοιχεία που να υποδηλώνουν τον τρόπο που αντιλαμβάνονταν τα πρότυπα. Η ερευνήτρια ζήτησε από τους μαθητές να παρατηρήσουν τα σχέδια των Ξυστών στις εικόνες και να περιγράψουν τις ιδέες τους για αυτά. Οι εικόνες αυτές επιτελούσαν τον ρόλο του οπτικού διαμεσολαβητή. Μέσα από τα σχέδια που απεικόνιζαν διαμεσολαβούσαν, με τη βοήθεια της ερευνήτριας, μαθηματικές έννοιες σχετικές με την έννοια των μετασχηματισμών.

- 23:57: [1] E⁶ Παρατηρήστε προσεκτικά αυτή την εικόνα και πες τε μου τι
[2] βλέπετε.
[3] M1 Να πω;
[4] E Να πεις...
[5] M1 Είναι γεωμετρικά, είναι ομοιόμορφα...
[6] E Τι εννοείς είναι ομοιόμορφα;
[7] M1 Δηλαδή είναι το ίδιο, έχουν ένα σχέδιο δεν είναι
[8] μπερδεμένα.

⁶ E: Ερευνήτρια, BE: Βοηθός ερευνήτριας, M1: Μαθητής 1, M2: Μαθητής 2 κ.λ.π....M_Σ: Όλοι οι μαθητές

- [9] M2 Μπερδεμένα είναι, δεν μπερδεύεσαι με αυτά που βλέπεις;
- [10] M1 Όχι αν το δεις, το βλέπεις; Έχει ένα μοτίβο, αυτό έχει ένα
- [11] μοτίβο (σηκώνεται στην οθόνη και δείχνει τα σχέδια στη φωτογραφία, δείχνει μια σειρά με ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο, μετά δείχνει μια άλλη σειρά, κινεί τα χέρια του από αριστερά προς τα δεξιά)
- [12] E Τι εννοείς έχει ένα μοτίβο; Τι είναι το μοτίβο;
- [13] M1 Μοτίβο είναι όταν κάτι επαναλαμβάνεται, συνέχεια
- [14] εεε... χωρίς να αλλάζει.
- [15] M_Σ Ακριβώς
- [16] E Έχετε δει όλοι μοτίβο;
- [17] M2 Ναι, να και της M3 το μπουφάν έχει μοτίβα (Η M3 εκείνη την ώρα σηκώνεται να κρεμάσει το μπουφάν της, το οποίο έχει σχεδιασμένα μοτίβα)

Από τις λέξεις και τις εκφράσεις που χρησιμοποίησε ο M1 στο παραπάνω απόσπασμα φάνηκε να αντιλαμβάνεται την έννοια της επανάληψης και της συνέχειας. Οι χειρονομίες του συμπλήρωναν τον λόγο του καθώς διέτρεχε με το χέρι του το επαναλαμβανόμενο πρότυπο προσδίδοντας μια ροή (Εικ. 4.1). Αλλά και οι υπόλοιποι μαθητές τα αναγνώρισαν ως μοτίβα υποδεικνύοντας τα σχέδια στο μπουφάν μιας μαθήτριας. Η έννοια του γεωμετρικού μοτίβου τους ήταν οικεία καθώς τα εγχειρίδια του δημοτικού από τις πρώτες τάξεις κάνουν αναφορά σε αυτό.



Εικόνα 4.1: Ο M1 δείχνει ένα μοτίβο στην εικόνα με τα Ξυστά

Νοηματοδοτήσεις σχετικές με τον τρόπο δημιουργίας των σχεδίων

Επίσης, στο λόγο των μαθητών στην αρχή της παρέμβασης αναζητήθηκαν στοιχεία που να υποδηλώνουν νοηματοδοτήσεις σχετικά με τον τρόπο δημιουργίας των προτύπων. Αυτό είχε σημασία να αναζητηθεί καθώς θέλαμε να κατανοήσουμε τον τρόπο που αντιλαμβάνονταν τα πρότυπα, ώστε μέσα από τις δραστηριότητες της παρέμβασης να διαπιστωθεί εάν υπήρχε αλλαγή στην αντίληψη των μαθητών για αυτά.

Αναφορικά, λοιπόν, με τον τρόπο δημιουργίας των σχεδίων, ο λόγος όλων των μαθητών υποδήλωνε μια στατικότητα και δεν φαινόταν να κατανοούν τον λόγο της ερευνήτριας η οποία μιλούσε για τα πρότυπα με όρους που υποδήλωναν κίνηση. Η ερευνήτρια ξεκίνησε τη συζήτηση ζητώντας να εντοπίσουν το στοιχείο που επαναλαμβάνεται και να προσδιορίσουν τον τρόπο που μετακινείται ώστε να δημιουργήσει ένα συγκεκριμένο σχέδιο (Εικ. 4.2). Καθώς αντιλαμβάνονταν τη

δυσκολία των παιδιών τους ενθάρρυνε μέσα από ερωτήσεις να αναπτύξουν τις ιδέες τους προσπαθώντας να καθοδηγήσει τη σκέψη τους προς την ιδέα αυτή (Στίχοι [18], [19], [23], [29],[35]). Η στάση του σώματός της, οι χειρονομίες που έκανε και οι λέξεις που χρησιμοποιούσε υποδείκνυαν κίνηση (Εικ. 4.3). Χρησιμοποιούσε εκφράσεις όπως «έστω ότι ξεκινώ από αυτό το σχήμα. Πού θα το πάω;», «πώς θα το μετακινήσω για να φτιάξω το σχέδιο μου;» Ωστόσο, κανείς από τους μαθητές δεν φάνηκε να επικοινωνεί μαζί της αποτελεσματικά. Έδειχναν προβληματισμένοι και δεν φαίνονταν να κατανοούν τον τρόπο που η ερευνήτρια εκφραζόταν. Δυσκολεύτηκαν να αντιληφθούν την ιδέα της δημιουργίας των σχεδίων μέσω της μετακίνησης ενός σχήματος.



Εικόνα 4.2: Μοτίβο σε τοίχο στο Πυργί



Εικόνα 4.3: Χρήση χειρονομιών από την ερευνήτρια

Οι λέξεις και οι εκφράσεις των μαθητών με τις οποίες περιέγραφαν πώς θα δημιουργούσαν το σχέδιο υποδήλωναν ατομικούς τρόπους, οι οποίοι προέρχονταν από την καθημερινή τους εμπειρία. Οι μαθητές εκφράστηκαν με τέσσερεις τρόπους για τη δημιουργία των μοτίβων: Αντιγραφή, σχεδίαση, δημιουργία παζλ και διαχωρισμός ενός τμήματος σε επιμέρους τμήματα. Εμφανίστηκαν πολλά αποσπάσματα πάνω σε αυτή τη δυσκολία των μαθητών. Στα αποσπάσματα, για παράδειγμα, που ακολουθούν φαίνεται ο λόγος των μαθητών πάνω σε αυτές τις ιδέες.

- | | | | |
|-------|------|----|---|
| 25:53 | [18] | E | Ας επικεντρωθούμε εδώ σε αυτήν τη γραμμή. <u>Ποιο είναι το σχήμα που επαναλαμβάνεται</u> (δείχνω ένα μια σειρά, όπου ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο επαναλαμβάνεται με μετάθεση); |
| | [19] | | |
| | [20] | | |
| | [21] | | Ποιο είναι το σχήμα το οποίο χρησιμοποιώ για να φτιάξω το σχέδιο μου; Πώς θα το χρησιμοποιήσω για να κάνω αυτό το γεωμετρικό σχέδιο; <u>Πώς θα το μετακινούσα;</u> |
| | [22] | | |
| | [23] | | |
| | [24] | M1 | Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (είναι πλάγιο παραλληλόγραμμο) |
| | [25] | | |
| | [26] | E | Πώς το χρησιμοποιώ για να φτιάξω το σχέδιο μου; (το |

- [27] δείχνω με το χέρι μου)
- [28] M5 Όλο, όλο, όλο; Θα έπαιρνα και άλλο
- [29] E Πως θα το χρησιμοποιούσες; Πώς θα το μετακινούσες
για να κάνεις το σχέδιο αυτό;
- [30] M5 Θα το αντέγραφα
- [31] E Θα το αντέγραφες; Πώς;
- [32] M5 Εεε θα το έβαζα πάνω σε ένα χαρτί και θα το σχεδιάζα
- [33] E Και μετά; Θα έκανες το πρώτο, μετά;
- [34] M5 Θα έκανα και άλλο
- [35] E Το άλλο πού θα το έκανες; Πάνω; Κάτω; Αριστερά; Δεξιά;
- [36] Πού θα το έκανες για να κάνεις αυτό το σχέδιο;
- [37] M5 Δίπλα
- [38] E Δίπλα. Και μετά;
- [39] M5 Και θα έκανα πολλά και θα το έδειχνα

Η M5 φαίνεται να δυσκολεύεται να αντιληφθεί το νόημα της ερώτησης. Παρά το γεγονός ότι η ερευνήτρια χρησιμοποιεί όρους που δηλώνουν κίνηση (στίχος [29]), αυτή περιγράφει με λέξεις και εκφράσεις που δείχνουν ότι αντιλαμβάνεται τον τρόπο δημιουργίας των σχημάτων διαφορετικά. Χρησιμοποιεί τη λέξη «αντιγράφω», περιγράφοντας μια διαδικασία, όπου χρησιμοποιώντας ένα καλούπι το αντιγράφει τοποθετώντας το κάθε φορά στις αντίστοιχες θέσεις (στίχοι [30], [32], [34], [37]).

Με την ίδια λογική και η M2 στο απόσπασμα που ακολουθεί (στίχος [40]) χρησιμοποιεί το ρήμα «αντιγράφω».

- 30:00: [40] M2 Ααα εάν είχα μόνο ένα. Παίρνω ένα πλακάκι το αντιγράφω
[41] από γύρω, παίρνω άλλο πλακάκι το αντιγράφω από γύρω.
- [42] E Πού θα έβαζες το δεύτερο; Δίπλα, πάνω, αριστερά, δεξιά;
- [43] M2 Παντού θα το έβαζα. Παντού έχει πλακάκια.
- [44] E Εάν ήθελες να κάνεις αυτή τη σειρά;
- [45] M2 Από αριστερά και από δεξιά.

Από την άλλη, ο M1 περιγράφει μια διαδικασία (στίχος [46]) κατά την οποία το σχέδιο προκύπτει από την κατάτμηση του αρχικού σχεδίου σε μικρότερα σχήματα.

- [46] M1 Εγώ θα το χώριζα σε όμοια κομμάτια

Ο τρόπος αυτός περιγραφής του σχεδίου αναιρεί τελείως τον αρχικό λόγο του ίδιου μαθητή για την επαναληπτικότητα των προτύπων (στίχος [13]) ξεφεύγοντας από τη λογική της συνέχειας, καθώς περιορίζει το σχέδιο σε συγκεκριμένη περιοχή του επιπέδου.

Οι νοηματοδοτήσεις των γεωμετρικών μετασχηματισμών μέσω χειρονομιών

Όλοι οι μαθητές που περιέγραφαν τις ιδέες τους αναφορικά με τον τρόπο δημιουργίας των σχεδίων, έκαναν χρήση χειρονομιών για να υποστηρίξουν αυτά που έλεγαν. Παρά το γεγονός ότι εξέφραζαν ιδέες που δεν περιείχαν δυναμικούς όρους, οι κινήσεις των χεριών τους προσέδιδαν μια δυναμικότητα. Για παράδειγμα, στο απόσπασμα που παρατίθεται παρακάτω, η M2 θέλει να περιγράψει τη δημιουργία ενός κυκλικού μοτίβου. Το αντιλαμβάνεται σαν ένα παζλ και το περιγράφει με αυτό τον τρόπο. Η ερευνήτρια της ζήτησε να προσδιορίσει την κίνηση, δείχνοντας με τα χέρια της την οριζόντια διεύθυνση και ρωτώντας εάν είναι η σωστή. Η μαθήτρια διαφώνησε και για να την περιγράψει χρησιμοποίησε τα χέρια της δείχνοντας κυκλική κίνηση. Η ερευνήτρια μιμήθηκε την κίνηση και ζήτησε από τη μαθήτρια να εκφράσει λεκτικά το είδος της κίνησης. Η μαθήτρια ανέφερε ότι θα έκανε έναν κύκλο (Εικ. 4.4).

- 32:00 [47] E Εάν ήθελα να κάνω αυτό εδώ το σχέδιο;
 [48] M2 Θα τα έβαζα αριστερά, δεξιά, αριστερά, δεξιά....
 [49] E Η κίνησή μου όμως θα ήταν έτσι.... όπως έκανα εδώ;
 (δείχνω με τα χέρια μου μια σειρά)
 [50] M2 Δεν μπορούν να γίνουν έτσι
 [51] E Πώς θα γινόταν;
 [52] M2 Θα έμπαιναν έτσι... χωρίς κενά (δείχνει με τα χέρια)
 [53] E Πώς γίνεται να μην υπάρχουν κενά;
 [54] M2 Θα τα βάλουμε σαν παζλ. Το παίρνεις το βάζεις εκεί που
 [55] ταιριάζει.
 [56] E Η κίνησή σου θα ήταν έτσι; (Δείχνω με τα χέρια μου σε σειρά)
 [57] M2 Όχι. Έτσι... (Κάνει με το χέρι της μια στροφή)
 [58] E Τι θα έκανες δηλαδή μια...(κουνώ το χέρι μου κάνοντας
 στροφή)
 [59] M6 Έναν κύκλο
 [60] M2 Έναν κύκλο θα έκανες.

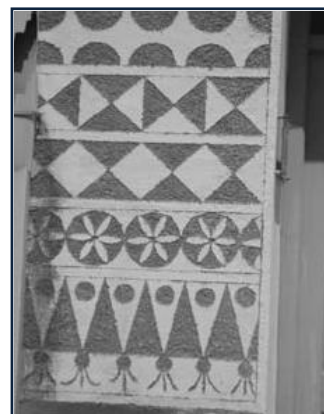


Εικόνα 4.4: Χρήση χειρονομιών για τον προσδιορισμό της διεύθυνσης

Φαίνεται οι χειρονομίες των μαθητών να αποτελούν οπτικούς διαμεσολαβητές που εκφέρουν μαθηματικά νοήματα, όπως αυτό της διεύθυνσης, που δεν μπορούν να τα εκφράσουν με τον προφορικό λόγο, διευκολύνοντας έτσι την επικοινωνία. Μάλιστα συνιστούν δυναμικούς οπτικούς διαμεσολαβητές που παράγονται από τους ίδιους τους μαθητές για να προσδώσουν δυναμικότητα στις στατικές εικόνες.

Ο λόγος των μαθητών κατά τη διάρκεια της 1^{ης} δραστηριότητας

Παρόμοιος λόγος με αυτόν που περιγράφηκε προηγουμένως, διαπιστώθηκε και στη 1η δραστηριότητα που ακολούθησε μετά την ομαδική συζήτηση. Οι μαθητές δούλεψαν κατά ομάδες πάνω σε μία φωτογραφία των ξυστών (Εικ. 4.5). Στο τρίτο ερώτημα τους ζητήθηκε να περιγράψουν τις κινήσεις των σχημάτων που επαναλαμβάνονται, ώστε να δημιουργηθεί ένα συγκεκριμένο σχέδιο. Παρά το γεγονός ότι η εκφώνηση έκανε λόγο για κινήσεις των σχημάτων που επαναλαμβάνονται και η ερευνήτρια μιλούσε με ανάλογους όρους, οι μαθητές δεν θεώρησαν απαραίτητο να περιγράψουν το σχέδιο με αυτό τον τρόπο. Παράλληλα, τους δόθηκε διαφανές χαρτί με σκοπό να αποτυπώσουν το πρώτο σχήμα και να το μετακινήσουν επάνω στη φωτογραφία για να περιγράψουν τις κινήσεις. Οι μαθητές δεν ήξεραν πώς να το χρησιμοποιήσουν και παρά τις υποδείξεις της ερευνήτριας το χρησιμοποίησαν με διαφορετικό τρόπο. Αποτύπωσαν όλο το μοτίβο στο διαφανές χαρτί και δεν το χρησιμοποίησαν περαιτέρω.



Εικόνα 4.5: Η εικόνα της δραστηριότητας 1 (Πηγή: Stathopoulou, 2007)

Στα τρία φύλλα εργασίας δεν εντοπίστηκαν στο γραπτό λόγο των μαθητών λέξεις ή εκφράσεις που να δείχνουν δυναμικότητα και κίνηση.

Στο φύλλο εργασίας της η ομάδα 2 περιέγραψε το σχέδιο αναλύοντας τα συστατικά του μέρη : «*Το σχέδιο μου αποτελείται από τετράγωνα που αποτελούνται από τέσσερα ισοσκελές τρίγωνα ...*». Αυτή η αντίληψη που εντοπίστηκε και στην ομαδική συζήτηση υπονοεί μια αντίφαση στην οπτική τους για το σχέδιο. Από τη μια αναγνωρίζεται ως επαναλαμβανόμενο πρότυπο, από τη άλλη αντιμετωπίζεται ως ένα περιορισμένο χωρικά σχέδιο που καταταμίζεται σε μικρότερα σχήματα.

Οι μαθητές της ομάδας 1 περιέγραψαν το σχέδιο σαν να έδιναν οδηγίες σε κάποιον να το σχεδιάσει. Παρά το γεγονός ότι η περιγραφή τους ήταν πιο λεπτομερής δεν υπήρχε τίποτα στο περιεχόμενό της που να υποδηλώνει κίνηση: «*Πάρε ένα τρίγωνο χάρακα λίγο μικρό μετά φτιάξε ένα πλάγιο τρίγωνο με τη μύτη του αριστερά όπως βλέπεις το χαρτί...*». Κάτι αντίστοιχο συνέβη και στην απάντηση της ομάδας 3 «*Κάνε ένα ισοσκελές τρίγωνο και μόλις τελειώσεις κάνε έναν μικρό κύκλο στα δεξιά της κορυφής του τριγώνου...*».

Οι νοηματοδοτήσεις σχετικά με τις ιδιότητες των επαναλαμβανόμενων προτύπων

Ένα επιπλέον στοιχείο που εντόπισαν οι μαθητές ήταν οι ιδιότητες των επαναλαμβανόμενων προτύπων που συνδέονται άμεσα με τις ιδιότητες των μετασχηματισμών. Εδώ, καθοριστικός ήταν ο ρόλος της ερευνήτριας που προσπάθησε να στρέψει την προσοχή τους στα σταθερά και στα μη σταθερά στοιχεία των μοτίβων. Τα σταθερά στοιχεία που εντόπισαν οι μαθητές ήταν το σχήμα, το χρώμα και το μέγεθος των σχημάτων και τα μη σταθερά η θέση τους. Ένα απόσπασμα εντοπίστηκε πάνω σε αυτές τις ιδέες, το οποίο έλαβε χώρα προς το τέλος της ομαδικής συζήτησης στην υποφάση A1.

- 38:35 [61] E Είπατε ότι μοτίβο είναι κάτι που επαναλαμβάνεται και
[62] δημιουργεί ένα γεωμετρικό σχέδιο. Υπάρχουν πολλοί τρόποι
[63] για να πεις ότι επαναλαμβάνεται ένα μοτίβο. Για παράδειγμα
[64] εδώ, τι μπορεί να πει κανείς ότι επαναλαμβάνεται;
[65] M2 Τρίγωνα
[66] E Τρίγωνα άσπρα ή τρίγωνα μαύρα;
[67] M4 Και τα δύο
[68] E Μια τα άσπρα, μία τα μαύρα. Σε αυτή την επανάληψη που ας
[69] πούμε επαναλαμβάνεται μια το άσπρο μια το μαύρο τρίγωνο,
[70] Αυτό το στοιχείο που επαναλαμβάνεται στο τρίγωνο, σε αυτή
[71] την επανάληψη τι παραμένει σταθερό, τι δεν αλλάζει;
[72] M1 Το χρώμα δεν αλλάζει.
[73] E Το χρώμα δεν αλλάζει; Εννοείς από άσπρο σε άσπρο. Έτσι; Το
[74] χρώμα δεν αλλάζει, Τι άλλο παραμένει σταθερό;
[75] M2 Το τρίγωνο
[76] M1 Το σχήμα του
[77] E Το σχήμα του. Τι άλλο παραμένει σταθερό; (Τα παιδιά
σκέφτονται) Το μέγεθός του αλλάζει;
[78] Όλοι Όχι
[79] E Άρα κατά τη μετακίνηση του δεν αλλάζει το χρώμα, δεν
[80] αλλάζει είπατε το σχήμα του, το μέγεθος του αλλά καθώς
[81] προχωράμε στο μοτίβο τι αλλάζει;
[82] M2 Η θέση του
[83] E Πολύ σωστά, πάρα πολύ ωραία ιδέα, αλλάζει η θέση του
[84] σχήματος. Ωραία

Συνοψίζοντας, στον λόγο των μαθητών για τους μετασχηματισμούς στην αρχή της παρέμβασης εντοπίστηκαν νοηματοδοτήσεις που σχετίζονται με την έννοια των μετασχηματισμών, διερευνήθηκαν νοηματοδοτήσεις αναφορικά με τον τρόπο δημιουργίας των επαναλαμβανόμενων προτύπων και νοηματοδοτήσεις σχετικά με τις ιδιότητες των σχημάτων τους. Διαπιστώθηκε ότι όλοι οι μαθητές αναγνώρισαν τα σχέδια στις φωτογραφίες ως μοτίβα και εξέφρασαν με λέξεις και εκφράσεις τις έννοιες της επανάληψης, της συνέχειας και της ομοιομορφίας. Εύκολα εντόπισαν

ποια στοιχεία του μοτίβου παραμένουν σταθερά όπως το σχήμα, το μέγεθος και το χρώμα και ποια όχι, όπως η θέση του σχήματος στη γεωμετρική ακολουθία. Ωστόσο, δυσκολεύτηκαν να περιγράψουν τη δημιουργία των μοτίβων με όρους κίνησης και δυναμικότητας, ενώ η οπτικής τους φάνηκε να περιορίζεται στο κομμάτι του σχεδίου που έβλεπαν. Οι προσωπικές ιδέες που εξέφραζαν αναφορικά με τον τρόπο που δημιουργούνταν τα σχέδια υπονοούσε μια στατικότητα στην οπτική τους για αυτά, ενώ ήταν ορατές οι επιρροές από την προσωπική τους εμπειρία. Ο τρόπος δημιουργίας των γεωμετρικών σχεδίων εκφράστηκε με τέσσερεις τρόπους: αντιγραφή, σχεδίαση, δημιουργία παζλ και διαχωρισμός τμήματος σε μικρότερα. Ο λόγος κατά τη διάρκεια της 1^{ης} δραστηριότητας δεν φάνηκε να διαφοροποιείται καθόλου, παρά την προσπάθεια της ερευνήτριας να μετατοπίσει τη σκέψη τους στην ιδέα ενός επαναλαμβανόμενου μοτίβου, που προκύπτει από την μετακίνηση ενός γεωμετρικού στοιχείου. Τέλος, οι χειρονομίες λειτουργούσαν ως δυναμικοί οπτικοί διαμεσολαβητές εκφράζοντας μαθηματικές ιδέες όπως αυτή της διεύθυνσης. Παράγονταν τόσο από την ερευνήτρια για να διευκολύνει την επικοινωνία, καθώς θεωρούσε ότι ο μαθηματικός λόγος θα μπορούσε να είναι μην είναι κατανοητός, όσο και από τους μαθητές των οποίων ο προφορικός λόγος είχε ελλείμματα σε μαθηματικό λεξιλόγιο και δεν υποστήριζε τη μαθηματική επικοινωνία.

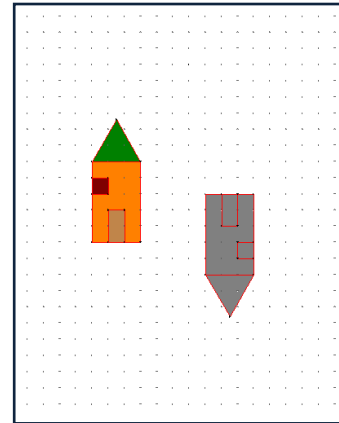
4.1.2 Ο λόγος των μαθητών κατά τη διάρκεια της διερεύνησης με χειραπτικό υλικό

Όπως επισημάνθηκε στο προηγούμενο υπο-υποκεφάλαιο, η πρώτη συνάντηση ανέδειξε, όπως ήταν αναμενόμενο, ότι οι μαθητές δεν είχαν προηγούμενες συνδέσεις με τις έννοιες των επίπεδων μετασχηματισμών. Οι εκφράσεις τους για τον τρόπο δημιουργίας των επαναλαμβανόμενων προτύπων δεν υποδείκνυε καμία δυναμική διαδικασία, ενώ ο λόγος τους ήταν ελλιπής ως προς τους όρους που αφορούσαν τις έννοιες αυτές. Στο υπο-υποκεφάλαιο αυτό αναλύεται ο λόγος των μαθητών κατά τη διερεύνηση των μετασχηματισμών με τη χρήση χειραπτικού υλικού. Τα αποσπάσματα που ακολουθούν προέρχονται από την υποφάση Α2 όπου οι μαθητές στο πλαίσιο της δραστηριότητας «Το σπίτι και η σκιά του» διερεύνησαν νοερές μετακινήσεις σχημάτων στο επίπεδο. Αναλύονται η χρήση χειρονομιών και εργαλείων καθώς και του λεξιλογίου που ανέπτυξαν οι μαθητές σχετικά με τα τρία είδη μετασχηματισμών (μετάθεση, στροφή και ανάκλαση) και των παραμέτρων τους.

Αυθόρμητοι τρόποι διαχείρισης της δυναμικής φύσης των μετασχηματισμών πριν την εισαγωγή εργαλείων

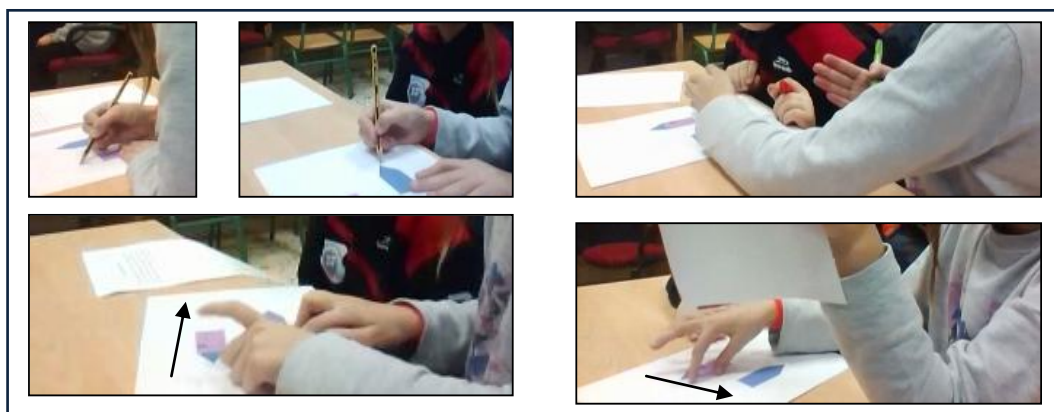
Η δραστηριότητα της υποφάσης Α2 «Το σπίτι και η σκιά του» αποτελεί δυναμική δραστηριότητα η οποία απαιτεί ικανότητες νοερής περιστροφής, κάτι που οι μαθητές αυτής της ηλικίας δεν έχουν αναπτύξει επαρκώς. Στην αρχή της δραστηριότητας φάνηκε ότι οι μαθητές δυσκολεύονταν να περιγράψουν τις μετακινήσεις μόνο με τον λόγο. Έτσι κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας και στις τρεις ομάδες εμφανίστηκαν

τέσσερεις αυθόρμητοι τρόποι με τους οποίους οι μαθητές διαχειρίστηκαν τη δυναμική της φύση: 1) Χειρονομίες που έδειχναν το είδος της μετακίνησης και της διεύθυνσης. Για κάθε είδος κίνησης που ήθελαν να εξηγήσουν κινούσαν με διαφορετικό τρόπο τα χέρια τους. Σε πολλές περιπτώσεις, έστρεφαν το κεφάλι τους, αλλά και ολόκληρο το σώμα τους για να ελέγξουν την κίνηση του σπιτιού. 2) Στροφή του χαρτιού για να προσανατολιστούν. 3) Σχεδίαση με το μολύβι στο χαρτί των πιθανών θέσεων του σπιτιού. 4) Κινήσεις των μολυβιών τους ως βοηθητικά εργαλεία. Αυτοί οι τρόποι φαίνεται ότι λειτουργούσαν ως οπτικοί διαμεσολαβητές, καθώς εξυπηρετούσαν την επικοινωνία των μαθηματικών νοημάτων. Εμφανίστηκαν πολλά σχετικά αποσπάσματα, σε όλες τις ομάδες. Για παράδειγμα το απόσπασμα που ακολουθεί προέρχεται από τα μέσα περίπου της 2^{ης} συνάντησης (υποφάση Α2), όπου οι μαθητές της ομάδας 3 προσπαθούν να περιγράψουν τον μετασχηματισμό της ανάκλασης. Χρησιμοποιούν διάφορα ρήματα για να περιγράψουν την ανάκλαση και διαφωνούν ως προς το πιο είναι καταλληλότερο. Η Μ6 για να διαφοροποιήσει τη σημασία των ρημάτων «μετακινώ» και «γυρίζω» δείχνει την αντίστοιχη κίνηση με το χέρι της, κάνοντας σαφές στη Μ2 τι εννοεί. Με τον τρόπο αυτό φαίνεται να διευκολύνεται η επικοινωνία μεταξύ τους.



Εικόνα 4.6: Η δραστηριότητα «το σπίτι και η σκιά του»

- 44:00 [85] Μ6: Ωραία πάμε τώρα, μετά από δω, που είναι το σπιτάκι;
 [86] Μ2: Το μετακινώ
 [87] Μ6: Το διπλώνω... το γυρίζω
 [88] Μ2: Το μετακινώ.
 [89] Μ6: Το μετακινώ είναι έτσι...όχι, το γυρίζω (κινεί το χέρι της παράλληλα με το θρανίο και στη συνέχεια στρέφει το χέρι της αριστερά-δεξιά για να δείξει τη διαφορά των δύο κινήσεων)



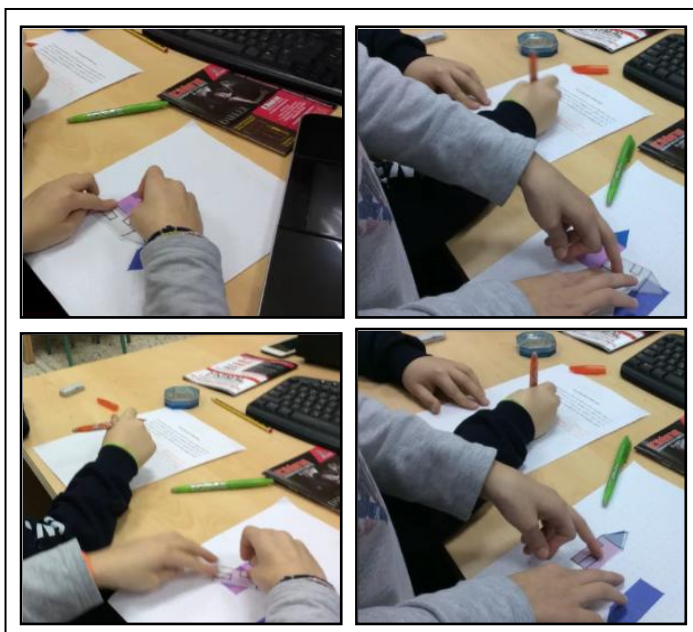
Εικόνα 4.7: Αυθόρμητοι τρόποι διαχείρισης των δυναμικών κινήσεων του σπιτιού στην ομάδα 1



Εικόνα 4.8: Αυθόρμητοι τρόποι διαχείρισης των δυναμικών κινήσεων του σπιτιού στην ομάδα 3

Η χρήση του διαφανούς αντιγράφου του σπιτιού ως εργαλείου δυναμικής διερεύνησης

Διαπιστώνοντας, κατά την υποφάση Α2, ότι οι μαθητές είχαν ανάγκη από εργαλεία που θα τους επέτρεπαν να διαχειριστούν τη δυναμική φύση των μετασχηματισμών, μοιράσαμε ένα επιπλέον εργαλείο: ένα αντίγραφο του σπιτιού από διαφανές χαρτί. Ρωτήσαμε τους μαθητές εάν το χρειάζονται. Οι μαθητές της ομάδας 1 το ζήτησαν και το χρησιμοποίησαν αμέσως. Οι μαθητές της ομάδας 3 το χρησιμοποίησαν στα μέσα της δραστηριότητας. Οι μαθητές της ομάδας 2 δεν το χρησιμοποίησαν καθόλου, καθώς έδειξαν να μην το θεωρούν βοηθητικό εργαλείο. Στις ομάδες που το χρησιμοποίησαν, φάνηκε να υποκαθιστά τις κινήσεις του σώματος. Οι μαθητές το μετακινούσαν πάνω στο χαρτί, το έστρεφαν και το ανακλούσαν για να ελέγξουν τις ιδέες τους (Εικ. 4.9). Διαπιστώθηκε ότι η χρήση του διευκόλυνε το λόγο τους σχετικά με τις μετακινήσεις. Παράλληλα, τους δώσαμε και μια βελόνα με την οποία κρατούσαν σταθερό ένα σημείο του σπιτιού για να το περιστρέψουν. Πριν τους δώσουμε τη βελόνα κρατούσαν με το δάχτυλό τους ή με το μολύβι το σημείο από το οποίο ήθελαν να περιστρέψουν το διαφανές σπίτι.



Εικόνα 4.9: Τρόποι χρήσης του διαφανούς αντιγράφου

Και αυτά τα εργαλεία (διαφανές αντίγραφο και βελόνα) φαίνεται να έπαιζαν το ρόλο του οπτικού διαμεσολαβητή. Ο διαφορετικός τρόπος που τα χρησιμοποιούσαν κάθε φορά οι μαθητές αντιστοιχούσε σε διαφορετικό γεωμετρικό μετασχηματισμό. Έτσι μετακινούσαν το διαφανές σπίτι οριζόντια και κατακόρυφα στη μετάθεση, μετρώντας τις κουκκίδες του διάστικτου χαρτιού για να προσδιορίσουν το μέτρο της απόστασης. Επίσης, το περιέστρεφαν κατά την περιστροφή κρατώντας ακίνητο κάποιο σημείο, είτε με τη βελόνα είτε με το δάχτυλο, υλοποιώντας με τον τρόπο αυτό το σημείο περιστροφής. Και τέλος, αναποδογύριζαν το διαφανές εργαλείο όταν η κίνηση αφορούσε την ανάκλαση.

Λεξιλόγιο και χειρονομίες των μαθητών για τους μετασχηματισμούς και τις παραμέτρους τους

Κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας με το χειραπτικό υλικό, ο λόγος των μαθητών, σε όλες τις ομάδες, εμπλουτίστηκε με λέξεις και εκφράσεις που δήλωναν κίνηση. Οι μαθητές προσπαθούσαν να βρουν την καταλληλότερη λέξη που να αντιστοιχεί στη μετακίνηση που ήθελαν να περιγράψουν. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι άρχισαν να αναπτύσσονται συνθήκες γνωστικής σύγκρουσης. Καθώς οι μαθητές χρησιμοποιούσαν εκφράσεις και λέξεις που δεν τους ικανοποιούσαν και στην προσπάθειά τους να αποδώσουν καλύτερα τις κινήσεις, τις άλλαζαν συνεχώς.

Κάποιες φορές τα ρήματα που χρησιμοποιούσαν δεν ήταν κατάλληλα για να περιγράψουν τις κινήσεις. Ο λόγος των μαθητών δεν ήταν τυπικά μαθηματικός. Ωστόσο, λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι οι μαθητές δεν είχαν έρθει ξανά σε επαφή με τις έννοιες αυτές, θα μπορούσαν να διαπιστωθούν αντιστοιχίες ανάμεσα στον τρόπο που περιέγραφαν τις κινήσεις και στις μαθηματικές έννοιες των μετασχηματισμών.

Το απόσπασμα που ακολουθεί προέρχεται από την ομάδα 1 και είναι χαρακτηριστικό των όσων περιγράφηκαν παραπάνω. Τέτοια αποσπάσματα εμφανίζονταν πολύ συχνά σε όλη τη διάρκεια της 2^{ης} συνάντησης (υποφάση A2). Οι μαθητές προσπαθούν να περιγράψουν τον τρόπο που θα μετακινηθεί το σπίτι. Έχουν περάσει περίπου 20 λεπτά που συζητάνε, αλλάζοντας συνεχώς άποψη.

38:36 [90] M3 Λοιπόν. Εδώ είναι το σπίτι... Το μεταφέρουμε από εδώ... όχι
[91] όχι το μεταφέρουμε από εδώ (κρατάει σταθερή τη γωνία από το διαφανές αντίγραφο του σπιτιού και το γυρνάει μία προς τα πάνω και μία προς τα κάτω)

.....

[92] M3 Καλά το λέμε; (απευθύνεται στην ερευνήτρια)

[93] M4 Ή κρατάμε την αριστερή κάτω γωνία, δηλαδή αυτήν εδώ (δείχνει στο χαρτί)

[94] E Ναι...

[95] M4 Και τη μεταφέρουμε

[96] E Δείξε την μου. Ναι, και τη μεταφέρετε...

- [97] M4 Προς τα αριστερά
 [98] M3 Και μεταφέρουμε το σπίτι προς τα αριστερά
 [99] E Εάν κρατάτε τη γωνία πώς μεταφέρετε το σπίτι;
 [100] M3 Έτσι (μου δείχνει την κίνηση περιστρέφοντας το σπιτάκι)
 [101] E Αυτό είναι μεταφορά; Τι κίνηση είναι αυτή;
 [102] M4 Αααα...
 [103] E Τι κίνηση είναι αυτή;
 [104] M3 Σπρώχνουμε το σπίτι προς τα αριστερά
 [105] E Το σπρώχνετε; Σπρώχνω έτσι (σπρώχνω απαλά το σώμα της M3)
 [106] M4 Το γυρνάω
 [107] E Το γυρνάω σωστά

Ο παραπάνω διάλογος αποκαλύπτει ότι το λεξιλόγιο των μαθητών, εμπλουτίστηκε με δυναμικά ρήματα όπως «μεταφέρω» και «γυρνάω». Το γεγονός αυτό αποτελεί σημαντική αλλαγή σε σχέση με το λεξιλόγιο που χρησιμοποίησαν στην αρχή της παρέμβασης. Επιπρόσθετα, η M3 χρησιμοποίησε το ρήμα «μεταφέρω», το οποίο παραπέμπει στον μετασχηματισμό της μεταφοράς, ενώ προσπαθούσε να περιγράψει την περιστροφή. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι αν και δεν χρησιμοποίησε το κατάλληλο ρήμα, εκτέλεσε σωστά την κίνηση με το διαφανές αντίγραφο. Αυτό αποτελεί ένα ακόμη παράδειγμα που καταδεικνύει ότι για τους μικρούς μαθητές, η σωματική επικοινωνία μοιάζει να είναι πιο ισχυρή από τη λεκτική, λόγω ελλειμμάτων στο λόγο τους και ιδιαιτέρως στο μαθηματικό λόγο.

Αλλά και η ερευνήτρια επιλέγει να εντάξει τις χειρονομίες, ως τρόπο επικοινωνίας με τους μαθητές. Η οπτικοποίηση της κίνησης του κάθε ρήματος και ο προσδιορισμός με αυτόν τον τρόπο της σημασίας τους (στίχοι [99]-[107]), οδήγησε τους δύο μαθητές στην αντικατάσταση του ρήματος «μεταφέρω» με το ρήμα «γυρνάω» για να περιγράψουν την περιστροφή. Η ερευνήτρια παρενέβη και πάλι και επισήμανε τη διττή σημασία του «γυρνάω», οπτικοποιώντας τις κινήσεις της περιστροφής και της ανάκλασης. Οι μαθητές αντιλαμβανόμενοι τη διαφορά προσπάθησαν να εξηγήσουν περιγραφικά την κίνηση και τις παραμέτρους της. Και πάλι η χρήση των χειρονομιών φάνηκε να διευκολύνει την επικοινωνία μεταξύ τους.

- 44:00 [108] M3 Και το γυρνάμε ανάποδα
 [109] E Και το γυρνάτε ανάποδα; Ανάποδα το γυρνάω έτσι, το γυρνάω
 [110] και έτσι (το γυρνάω με δύο τρόπους, περιστροφή και ανάκλαση)
 [111] M3 Και το γυρνάμε....
 [112] E Κρατάτε την αριστερή γωνία σταθερή και το γυρνάτε...
 [113] M4 Προς τα κάτω
 [114] M3 Προς τα κάτω, έτσι ώστε η σκεπή του σπιτιού που κουνάμε να
 [115] είναι προς τα κάτω

Το λεξιλόγιο των μαθητών για τον μετασχηματισμό της περιστροφής και της παραμέτρου της

Οι μαθητές της ομάδας 1 χρησιμοποίησαν αρχικά 4 διαφορετικά ρήματα για να περιγράψουν την περιστροφή όπως: «μετακινώ», «μεταφέρω», «σπρώχνω», «σύρω». Μετά την παρέμβαση της ερευνήτριας (στίχος [106]) χρησιμοποίησαν το ρήμα «γυρνάω». Ανάλογα ρήματα για την περιστροφή όπως «γυρίζω» και «στρίβω» χρησιμοποίησαν και οι μαθητές της ομάδας 3. Οι μαθητές της ομάδας 2 δεν χρησιμοποίησαν περιστροφή για να μετακινήσουν το σπίτι.

Σε καμιά ομάδα το μέτρο της γωνίας δεν προσδιορίστηκε με αναφορά στις μοίρες. Οι μαθητές της ομάδας 3 χρησιμοποίησαν εκφράσεις που προσδιόριζαν τη διεύθυνση, όπως «προς τα αριστερά» και «προς τα κάτω». Οι μαθητές της ομάδας 1 επιχείρησαν να προσδιορίσουν το μέτρο της γωνίας περιστροφής με περιγραφικούς τρόπους έκφρασης, τις οποίες αναδιατύπωναν συνεχώς με σκοπό να βρουν τον καταλληλότερο. Έτσι, η γωνία περιστροφής κατά 180 μοίρες περιγράφηκε με εκφράσεις όπως « γυρνάμε έτσι ώστε η σκεπή του σπιτιού να είναι προς τα κάτω» ή «έτσι ώστε το σπίτι να είναι ανάποδα», ενώ η γωνία περιστροφής κατά 90 μοίρες περιγράφηκε με την έκφραση «έτσι ώστε η μεγάλη δεξιά κάθετη πλευρά του σπιτιού να γίνει οριζόντια» όπως φαίνεται στους στίχους [117], [120] και [127] του παρακάτω αποσπάσματος :

- 46:50 [116] M4 Περίμενε, περίμενε! Την αριστερή κάτω γωνία.
[117] M3 Έτσι ώστε η σκεπή του σπιτιού να είναι προς τα κάτω
[118] M4: Έτσι ώστε η σκεπή να είναι ανάποδα. Όχι ανάποδα να κοιτάει
[119] προς τα κάτω
[120] M3: Έτσι ώστε το σπίτι να είναι ανάποδα
.....
47:00 [121] M3: Και γυρνάμε το σπίτι έτσι ώστε...
[122] M4: Κρατάμε την κάτω γωνία σταθερή και γυρνάμε το σπίτι προς
[123] τα αριστερά...
[124] M3 Δεξιά...
[125] M4: Προς τα δεξιά...
[126] M3: Έτσι ώστε να είναι η σκεπή στα πλάγια... όχι. Έτσι ώστε η
[127] μεγάλη δεξιά κάθετη πλευρά του σπιτιού να γίνει οριζόντια
(εννοεί η κατακόρυφη πλευρά του σπιτιού θα γίνει οριζόντια
όταν το σπίτι περιστραφεί κατά 90 μοίρες)
[128] M4: Με μπέρδεψες
[129] M3: Έτσι όπως είναι το σπίτι, αυτή η πλευρά αντί να είναι κάθετη
[130] θα γίνει οριζόντια

Επιπρόσθετα, οι μαθητές αντιλήφθηκαν την ανάγκη να καθορίσουν το σημείο από το οποίο θα κρατούσαν το σπίτι για να το περιστρέψουν. Φαίνεται να συνειδητοποίησαν ότι η μη αναφορά του μπορεί να οδηγήσει σε μια διαφορετική

επιλογή σημείου, που μπορεί να μετακινήσει το αντικείμενο σε διαφορετική θέση. Και για το σημείο περιστροφής οι μαθητές αντιμετώπιζαν δυσκολία στο να το περιγράψουν. Άλλαζαν συνεχώς διατυπώσεις μέχρι να βρουν αυτή που θεωρούσαν καταλληλότερη. Οι εκφράσεις τους αντανakλούσαν τον τρόπο που αλληλεπιδρούσαν με το χειραπτικό υλικό. Στα αποσπάσματα που ακολουθούν φαίνονται οι ατομικοί τρόποι περιγραφής του σημείου περιστροφής της ομάδας 1. Οι μαθητές της ομάδας αυτής περιέγραψαν το σημείο περιστροφής με εκφράσεις όπως «κρατάμε την αριστερή κάτω γωνία» ή «κουκκίδα». Τα δύο παιδιά διαφώνησαν ως προς το εάν πρέπει να αποκαλέσουν το σημείο περιστροφής «κουκκίδα» ή «γωνία». Η πρώτη λέξη αφορά την κουκκίδα του διάστικτου χαρτιού και η άλλη την κορυφή της γωνία του σπιτιού. Και τα δυο συνδέονται άμεσα με τα χειραπτικά υλικά που χρησιμοποιούσαν.

- 38:36 [131] M4 Όχι, όχι. Περίμενε, άκου! Κρατάμε την αριστερή κάτω γωνία
 [132] M3 Κουκκίδα
 [133] M4 Γωνία
 [134] M4 Κουκκίδα

 [135] M4 Κρατάμε την αριστερή κάτω γωνία προς τα αριστερά και την
 [136] μετακινούμε...

Επίσης, οι μαθητές της ίδια ομάδας χρησιμοποίησαν και άλλες εκφράσεις όπως «πιάνουμε με το δάχτυλό μας τη γωνία κάτω από το παράθυρο» ή «τρυπάμε», ως αποτέλεσμα της χρήσης της βελόνας όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα.

- 58:00 [137] M4 ...τόρα πιάνουμε,
 [138] M3 τρυπάμε
 [139] M4 Πιάνουμε
 [140] M3 Κρατάμε, κρατάμε την πάνω γωνία της αριστερής πλευράς, την
 [141] πάνω αριστερή γωνία...
 [142] M4 Ναι, λέγε
 [143] M3 Γωνία...
 [144] M4 Και τη μετακινούμε...

Οι μαθητές της ομάδας 3 χρησιμοποίησαν ανάλογες εκφράσεις όπως «πιάνουμε» ή «κρατάμε με το δάχτυλό μας τη γωνία κάτω από το παράθυρο».

Το λεξιλόγιο των μαθητών για τον μετασχηματισμό της ανάκλαση και την παράμετρο της

Η ανάκλαση εάν και είναι γνώριμος μετασχηματισμός, αφού σχετίζεται με την έννοια της συμμετρίας, δεν αναγνωρίστηκε και δεν ανακλήθηκε από καμιά ομάδα. Επίσης, σε καμιά ομάδα δεν έγινε αντιληπτή η σημασία της παραμέτρου του άξονα ανάκλασης παρά μόνο στην ομάδα 3, μετά από την επισήμανση της βοηθού ότι πρέπει να καθοριστεί. Οι μαθητές χρησιμοποίησαν ατομικούς τρόπους έκφρασης για

να περιγράψουν την ανάκλαση και αναδιατύπωναν συνεχώς, ώστε βρουν τη λέξη ή την έκφραση που να περιγράφει επαρκώς τον συγκεκριμένο μετασχηματισμό. Το απόσπασμα που ακολουθεί προέρχεται από την ομάδα 3 στα μέσα της 2^{ης} συνάντησης και είναι χαρακτηριστικό της προσπάθειας των δύο μαθητριών να βρουν το κατάλληλο λεξιλόγιο για να περιγράψουν την ανάκλαση.

- 40:50 [145] M6 Γυρνάμε το σπιτάκι ανάποδα από την κάτω πλευρά του χαρτιού
 [146] M2 Και τι θα καταλάβουν από αυτό; (εννοεί οι υπόλοιπες ομάδες
 [147] όταν θα ανταλλάξουν περιγραφές) Έτσι όπως είναι το
 [148] σπιτάκι... μετακινούμε το σπιτάκι... Τι να πούμε;... Το
 [149] μετακινούμε
 [150] M6 Γυρίζουμε
 [151] M2 Βάζουμε απέναντι τα σπίτια (εννοεί αυτό του χαρτιού και το
 [152] διαφανές αντίγραφό του)... Βάζουμε την κάτω πλευρά του
 [153] σπιτιού να ακουμπάει...

Με ανάλογο τρόπο στην ομάδα 2, ο μαθητής M1 αντιλαμβάνεται τη δίσσημη σημασία του ρήματος «*γυρνάω*» και ψάχνει ένα καταλληλότερο που περιγράφει την ανάκλαση. Λέει στον M7: «*Δεν θέλω να πω θα το γυρίσω ανάποδα... θα το...; Γιατί άμα θα πω να το γυρίσω ανάποδα θα σημαίνει... τη λέξη δεν μπορώ να βρω*» ο M7 του απαντά: «*Οχι γυρνά ανάποδα, αναποδογυρίζω*».

Το λεξιλόγιο των μαθητών για τον μετασχηματισμό της μετάθεσης και των παραμέτρων της

Η μετάθεση φάνηκε να είναι ο πιο εύκολα διαχειρίσιμος από τους μαθητές μετασχηματισμός. Οι μαθητές της ομάδας 2 και 3 χρησιμοποίησαν ρήματα όπως «*μετακινώ*» και «*προχωρώ*». Οι μαθητές της ομάδας 1 χρησιμοποίησαν περισσότερους τρόπους να εκφράσουν τη μετάθεση όπως: «*μετακινώ*», «*ανεβάζω*», «*κατεβάζω*», «*πάω*», «*μεταφέρω*» και «*προχωρώ*».

Επίσης, οι μαθητές σε όλες τις ομάδες αντλήθηκαν την ανάγκη να καθοριστεί η παράμετρος της απόστασης. Το διάστικτο χαρτί τους καθοδήγησε να χρησιμοποιήσουν τις κουκκίδες για να μετρήσουν. Τις αποκαλούσαν «*βουλίτσες*» ή «*κουτάκια*». Το παρακάτω απόσπασμα προέρχεται από την ομάδα 3. Οι δύο μαθήτριες προσπαθούν να προσδιορίσουν το μέτρο της απόστασης και τη μονάδα μήκους που θα χρησιμοποιήσουν.

- 44:00 [154] M2 Ναι, το μετακινώ ένα, δύο...
 [155] M6 Ένα, δύο, τρία, τέσσερα, πέντε, έξι κουτάκια.
 [156] M2 Έξι βουλίτσες.
 [157] M6 Όχι ένα, δύο... πέντε, έξι κουτάκια. Οι βουλίτσες είναι πιο
 [158] πολλές (Η M6 μετράει τις βουλίτσες επτά, μετά το
 [159] διορθώνει). Έξι κουτάκια.

- [160] M2 Γράψε έξι βουλίσες, γιατί δεν έχει κουτάκια πουθενά.
 [161] M6 Ωραία το μετακινώ έξι βουλίσες.

Αντίθετα με τους υπόλοιπους μαθητές, ο M4 της ομάδας 1 συνειδητοποίησε ότι η απόσταση ανάμεσα στις κουκκίδες είναι ένα εκατοστό και έτσι χρησιμοποίησε τα εκατοστά για να προσδιορίσει το μέτρο της απόστασης:

- 34:70 [162] M3 Εκεί όπου ήταν, έτσι όπως ήταν, το γυρνάς, τέλειο (το περιστρέφει)
 [163] το πάμε έτσι και μετά (το μεταφέρει δεξιά οριζόντια) τέσσερεις
 [164] βουλίσες επάνω, το μεταφέρουμε μία, δύο, τρεις,
 [165] τέσσερεις... έντεκα βούλες προς τα δεξιά.
 [166] M4 Όχι, έντεκα εκατοστά. Κυρία, αυτή η απόσταση δεν είναι ένα
 [167] εκατοστό;
 [168] E Ναι, ακριβώς
 [169] M3 Το μετακινούμε δώδεκα εκατοστά δεξιά

Μια ακόμη παράμετρος της μετάθεσης, η διεύθυνση, εντοπίστηκε στο λόγο των μαθητών, σε όλες τις ομάδες. Η αναφορά της διεύθυνσης έγινε με επιρρηματικές φράσεις όπως «προς τα αριστερά», «προς τα δεξιά», «προς τα κάτω» ή «προς τα επάνω».

Συνοψίζοντας, κατά τη διερεύνηση των μετασχηματισμών με χειραπτικό υλικό διαπιστώθηκε ότι το διάστικτο χαρτί από μόνο του δεν αρκούσε. Η ανάγκη για εργαλεία που θα βοηθούσαν στη δυναμική διερεύνηση των εννοιών οδήγησε τους μαθητές στη χρήση του σώματός τους, των μολυβιών τους και των εργαλείων που τους δόθηκαν για να περιγράψουν τις κινήσεις των γεωμετρικών σχημάτων. Όλα αυτά, λειτουργούσαν ως οπτικοί διαμεσολαβητές που τους βοηθούσαν να αναπαραστήσουν τους μετασχηματισμούς και διευκόλυναν την επικοινωνούν μεταξύ τους.

Στο λόγο τους χρησιμοποίησαν ρήματα και εκφράσεις που δήλωναν κίνηση, προσπαθώντας να επιλέξουν αυτό που αντιστοιχούσε καλύτερα στις μετακινήσεις που αποφάσιζαν, αναδιατυπώνοντας συνεχώς το λεξιλόγιό τους. Συχνά χρησιμοποιούσαν το ίδιο ρήμα για να εκφράσουν διαφορετικούς μετασχηματισμούς. Στην προσπάθειά τους αυτή να επικοινωνήσουν τα μαθηματικά νοήματα συνεπικουρούσαν και οι χειρονομίες, που υποκαθιστούσαν συχνά τον προφορικό λόγο και εξέφραζαν με ορθότερο τρόπο τις μαθηματικές έννοιες.

Οι μετασχηματισμοί της μετάθεσης και της περιστροφής φαίνεται να ήταν ευκολότερο να εκφραστούν λεκτικά. Αντίθετα, για τη ανάκλαση, αν και γνωστή μαθηματική έννοια, δεν ανακλήθηκε ως όρος και διαπιστώθηκε μια δυσκολία στην περιγραφή της. Επιπρόσθετα, οι μαθητές περιέγραφαν λεκτικά τις παραμέτρους των μετασχηματισμών, αντιλαμβανόμενοι ότι ο καθορισμός τους ήταν απαραίτητος για την ορθή περιγραφή των μετακινήσεων. Έτσι, στη μετάθεση περιγράφανε το μέτρο της

απόστασης και τον προσανατολισμό. Στην περιστροφή, τη φορά, το σημείο περιστροφής και τη γωνία περιστροφής. Το μέτρο της γωνίας περιστροφής το περιγράφανε περιφραστικά, χρησιμοποιώντας την αλλαγή της θέσης των στοιχείων του σπιτιού για να το εκφράσουν. Ο άξονας ανάκλασης δεν αναφέρθηκε από τους μαθητές και η περιγραφή του τρόπου που ανακλώνταν το σπίτι γινόταν με αναφορά στη διεύθυνση.

Ο ρόλος της ερευνήτριας ήταν διευκολυντικός. Ανέλυε τη σημασία των λέξεων που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές σε σχέση με την κίνηση που περιέγραφαν και οπτικοποιούσε τις κινήσεις, ώστε οι μαθητές να βρουν καταλληλότερες λέξεις.

Καταληκτικά, οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να εκφράσουν τυπικό μαθηματικό λόγο για τόσο πολύπλοκες και καινούριες έννοιες, όπως αυτές των μετασχηματισμών. Για τον προσδιορισμό των μετακινήσεων των γεωμετρικών σχημάτων χρησιμοποίησαν ατομικούς τρόπους έκφρασης, οι οποίοι συνδέονταν με τον τρόπο που αλληλεπιδρούσαν με το χειραπτικό υλικό. Αν και ο λόγος τους δεν ήταν τυπικά μαθηματικός, ενείχε μαθηματικές ιδέες, αποτελώντας μια καλή αφετηρία για την εισαγωγή των μαθητών στο ψηφιακό περιβάλλον. Στο επόμενο υπο-υποκεφάλαιο περιγράφονται οι διεργασίες που έλαβαν χώρα κατά τη διερεύνηση των μετασχηματισμών με ψηφιακά εργαλεία, καθώς και η πορεία των μαθητών σε πιο μαθηματικοποιημένο λόγο.

4.1.3 Ο λόγος των μαθητών κατά τη διερεύνηση των μετασχηματισμών στο περιβάλλον του GSP

Στο υπο-υποκεφάλαιο αυτό περιγράφεται ο τρόπος που εξελίχθηκε ο λόγος των μαθητών αναφορικά με τους μετασχηματισμούς κατά την εμπλοκή τους σε δραστηριότητες στο ψηφιακό περιβάλλον GSP. Αρχικά παρουσιάζεται ο τρόπος που εισήχθησαν οι τυπικοί μαθηματικοί όροι των μετασχηματισμών και η πρώτη επαφή των μαθητών με το ψηφιακό περιβάλλον διερεύνησης των μετασχηματισμών. Επιπλέον, περιγράφονται οι δυσκολίες και οι στρατηγικές των μαθητών καθώς αλληλεπιδρούσαν με τα ψηφιακά αντικείμενα, οι δυναμικοί και μη δυναμικοί διαμεσολαβητές που αναπτύχθηκαν και ο ρόλος της ερευνήτριας σε όλη αυτή τη διαδικασία.

Σύνδεση των ατομικών εκφράσεων των μαθητών για τους μετασχηματισμούς με τους τυπικούς μαθηματικούς όρους

Η διερεύνηση των μετασχηματισμών με το χειραπτικό υλικό έδωσε τη δυνατότητα στους μαθητές να εκφράσουν με ατομικούς τρόπους τις ιδέες για τους μετασχηματισμούς και τις παραμέτρους τους. Ωστόσο, η μετάβαση στο ψηφιακό περιβάλλον δεν θα μπορούσε να γίνει αμέσως, καθώς οι εντολές του προγράμματος GSP εμπεριέχουν τη μαθηματική ορολογία των μετασχηματισμών και η εξοικείωση μαζί του είναι απαραίτητη για την αποτελεσματικότερη χρήση του. Κρίθηκε λοιπόν αναγκαίο να συνδεθούν οι άτυπες εκφράσεις των μαθητών με τους τυπικούς

μαθηματικούς όρους. Πριν την εισαγωγή στο πρόγραμμα έγινε μια ομαδική συζήτηση με τα παιδιά σχετικά με το λόγο που αναπτύζανε στη δραστηριότητα «Το σπίτι και η σκιά του». Αναζητήθηκαν οι προσωπικές εκφράσεις των παιδιών για τους μετασχηματισμούς και τις παραμέτρους τους. Στη συνέχεια, η ερευνήτρια συνέδεσε τον τρόπο που εκφράστηκαν οι μαθητές για τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς με τους τυπικούς μαθηματικούς όρους. Σκοπός της ερευνήτριας ήταν η συζήτηση να επικεντρωθεί στο επίπεδο του μετα-λόγου, ώστε οι μαθητές να αναστοχαστούν επάνω στο λόγο τους για τους μετασχηματισμούς και να τους συνδέσουν με τους μαθηματικούς όρους.

Οι μαθητές φάνηκε να ανταποκρίνονται σε αυτή τη διαδικασία. Κατά τη συζήτηση ανέφεραν το λεξιλόγιο που χρησιμοποιούσαν στη διερεύνηση των μετακινήσεων με το χειραπτικό υλικό. Οι μετακινήσεις του σπιτιού συνδέθηκαν με τον μαθηματικό όρο του μετασχηματισμού. Ρήματα και εκφράσεις που χρησιμοποιούσαν όπως «θα το μετακινήσω», «θα το πάω» συνδέθηκαν με την μετάθεση, ρήματα όπως το «αναποδογυρίζω» συνδέθηκαν με την ανάκλαση, ενώ ρήματα όπως «περιστρέφω», «γυρίζω» αναφέρθηκαν ως περιστροφή. Το απόσπασμα που ακολουθεί προέρχεται από τη σχετική συζήτηση.

- 06:13 [170] E Λοιπόν... Τι προσπαθήσατε να κάνετε; Να μετακινήσετε το
 [171] σπίτι για να πέσει πάνω στη σκιά, έτσι δεν είναι; Και
 [172] επινοήσατε πάρα πολλούς τρόπους για να το κάνετε... Οι
 [173] τρόποι που μετακινούμε σχήματα στα μαθηματικά,
 [174] ονομάζονται μετασχηματισμοί ... Κάποιοι είπατε για να πάει
 [175] το σπιτάκι στη σκιά, θα το μετακινήσω. Τι άλλες λέξεις
 [176] χρησιμοποιήσατε θυμάστε; Για πες M3.
 [177] M3 Γυρίσω, μετακινήσω, περιστρέφω...
 [178] M7 Περικυκλώνω
 [179] E Αλλά όταν λέγατε ότι θα το πάτε από τη μια μεριά στην άλλη
 [180] χρησιμοποιούσατε τις εκφράσεις «θα το πάω», κάποιοι είπατε
 [181] «θα το μετακινήσω». Αυτό το να το πάω το ένα σχήμα σε μια
 [182] άλλη θέση, ονομάζεται, μετάθεση ή μεταφορά στα μαθηματικά
 [183] δηλαδή από μία θέση που είμαι να πάω σε μία άλλη θέση.

 [184] M4 Περιστρέφω
 [185] E «Περιστρέφω» λέγατε. Τι άλλο λέγατε;... «Γυρίζω» κάποιοι
 [186] είπατε, (Γράφω τις λέξεις στον πίνακα). Αυτός ο
 [187] μετασχηματισμός λέγετε περιστροφή.

Αναφορικά με τις παραμέτρους των μετασχηματισμών, η ερευνήτρια συνέδεσε τη διεύθυνση της μετάθεσης με τον λόγο των μαθητών που περιελάμβανε φράσεις όπως «προς τα δεξιά» ή «προς τα αριστερά», ενώ το μέτρο της απόστασης συνδέθηκε με τις λέξεις «κουκκίδες», «κουτάκια» και «εκατοστά». Ο άξονας ανάκλασης συνδέθηκε με τη λέξη «μεριά». Το μέτρο της γωνίας περιστροφής με

φράσεις όπως «*θα το γυρίσω έτσι ώστε η μύτη της στέγης να πάει προς τα κάτω*». Στο απόσπασμα που ακολουθεί, η ερευνήτρια συνδέει τους ατομικούς τρόπους περιγραφής των μαθητών του μέτρου της γωνίας με τον τυπικό μαθηματικό όρο.

- 10:00 [188] E ...Τι έπρεπε να αποφασίσετε στην περιστροφή για να μας πείτε
[189] πώς θα το γυρίσετε;
[190] M4 Ποια γωνία
[191] E Ποια γωνία, πάλι το πόσο εδώ. Κάτι άλλο έπρεπε να (η
ερευνήτρια γράφει τη λέξη γωνία στον πίνακα)
[192] αποφασίσετε;
[193] M4 Προς τα πού;
[194] E Προς τα πού. Το προς τα πού, είπατε δεξιά, αριστερά. Το πόσο
[195] το είπατε με πολλούς τρόπους. «Θα το γυρίσω έτσι ώστε η
[196] κάτω πλευρά να πάει ανάποδα» «Θα το γυρίσω έτσι ώστε
[197] η αριστερή πλευρά θα πάει δεξιά» κάποιος είπε «Θα το γυρίσω
[198] έτσι ώστε η μύτη της στέγης να πάει προς τα κάτω»
[199] M3 Ναι
[200] E1 Αλλά στα μαθηματικά, όταν θέλουμε να πούμε πόσο είναι η
[201] γωνία, πώς την μετράμε;
[202] M5 Με μοίρες
[203] E1 Με μοίρες τη μετράμε. Κάποιοι σκεφτήκατε με διαφορετικό
[204] τρόπο. Το είπατε με περισσότερα λόγια.

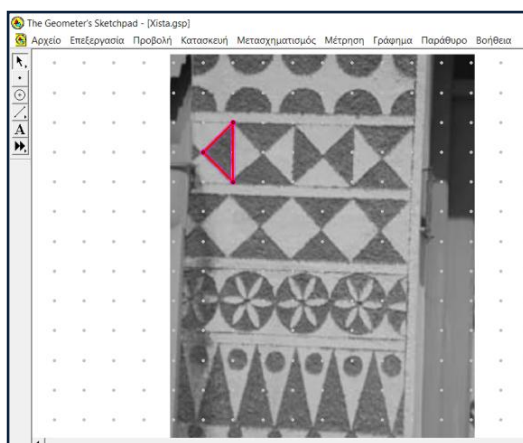
Η εισαγωγή στο πρόγραμμα Geometer's Sketchpad

Η εισαγωγή στο πρόγραμμα GSP έγινε μέσω μιας σύντομης παρουσίασης των εντολών των μετασχηματισμών. Η ερευνήτρια προέβαλε το περιβάλλον του προγράμματος σε μια επιτοίχια οθόνη και έκανε επίδειξη των εντολών εφαρμόζοντάς τους σε γεωμετρικά σχήματα. Κατά τη διάρκεια της παρουσίασης και πάλι γινόταν αναφορά στις ατομικές εκφράσεις και στις ενέργειες των μαθητών στη δραστηριότητα «Το σπίτι και η σκιά του». Αυτό φάνηκε να βοηθάει τους μαθητές να συνδέσουν τους νέους όρους που έβλεπαν στις εντολές του προγράμματος με τις ιδέες που ανέπτυξαν από την προηγούμενη εμπειρία τους. Το τεχνικό κομμάτι δεν φάνηκε να τους δυσκολεύει ιδιαίτερα. Στο παρακάτω απόσπασμα, η ερευνήτρια παρουσιάζει την εντολή της περιστροφής. Θέλει να θυμίσει την έννοια του σημείου περιστροφής για να δείξει πώς επιλέγεται στο πρόγραμμα. Στην οθόνη είναι σχεδιασμένο ένα ισόπλευρο τρίγωνο παρόμοιο με τη στέγη του σπιτιού της δραστηριότητας «Το σπίτι και η σκιά του». Η ερευνήτρια συνέδεσε τον τρόπο που οι μαθητές επέλεγαν σημείο περιστροφής με το χειραπτικό υλικό με την αντίστοιχη εντολή του προγράμματος.

- 35:00 [205] E Τι άλλο πρέπει να αποφασίσω; Εκεί με τη βελόνα που
[206] παιδεύουν την προηγούμενη φορά, M4;

- [207] M4 Μμμ...
- [208] E Που κρατούσες τη βελόνα. Η βελόνα τι έδειχνε;
- [209] M4 Τη γωνία. Μια γωνία.
- [210] E Έδειχνε από πού θα το κρατήσεις για να το περιστρέψεις. Άλλο
- [211] να το κρατήσω από εδώ και άλλο από εδώ (Δείχνω
- [212] διαφορετικά σημεία του τριγώνου). Πρέπει να αποφασίσω το
- [213] σημείο περιστροφής. Για να το επιλέξω πατώ διπλό κλικ.

Μετά την παρουσίαση των εντολών του προγράμματος δόθηκε στις ομάδες η δραστηριότητα 3. Στο περιβάλλον του GSP επικολλήθηκε μια εικόνα με μοτίβα ξυστών. Σε ένα από τα μοτίβα αυτά σχεδιάστηκε το πρώτο σχήμα και ζητήθηκε από τους μαθητές να σχεδιάσουν το υπόλοιπο με τη βοήθεια των εντολών του προγράμματος. Επικουρικά τους δόθηκε ένα βοηθητικό φυλλάδιο με τις εντολές των μετασχηματισμών.



Εικόνα 4.10: Η εικόνα με μοτίβα που επικολλήθηκε στο περιβάλλον GSP (Πηγή Εικ.: Stathopoulou, 2007)

Κατά την πρώτη επαφή τους με το GSP οι μαθητές φάνηκε να είναι λίγο επιφυλακτικοί. Για ένα δεκάλεπτο περίπου, πειραματίστηκαν με το περιβάλλον του προγράμματος. Στην ομάδα 1 έσβησαν τις κορυφές του τριγώνου και μετακινούσαν τη φωτογραφία. Τελικά, αποφάσισαν να δοκιμάσουν ανάκλαση την οποία αποκάλεσαν καθρεφτισμό. Ανέτρεχαν συχνά στο φυλλάδιο οδηγιών. Στην ομάδα 3 χρησιμοποίησαν αρχικά τις εντολές σχεδίασης. Στη συνέχεια, πειραματίστηκαν άσκοπα με διάφορους μετασχηματισμούς και τελικά ζήτησαν τη βοήθεια της ερευνήτριας για να εφαρμόσουν την ανάκλαση. Στην ομάδα 2 αφού δοκίμασαν διάφορες εντολές του προγράμματος, στη συνέχεια πειραματίστηκαν με όλους τους μετασχηματισμούς, χωρίς να καταλήγουν πουθενά. Η ερευνήτρια διαπίστωσε τη δυσκολία τους και παρενέβαινε όπου χρειαζόταν κάνοντας σχόλια και ερωτήσεις όπως: «Τι αποφασίσατε να κάνετε τελικά;», «Θα αλλάξετε εντολή; Όχι μεταφορά;», «Έχετε επιλέξει το σχήμα», «Τι πρέπει να διαλέξουν όταν περιστρέφουν;» κ.λ.π. Και η ομάδα αυτή ανέτρεχε συχνά στο φυλλάδιο οδηγιών.

Το λεξιλόγιο των μαθητών κατά την εμπλοκή τους σε δραστηριότητες στο GSP

Κατά την εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες στο περιβάλλον του προγράμματος GSP διαπιστώθηκε ότι, συνολικά, ο λόγος τους εμπλουτίστηκε με περισσότερους μαθηματικούς όρους. Καθώς προσπαθούσαν να επιλέξουν τον καταλληλότερο τρόπο μετακίνησης των σχημάτων μέσω των εντολών του προγράμματος, ανέφεραν τα ονόματα των μετασχηματισμών και χρησιμοποιούσαν ρήματα όπως «περιστρέφω» και «κάνω ανάκλαση». Επιπρόσθετα, στο λόγο τους υπήρχαν αναφορές για τις παραμέτρους των μετασχηματισμών, καθώς για τη σωστή εκτέλεσή των μετασχηματισμών θα έπρεπε να τις καθορίσουν. Έτσι συζητούσαν για «άξονα ανάκλασης» ή «συμμετρίας» όταν ήθελαν να εφαρμόσουν ανάκλαση και για «μοίρες» όταν ήθελαν να προσδιορίσουν τη διεύθυνση στη μετάθεση και τη γωνία περιστροφής. Επίσης, αναφέρονταν στα εκατοστά ως μέτρο της απόστασης. Το «σημείο περιστροφής» αναφέρθηκε σπανιότερα. Όταν θέλανε να αναφερθούν σε αυτό χρησιμοποιούσαν τη φράση «επιλέγω κουκκίδα» ή «γωνία» εάν αφορούσε γωνία γεωμετρικού σχήματος. Το πρόγραμμα ανάγκαζε τους μαθητές να εστιάσουν στα είδη των μετασχηματισμών και στις παραμέτρους τους, καθώς η μη ορθή επιλογή τους δεν έφερνε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Το απόσπασμα που ακολουθεί προέρχεται από τη υποφάση Α3 όπου οι μαθητές κλήθηκαν να αποτυπώσουν μέσω του GSP τα μοτίβα των ξυστών με χρήση των εντολών των μετασχηματισμών. Οι μαθητές της ομάδας 2 προσπάθησαν να δημιουργήσουν το μοτίβο χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς της περιστροφής και της ανάκλασης. Ο Μ1 περιγράφει τις ενέργειες του χρησιμοποιώντας τυπική μαθηματική ορολογία «270 μοίρες», «σημείο περιστροφής», «άξονας συμμετρίας» και «ανακλώ». Οι εντολές του προγράμματος βοηθούσαν προς αυτή την κατεύθυνση, καθώς περιγράφουν τους μετασχηματισμούς με τυπικό μαθηματικό τρόπο.

- 67:35 [214] BE Το ανάκλασε προς το κάτω;
[215] M1 Ναι αλλά σωστό βγήκε, το έκανα 270 μοίρες, (Περίεστρεψε το αρχικό τρίγωνο 270 μοίρες με γωνία περιστροφής την κάτω γωνία. Δημιουργήθηκε ένα τρίγωνο εκτός μοτίβου και στη συνέχεια με ανάκλαση ως προς τη βάση του δημιούργησε το [216] κάτω τρίγωνο του τετραγώνου) επιλέγοντας αυτό εδώ, πώς το [217] λένε, για σημείο περιστροφής και μετά εεε... ανάκλασα το [218] τρίγωνο με άξονα συμμετρίας τη γραμμή.

Δυσκολίες και στρατηγικές κατά τη διερεύνηση των μετασχηματισμών στο ψηφιακό περιβάλλον του GSP

Παρά την αλλαγή στο περιεχόμενο του λόγου, οι μαθητές φάνηκε να αντιμετωπίζουν αρκετές δυσκολίες στην εφαρμογή των μετασχηματισμών. Αυτό ήταν κάτι που εντοπίστηκε σε όλες τις ομάδες. Συχνά, δεν μπορούσαν να αποφασίσουν ποιον μετασχηματισμό να χρησιμοποιήσουν. Μια συνήθης τακτική ήταν αυτή της δοκιμής

και λάθους. Άνοιγαν την καρτέλα των μετασχηματισμών και τους δοκίμαζαν όλους μέχρι να φέρουν το επιθυμητό αποτέλεσμα. Την ίδια τακτική εφάρμοζαν οι μαθητές και για την επιλογή των παραμέτρων, οι οποίες περιέπλεκαν ακόμη περισσότερο τις αποφάσεις τους. Για παράδειγμα στη δραστηριότητα με τα ξυστά στην υποφάση Α3, η ομάδα 2 δοκίμασε αρχικά τη μετάθεση. Στη συνέχεια εφάρμοσε περιστροφή, αλλά λόγω μη επιλογής σημείου περιστροφής, άλλαξε και πάλι μετασχηματισμό και εφάρμοσε ανάκλαση. Η ομάδα 1 πειραματίστηκε με την περιστροφή και την ανάκλαση χρησιμοποιώντας στο τέλος και τους δυο. Η ομάδα 3 δοκίμασε και τους τρεις μετασχηματισμούς αρχικά ανεπιτυχώς καθώς οι μαθητές δεν επέλεξαν σωστά τις παραμέτρους. Στο τέλος, μετά από πολλές δοκιμές κατάφεραν να χρησιμοποιήσουν σωστά και τους τρεις μετασχηματισμούς για να δημιουργήσουν το μοτίβο τους.

Εμφανίστηκαν πολλά αποσπάσματα πάνω στην στρατηγική των μαθητών, δοκιμή και λάθος, σε όλες τις φάσεις που χρησιμοποίησαν το πρόγραμμα. Για παράδειγμα, το παρακάτω απόσπασμα προέρχεται από την υποφάση Α3. Έχει προηγηθεί ένα μικρό διάστημα όπου οι μαθητές της ομάδας 3 πειραματίστηκαν με τις εντολές του προγράμματος. Μετά από παραίνεση της ερευνήτριας ξεκίνησαν να συζητούν για τους μετασχηματισμούς που θα χρησιμοποιήσουν για να σχεδιάσουν το μοτίβο τους. Δοκίμασαν και τους τρεις μετασχηματισμούς. Όταν το σχήμα δεν μετακινούνταν με τον επιθυμητό τρόπο, άλλαζαν μετασχηματισμό χωρίς να ελέγξουν τις παραμέτρους τους.

- 32:26 [212] M6 Θα το κάνουμε ανάκλαση να πάει εδώ πέρα. (Εννοεί από το αρχικά σχεδιασμένο τρίγωνο στο κάτω τρίγωνο που βρίσκεται στο τετράγωνο)
- [213] M4 Εντάξει.... ή περιστροφή (Ανοίγουν πάλι την καρτέλα με τους μετασχηματισμούς και διαβάζουν τους μετασχηματισμούς του προγράμματος)
- [214] M6 Περιστροφή! Να, να αυτό είναι...(Πατάνε την περιστροφή και βγαίνει η καρτέλα για επιλογή γωνίας)
- [215] M4 Όχι
- [216] M6 Ναι, το ρολόι (αναφέρεται στο χάρτινο ρολόι)
- [217] M4 Πάμε στη μετάθεση
- [218] M6 Αυτό είναι
- [219] M4 Όχι δεν είναι. Είναι μετάθεση πάμε στοίχημα; (Στη συνέχεια ο M4 επιλέγει τη μετάθεση. Βάζει στην απόσταση 1,25 cm αλλά στη γωνία προβληματίζεται. Η M6 βάζει στη γωνία 360 μοίρες. Το σχήμα δεν μετακινείται)
- [220] M6 360 μοίρες (Βάζει 360 μοίρες και το σχήμα μετακινείται 1,25 εκατοστά δεξιά. Κάνουν αναίρεση)
- [221] M4 Δεν είναι με τίποτα αυτό... Πάμε περιστροφή (Κάνουν αναίρεση και ανοίγουν την καρτέλα με τους μετασχηματισμούς)

Επίσης, οι μαθητές αντιμετώπιζαν δυσκολίες με τις παραμέτρους των μετασχηματισμών. Ένα συνηθισμένο λάθος ήταν να μπερδεύουν το σημείο περιστροφής με τον άξονα ανάκλασης. Σε όλες τις ομάδες παρατηρήθηκε να επιλέγουν συχνά σημείο για την ανάκλαση και άξονα για την περιστροφή, κάτι που δείχνει ότι μάλλον δεν κατανοούσαν απόλυτα τον τρόπο που λειτουργούσαν οι μετασχηματισμοί. Για παράδειγμα στο απόσπασμα που ακολουθεί, ο M1 της ομάδας 2 προσπαθεί να εφαρμόσει την ανάκλαση στην υποφάση Α3. Ο μαθητής είχε προσπαθήσει να δημιουργήσει το σχήμα με περιστροφή, αλλά λόγω μη σωστής επιλογής του σημείου περιστροφής το σχήμα δεν μετασχηματίστηκε σωστά. Στη συνέχεια αποφάσισε να αλλάξει μετασχηματισμό και να εφαρμόσει ανάκλαση, αλλά συνειδητοποίησε ότι δεν είχε επιλέξει την παράμετρο της ανάκλασης. Η συζήτηση με την ερευνήτρια αποκάλυψε μια σύγχυση αναφορικά με τις παραμέτρους καθώς ανέφερε και έδειχνε πότε άξονα και πότε σημείο. Η επιλογή της παραμέτρου δεν φάνηκε να είναι αποτέλεσμα κατανόησης του τρόπου που λειτουργεί ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός, αλλά αποτέλεσμα ανάκλησης στη μνήμη ότι σχετικού έχει συζητηθεί για αυτόν.

- 56:00 [222] M1 Αα δεν επιλέξαμε...
- [223] E Για να κάνεις ανάκλαση τι πρέπει να επιλέξεις;
- [224] M1 Γωνία και άξονα συμμετρίας (επιλέγει σημείο περιστροφής την αριστερή γωνία του αρχικού τριγώνου και πατάει ανάκλαση το τρίγωνο μετασχηματίζεται διαφορετικά)
- [225] E Θα το κάνεις ανάκλαση, ως προς εδώ (του δείχνει το σημείο που έχει επιλέξει. Ο M1 φαίνεται να προβληματίζεται)
- [226] E Στην ανάκλαση τι επιλέγεις για ψάξε να βρεις.
- [227] M1 Από πού θα το κρατήσω... όχι
- [228] E Σημείο επιλέγεις ή άξονα;
- [229] M1 Άξονα, ναι.
- [230] E Πώς επιλέγεις άξονα; Άξονας τι σημαίνει; Σημαίνει κουκκίδα
- [231] ή σημαίνει κάτι άλλο;
- [232] M1 Γωνία (Μπερδεύεται στην αρχή μετά δείχνει την πλευρά)
- [233] E Όλη η πλευρά, όλος ο άξονας (ο M1 επιλέγει με διπλό κλικ τον άξονα)
- [234] E Ωραία πάτα το, αυτός είναι άξονας έτσι κάνεις ανάκλαση. Ααα ωραία. Τι έκανες;
- [235] M1 Εεε ανακλώ...

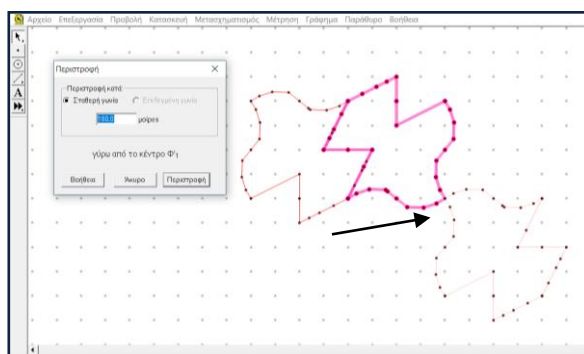
Οι δυσκολίες που αντιμετώπιζαν οι μαθητές συνδέονταν και με το μικρό βαθμό εξοικείωσης με το πρόγραμμα. Συχνά ξεχνούσαν να επιλέξουν το αντικείμενο με αποτέλεσμα οι μετασχηματισμοί να μην εφαρμόζονται. Οι μαθητές απέδιδαν την ανεπιτυχή εφαρμογή είτε σε λανθασμένη επιλογή μετασχηματισμού είτε σε λανθασμένη επιλογή των παραμέτρων.

Ένα ακόμη σημείο που φάνηκε να δυσκολεύει όλους τους μαθητές ήταν η γωνία περιστροφής. Δεν μπορούσαν να προβλέψουν πάντα τον τρόπο που θα περιστραφεί το σχήμα. Οι γωνίες που δοκίμαζαν πρώτα ήταν πολλαπλάσιες των 90 μοιρών και μόνο αν δεν έφερναν το επιθυμητό αποτέλεσμα δοκίμαζαν διαφορετικές γωνίες. Εκτός αυτού, η αριστερόστροφη μέτρηση των γωνιών στο πρόγραμμα ενέτεινε τη δυσκολία των μαθητών. Τέλος, ένα άλλο πρόβλημα που παρατηρήθηκε ήταν ότι συχνά οι μαθητές συνέχισαν την έννοια της διεύθυνσης στη μετάθεση με τη γωνία περιστροφής. Ο τρόπος που οι μαθητές διαχειρίστηκαν αυτή τη δυσκολία περιγράφεται στη συνέχεια, με τη χρήση του χάρτινου ρολογιού.

Δυναμικοί και μη δυναμικοί οπτικοί διαμεσολαβητές

Κατά τη διερεύνηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών στο περιβάλλον GSP οι μαθητές διαχειρίστηκαν διάφορα εργαλεία που διαμεσολαβούσαν στην επικοινωνία των μαθηματικών νοημάτων. Τα εργαλεία αυτά είτε τα παρείχε το ίδιο το πρόγραμμα, είτε ήταν κατασκευασμένα από την ερευνήτρια με σκοπό τη διευκόλυνση αλληλεπίδρασης με το πρόγραμμα, είτε τα παρήγαγαν οι ίδιοι οι μαθητές. Στην πρώτη κατηγορία ανήκει η λειτουργία της προεπισκόπησης. Στη δεύτερη κατηγορία ένα χάρτινο ρολόι και ένα διάγραμμα στο φυλλάδιο οδηγιών για τη διερεύνηση της διεύθυνσης στη μετάθεση. Στην τρίτη κατηγορία εντάσσονται οι χειρονομίες των μαθητών και η σχεδίαση στο χαρτί με σκοπό οι μαθητές να διερευνήσουν και να δοκιμάσουν τις ιδέες τους.

Η λειτουργία της προεπισκόπησης: Μια σημαντική λειτουργία που διαθέτει το GSP είναι αυτή της προεπισκόπησης. Καθώς ο χρήστης συμπληρώνει τη γωνία περιστροφής ή τις πολικές συντεταγμένες στη μετάθεση, ένα αχνό γραφικό δείχνει τον τρόπο που θα μετακινηθεί το σχήμα. Με τον τρόπο αυτό ο χρήστης ελέγχει την κίνηση των σχημάτων στην οθόνη με το μέτρο των μεγεθών για κάθε παράμετρο. Η προεπισκόπηση λειτούργησε ως ένας δυναμικός οπτικός διαμεσολαβητής κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, τον οποίο όλοι οι μαθητές χρησιμοποιούσαν για να ελέγξουν την ορθότητα των αποφάσεών τους σχετικά με τους μετασχηματισμούς και τις παραμέτρους τους. Παρατηρούσαν την προεπισκόπηση και επιχειρηματολογούσαν για τις επιλογές τους βάσει του τρόπου μετακίνησης του σχήματος. Για παράδειγμα, στην περιστροφή έλεγχαν τη στροφή του αντικειμένου και το συνέδεαν με τα μέτρο της γωνίας, αλλάζοντας το ώσπου να πετύχουν τον επιθυμητό μετασχηματισμό.



Εικόνα 4.11: Η λειτουργία της προεπισκόπησης

Το απόσπασμα που ακολουθεί προέρχεται από την υποφάση B2 όπου οι ομάδες διερεύνησαν τις πλακοστρώσεις στο περιβάλλον του GSP. Οι μαθητές της ομάδας 1 προσπάθησαν να δημιουργήσουν πλακόστρωση με ένα μη γνωστό σχήμα. Αφού δοκίμασαν τους μετασχηματισμούς της μετάθεσης και της ανάκλασης αποφάσισαν ότι για να καλυφθεί το επίπεδο θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν περιστροφή. Για την επιλογή του μέτρου της γωνίας περιστροφής αλληλεπιδρούσαν με το πρόγραμμα, ελέγχοντας στην προεπισκόπηση την περιστροφή του αντικειμένου. Οι δύο μαθητές πειραματίστηκαν με διάφορες γωνίες περιστροφής παρατηρώντας στην οθόνη πώς περιστρέφεται το σχήμα μέχρι το επιθυμητό αποτέλεσμα.

- 43:30 [236] M3 Μετασχηματισμός, περιστροφή... 180... Που είναι τώρα;
(Συμπληρώνει 180 μοίρες στη γωνία και ψάχνει στην προεπισκόπηση το σχήμα για να δει προς τα που θα περιστραφεί)
- [237] M4 Ααα περιστροφή; Διάλεξες γωνία (Εννοεί σημείο περιστροφής)
- [238] M3 Ααα όχι
- [239] M4 Εεε τότε τι πας να κάνεις;
- [240] M3 Αυτή (Επιλέγει σημείο περιστροφής την κάτω δεξιά κορυφή του αρχικού τετραγώνου)
- [241] M4 Διπλό κλικ
- [242] M3 Όχι είναι 90
- [243] M4 180 είναι. Είναι 180. Βάλτο
- [244] M3 Μα δε βγαίνει με το 180 σου (Η M3 συμπληρώνει 180)
- [245] M4 Ααα ναι ξέρω γιατί... Εεε τότε βάλε...Δοκίμασε λίγο...
- [246] M3 140
- [247] M4 Όχι 140
- [248] M3 Ααα 190...
- [249] M4 100
- [250] M3 Όχι
- [251] M4 90
- [252] M3 Όχι δεν κάνει τίποτα
- [253] M4 Κάτσε να βάλουμε 80 να δούμε προς τα πού πάει; ...80 πέφτει
- [254] M3 Όχι
- [255] M4 Πέφτει
- [256] M3 Το 90, το 90 πέφτει
- [257] M4 Εεε ναι, σου λέω πέφτει το 90. (Συμπληρώνει 90) Γιατί άμα
- [258] βάλεις 90. Το βλέπεις, δεν βλέπεις; Έπεσε. Περιστροφή. Να το,
- [259] το βρήκα!

Η υλοποίηση του σημείου περιστροφής και του άξονα ανάκλασης στο πρόγραμμα γίνεται με διπλό κλικ ενώ κινούμενα γραφικά τα αναδεικνύουν. Και αυτές

οι λειτουργίες αποτέλεσαν οπτικούς διαμεσολαβητές, καθώς φαίνεται ότι διευκόλυναν την επικοινωνία των μαθηματικών νοημάτων, αναφορικά με αυτές τις δύο παραμέτρους.

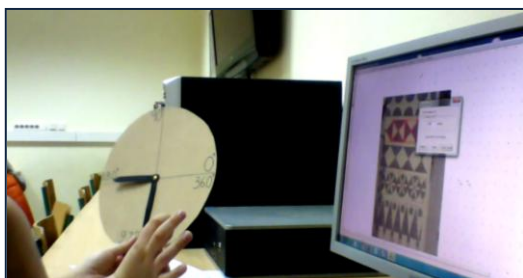
Το χάρτινο ρολόι: Όπως επισημάνθηκε, οι μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολίες στον προσδιορισμό της γωνίας περιστροφής και της διεύθυνσης στη μετάθεση. Για να διευκολυνθούν με την έννοια της διεύθυνσης δημιουργήσαμε ένα χάρτινο ρολόι που έδειχνε τον τρόπο που συνδέονταν οι διευθύνσεις στη μετάθεση με τις γωνίες. Δηλαδή οι 0 και 360 μοίρες μετέθεταν δεξιά, οι 90 επάνω, οι 180 αριστερά κ.λ.π. Κατά την παρουσίαση του μετασχηματισμού της μετάθεσης χρησιμοποιήσαμε αυτό το ρολόι ως βοηθητικό εργαλείο παρουσίασης της παραμέτρου της διεύθυνσης. Ωστόσο εμφανίστηκαν δύο αποσπάσματα στα οποία οι μαθητές χρησιμοποίησαν το ρολόι για τον προσδιορισμό της γωνίας περιστροφής. Για παράδειγμα οι μαθητές της ομάδας 1 και της ομάδας 3 ζήτησαν και χρησιμοποίησαν το ρολόι κατά τη δραστηριότητα δημιουργίας του μοτίβου των ξυστών στο περιβάλλον GSP (υποφάση A3) με σκοπό να υπολογίσουν τη γωνία περιστροφής.

Συγκεκριμένα στο παρακάτω απόσπασμα οι M4 και M6 της ομάδας 3 ήθελαν να υπολογίσουν τη γωνία περιστροφής του αριστερού τριγώνου, ώστε να δημιουργηθεί το δεξί τρίγωνο, όπως φαίνεται στην εικόνα 4.13. Ο M4 γυρνούσε το χάρτινο ρολόι προσπαθώντας να προσανατολιστεί. Φαίνεται να καταλάβαινε ότι υπήρχε μια σύνδεση μεταξύ των δύο, την οποία όμως έμοιαζε να μην κατανοεί. Έβλεπε στο χάρτινο ρολόι ότι δεξιά αναγράφονταν 0 και 360 μοίρες. Θυμόταν ότι οι 0 μοίρες μεταθέτουν προς τα δεξιά και τις πρότεινε ως πιθανή γωνία περιστροφής. Η M6 αντιλήφθηκε ότι περιστροφή 0 μοιρών δεν θα μετακινήσουν το τρίγωνο και αντέτεινε τις 360 μοίρες. Η σκέψη τους μετακινούνταν μεταξύ της γωνίας περιστροφής και της διεύθυνσης μετάθεσης. Παρόλα αυτά ο M4 επέλεξε σωστά τις 180 μοίρες αντιλαμβανόμενος ότι τα τρίγωνα είναι αντιδιαμετρικά, όπως οι 0 και 180 μοίρες (Εικ. 4.12 & 4.13). Ωστόσο, όταν η ερευνήτρια του ζήτησε να δικαιολογήσει την επιλογή του δεν έδωσε μια σαφή απάντηση.

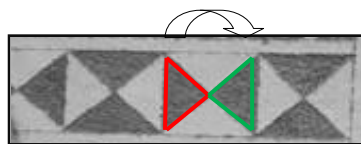
- | | | | |
|-------|-------|----|--|
| 45:30 | [260] | M6 | Στροφή να πάει εεε δεξιά...(Ο M4 γυρνάει το ρολόι γύρω γύρω και προσπαθεί να προσανατολιστεί ενώ η |
| | [261] | | M6 δείχνει με το δάχτυλό της προς τα δεξιά) Αν το |
| | [262] | | στρίψω δεξιά από εκεί θα πάει εδώ (Δείχνει τη στροφή |
| | [263] | | με το χέρι της) |
| | [264] | M4 | Περιστροφή. (Κρατάει το ρολόι και το γυρίζει) |
| | [265] | M6 | 360 για δεξιά. |
| | [266] | M4 | Τι λες; Μηδέν. |
| | [267] | M6 | Όχι μηδέν δεν θα πάει πουθενά (Το σχήμα δεν μετακινείται. Ξαναπροσπαθούν με τα ίδια νούμερα) |
| | [268] | M4 | Εάν ξεκινούσαμε από εδώ έτσι, 180. (Κρατάει το ρολόι παράλληλα με την οθόνη και δείχνει τις 180 μοίρες που είναι σημειωμένες αριστερά) |

.....

- | | | |
|-------|----|--|
| [269] | E | Γιατί έβαλες 180 μοίρες; |
| [270] | M4 | Γιατί αν ξεκινάς από τις 0 μοίρες οι 90 μοίρες |
| [271] | | θα το στρέψουν προς μία κατεύθυνση (Έχει στα χέρια του το ρολόι και κουνάει τους δείκτες από το 0 έως τις 90 μοίρες) |



Εικόνα 4.12: Υπολογισμός της γωνίας περιστροφής με το «χάρτινο ρολόι»

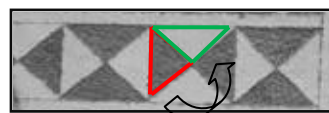


Εικόνα 1.13: Περιστροφή του κόκκινου τριγώνου επάνω στο πράσινο

Στην ομάδα 1 η M3 χρησιμοποίησε το ρολόι με διαφορετικό τρόπο. Θέλοντας να περιστρέψει το αριστερό τρίγωνο για να δημιουργήσει το επάνω τρίγωνο προσανατόλισε το ρολόι ανάποδα έτσι ώστε οι 0 μοίρες να δείχνουν το αριστερό τρίγωνο. Γυρνώντας το ρολόι αριστερόστροφα (μάλλον θυμόταν ότι το πρόγραμμα περιστρέφει αριστερόστροφα) είπε: «από μηδέν 90 γυρνάει κάτω, 180 γυρνάει στα πλάγια, άρα 270) (Εικ. 4.14 & 4.15). Παρόλο που το εργαλείο εισήχθηκε για να βοηθήσει στον προσδιορισμό της διεύθυνσης η M3 το χρησιμοποίησε σωστά για τον προσδιορισμό της γωνίας περιστροφής.



Εικόνα 4.14: Υπολογισμός της γωνίας με το «χάρτινο ρολόι»



Εικόνα 4.15: Περιστροφή του κόκκινου τριγώνου επάνω στο πράσινο

Το χάρτινο ρολόι λειτούργησε ως οπτικός διαμεσολαβητής που βοηθούσε τους μαθητές να διαχειριστούν τόσο δύσκολες για την ηλικία τους μαθηματικές έννοιες, όπως αυτές της γωνίας περιστροφής και της διεύθυνσης. Η μικρή εξοικείωση με το πρόγραμμα, ιδιαίτερα στην αρχή, φαίνεται να τους δημιούργησε την ανάγκη να χρησιμοποιήσουν ένα εργαλείο από που θα τους βοηθούσε να επικοινωνήσουν τις ιδέες τους. Το συγκεκριμένο εργαλείο οι μαθητές το χρησιμοποίησαν κυρίως στην υποφάση Α3. Μόνο μία ομάδα το χρησιμοποίησε στην τελευταία συνάντηση όταν οι μαθητές θέλησαν να ελέγξουν τη διεύθυνση της μετάθεση ενός σχήματος μεταξύ 180 και 270 μοιρών.

Το φυλλάδιο οδηγιών: Για να διευκολύνουμε τους μαθητές στο χειρισμό του προγράμματος GSP, μοιράσαμε ένα φυλλάδιο με μια συνοπτική περιγραφή των εντολών των μετασχηματισμών. Οι μαθητές χρησιμοποίησαν το φυλλάδιο για να θυμηθούν τα βήματα εφαρμογής κάποιου μετασχηματισμού και για να αποφασίσουν εάν έπρεπε να επιλέξουν σημείο ή άξονα κατά τους μετασχηματισμούς της μετάθεσης και της περιστροφής. Ωστόσο, ο κυριότερος λόγος που ανέτρεχαν στο φυλλάδιο ήταν για να συμβουλευτούν ένα διάγραμμα παρόμοιο με το χάρτινο ρολόι, που έδειχνε τη σχέση διευθύνσεων και γωνιών. Οι μαθητές της ομάδας 1 συμβουλευτήκαν περισσότερο από όλους το διάγραμμα για να επιλύσουν θέματα σχετικά με τη διεύθυνση μετάθεσης.

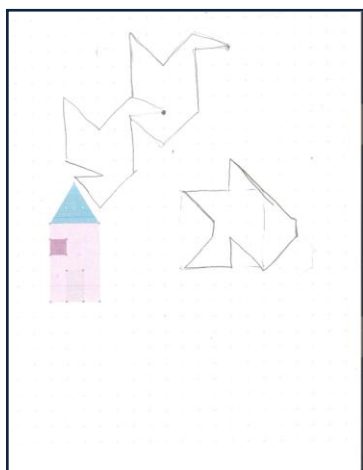
Οι χειρονομίες των μαθητών: Κατά τη διάρκεια της εμπλοκής τους στο ψηφιακό περιβάλλον του GSP παρατηρήθηκε, σε όλες τις ομάδες, ότι οι μαθητές έδειχναν στην οθόνη με το χέρι ή με τον κέρσορα τα μαθηματικά αντικείμενα για τα οποία μιλούσαν. Επίσης, χρησιμοποιούσαν τα χέρια τους για να επιχειρηματολογήσουν και να κάνουν προβλέψεις σχετικά με τη διεύθυνση κάποιου μετασχηματισμού. Ωστόσο, οι χειρονομίες των μαθητών δεν ήταν τόσο έντονες όσο όταν διερευνούσαν με το χειραπτικό υλικό. Μοιάζει η ανάγκη χρήσης του σώματος τους για να διαχειριστούν δύσκολες για την ηλικία τους έννοιες, όπως είναι οι μετασχηματισμοί, να περιορίστηκε λόγω της δυναμικής οπτικής διαμεσολάβησης που προσέφερε το δυναμικό περιβάλλον.

Η σχεδίαση στο χαρτί: Παρά το γεγονός ότι οι μαθητές εργάζονταν στο ψηφιακό περιβάλλον, υπήρχαν περιπτώσεις που χρησιμοποίησαν χαρτί για να διερευνήσουν τις ιδέες τους. Για παράδειγμα, κατά τη διάρκεια διερεύνησης της τεχνικής του Escher (υποφάση B2), φάνηκε οι μαθητές να χρειάζονται το χαρτί για να διερευνήσουν τον τρόπο με το οποίο μη γνωστά σχήματα πλακοστρώνουν. Πιο συγκεκριμένα στην ομάδα 2 οι μαθητές για αρκετή ώρα προσπαθούσαν να πλακοστρώσουν μέσω του GSP δοκιμάζοντας ανεπιτυχώς όλους τους μετασχηματισμούς. Η ερευνήτρια ρώτησε τους μαθητές πώς θα πλακόστρωναν εάν είχαν στη διάθεσή τους τέτοιας μορφής πλακίδια. Καθώς οι μαθητές δυσκολεύονταν να απαντήσουν με αναφορά το περιβάλλον του υπολογιστή, έφερε διάστικτο χαρτί και ζήτησε από τους μαθητές να δείξουν πάνω σε αυτό πώς θα πλακόστρωναν. Το χαρτί φάνηκε ότι βοήθησε το μαθητή M8 να αντιληφθεί την ερώτηση. Σχεδίασε το πλακάκι και απάντησε σωστά αναφορικά με τον τρόπο που θα πλακόστρωνε (Εικ. 4.16).

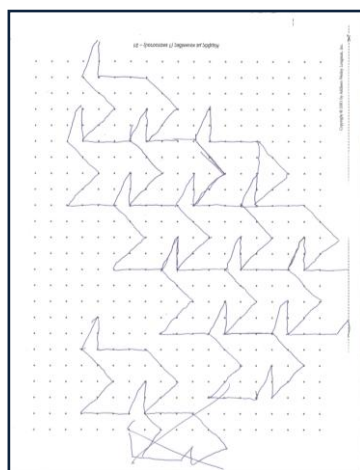
- 40:00 [272] E (Η ερευνήτρια σχεδίασε το πλακάκι) Ωραία, μετά το άλλο πού
[273] θα το έβαζες για να καλύψεις... να το γεμίσεις όλο το χαρτί;
[274] M8 Αα βρήκα, βρήκα! (Ο M8 σχεδιάζει στο διάστικτο
χαρτί ένα πλακίδιο δίπλα στο αρχικό)
[275] E Εδώ τι έκανες M8 εσύ; Ουσιαστικά τι το έκανες αυτό;
[276] M8 Το μετακίνησα εδώ κάτω
[277] E Πώς το μετακίνησες;
[278] M8 Φτιάχνοντάς το

- [279] E Ναι πώς θα το μετακινούσες εάν το είχες... εάν το είχες αυτό;
Τι το έκανες, το έστριψες;
- [280] M8 Αα, όχι. Άφησα τις πλευρές έτσι όπως είναι, απλά το κατέβασα
- [281] αριστερά προς τα κάτω
- [282] E Το κατέβασες αριστερά κάτω. Το κατέβασες πρώτα κάτω και
- [283] μετά το κατέβασες αριστερά. Το έκανες δηλαδή μετάθεση.
- [284] Μετάθεση. Κάτω και αριστερά...

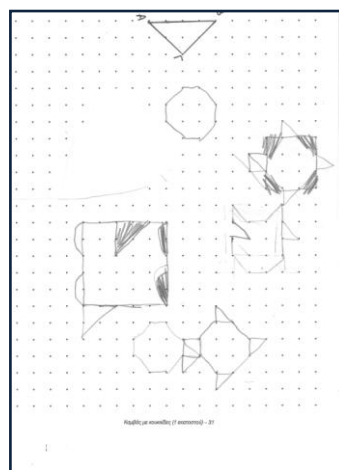
Επίσης στην υποφάση B2, στην ομάδα 3 ο M4 ζήτησε διάστικτο χαρτί για να διερευνήσει και αυτός τον τρόπο που θα πλακόστρωνε με ένα πλακάκι που δεν είχε γνωστό σχήμα: «Έχουμε τέτοια κομμένα σε χαρτάκι να το δείξω λίγο πώς σκέφτομαι; Τέτοιο με βούλες.» (Εικ. 4.17)



Εικόνα 4.16: Δοκιμές κατά τη διερεύνηση των πλακοστρώσεων με την τεχνική του Escher



Εικόνα 4.17: Δοκιμές κατά τη διερεύνηση των πλακοστρώσεων με την τεχνική του Escher



Εικόνα 4.18: Διερεύνηση των ιδεών για τη δημιουργία σχεδίων

Και κατά τη διάρκεια δημιουργίας των δικών τους σχεδίων (υποφάση Γ2) οι μαθητές χρησιμοποίησαν χαρτί. Για παράδειγμα, οι μαθητές της ομάδας 2 θέλοντας να κατασκευάσουν ένα δικό τους πρωτότυπο σχέδιο δοκίμασαν στο χαρτί τις ιδέες τους. Ανέλυσαν το σχέδιο σύμφωνα με την τεχνική του Escher ξεκινώντας από ένα τετράγωνο βάσει του οποίου σχεδίασαν τα επιμέρους στοιχεία του. Στη συνέχεια διερεύνησαν τους μετασχηματισμούς που θα χρησιμοποιούσαν (Εικ. 4.18).

Όλα αυτά τα σχέδια στο διάστικτο χαρτί, αποτελούν οπτικούς διαμεσολαβητές που παράγονται από τους ίδιους τους μαθητές και τους βοηθούν να διερευνήσουν τις ιδέες της πλακόστρωσης και των μετασχηματισμών. Φαίνεται ότι το δυναμικό περιβάλλον του υπολογιστή να μην «εξουδετερώνει» την ανάγκη των μικρών μαθητών για απτά εργαλεία, όπως το χαρτί και το μολύβι, που θα τους βοηθήσουν να συγκεντρωθούν και να επεξεργαστούν τις ιδέες τους.

Ο ρόλος της ερευνήτριας

Ο ρόλος της ερευνήτριας κατά τη διάρκεια διερεύνησης των μαθητών στο ψηφιακό περιβάλλον ήταν περισσότερο ενεργός. Καταρχάς, βοηθούσε τους μαθητές με το τεχνικό κομμάτι, καθώς δεν είχαν προηγούμενη εμπειρία με το συγκεκριμένο πρόγραμμα. Τους υπενθύμιζε τους ορθούς τρόπους εφαρμογής των εντολών και επίλυε τεχνικά προβλήματα. Επιπρόσθετα, επενέβαινε σε θέματα μη σωστής εφαρμογής των μετασχηματισμών και των παραμέτρων τους. Επεσήμαινε τις παραμέτρους και το ρόλο που επιτελούσαν στον κάθε μετασχηματισμό. Συζητούσε με τους μαθητές για τα πιθανά λάθη και τους παρότρυνε να αιτιολογήσουν τις αποφάσεις τους. Τόνιζε τους μαθηματικούς όρους και παρότρυνε τους μαθητές να τους χρησιμοποιούν. Τέλος, επίλυε θέματα συνεργασίας και ενθάρρυνε τους μαθητές να συνεχίσουν τη δουλειά κάθε φορά που έδειχναν σημάδια κούρασης ή απογοήτευσης.

Παράδειγμα του ρόλου της ερευνήτριας αποτελεί το απόσπασμα που ακολουθεί, το οποίο προέρχεται από την υποφάση Α3, όπου οι μαθητές προσπάθησαν να δημιουργήσουν το μοτίβο των ξυστών στο περιβάλλον του GSP. Οι μαθητές της ομάδας 3 αφού έχουν προσπαθήσει να εφαρμόσουν τους μετασχηματισμούς της περιστροφής και της μετάθεσης, χωρίς επιτυχία, δοκίμασαν την ανάκλαση. Δεν επέλεξαν με διπλό κλικ τον άξονα ανάκλασης και το σχήμα δεν ανακλήθηκε σωστά. Καθώς δεν μπορούσαν να σκεφτούν κάτι άλλο ζήτησαν τη βοήθεια της ερευνήτριας. Η ερευνήτρια επισήμανε την προϋπόθεση επιλογής του άξονα ανάκλασης και υπενθύμισε τον τρόπο με τον οποίο επιλέγεται στο πρόγραμμα. (στίχοι [300] και [301]).

- 40:11 [285] E Ωραία, πες τε μου παιδιά
 [286] M3 Έχουμε φάει κόλλημα, τι μετασχηματισμό να κάνουμε.
 [287] M4 Τι θέλετε να κάνετε; Πώς θέλετε να ξεκινήσετε; Ποιο σχήμα
 [288] θέλετε να φτιάξετε πρώτα;
 [289] M4 Θέλουμε να μετακινήσουμε αυτό προς τα... να γίνει έτσι.
 (Δείχνει με το δάχτυλό του στην οθόνη το αριστερό τρίγωνο
 [290] του τετραγώνου) Να γυρίσει έτσι. (Κινεί το δάχτυλο σαν να
 διπλώνει το ένα τρίγωνο πάνω στο άλλο)
 [291] E Δηλαδή αυτό το άσπρο να δημιουργήσετε;
 [292] M6 Ναι
 [293] E Τι ιδέες έχετε;
 [294] M6 Εεε..Ανάκλαση
 [295] E Ανάκλαση
 [296] M6 Ναι αλλά δεν ξέρουμε πώς να το κάνουμε
 [297] E Τι πρέπει πρώτα να αποφασίσετε;... από μόνο του δεν ξέρει
 [298] προς τα πού θα το καθρεφτίσει.
 [299] M6 Ναι, όμως, την πατάμε την ανάκλαση και δεν γίνεται τίποτα
 [300] E Πρέπει πρώτα να αποφασίσετε άξονα ανάκλασης. Με διπλό
 [301] κλικ επιλέγετε τον άξονα ανάκλασης.
 [302] M6 Διπλό κλικ; (επιλέγει με διπλό κλικ τον άξονα). Ωραία. Πάμε

[303] μετασχηματισμός, ανάκλαση (το σχήμα ανακλάται επιτυχώς).

Συνοψίζοντας, από την ανάλυση των δεδομένων διαπιστώθηκε ότι κατά τη διάρκεια εμπλοκής των μαθητών με το εργαλείο GSP και οι τρεις ομάδες εξέλιξαν σταδιακά το λόγο τους σε περισσότερο μαθηματικοποιημένη μορφή. Ο λόγος τους υποβοηθούμενος από το ψηφιακό δυναμικό περιβάλλον του GSP εμπλουτίστηκε με τυπικούς μαθηματικούς όρους. Σε όλη τη διάρκεια της εμπλοκής τους με δραστηριότητες του προγράμματος οι μαθητές μιλούσαν για τους μετασχηματισμούς, αν και δεν φάνηκε να αντιλαμβάνονται πλήρως τη μαθηματική τους διάσταση. Στην προσπάθειά τους να κατασκευάσουν τα σχέδια, συζητούσαν για το είδος των μετασχηματισμών που έπρεπε να επιλέξουν και τις παραμέτρους τους. Σε γενικές γραμμές τα εργαλεία του GSP τους ανάγκαζαν να εστιάζουν την προσοχή τους στους μετασχηματισμούς, καθώς η κατασκευή του σχεδίου απαιτούσε τόσο να επιλέξουν τον κατάλληλο μετασχηματισμό, όσο και να επιλέξουν σωστά τις παραμέτρους τους.

Κατά τη διάρκεια εμπλοκής με τη χρήση του GSP αντιμετώπισαν αρκετές δυσκολίες που σχετίζονταν είτε με τον μικρό βαθμό εξοικείωσης με το πρόγραμμα, είτε με τις μαθηματικές έννοιες των μετασχηματισμών. Πιο συγκεκριμένα μπερδευαν την έννοια του σημείου περιστροφής με του άξονα ανάκλασης και της γωνίας περιστροφής με τη διεύθυνση μετάθεσης. Η κυρίαρχη στρατηγική που αναπτύχθηκε ήταν αυτή της δοκιμής και λάθους.

Διαχειρίστηκαν οπτικούς διαμεσολαβητές που διευκόλυναν στην επικοινωνία μαθηματικών νοημάτων. Κάποια από τα εργαλεία αυτά προέρχονταν από το ίδιο το πρόγραμμα, όπως η λειτουργία της προεπισκόπησης. Κάποια ήταν κατασκευασμένα από την ερευνήτρια με σκοπό τη διευκόλυνση των μαθητών, όπως το χάρτινο ρολόι και το διάγραμμα των διευθύνσεων. Και κάποια τα παρήγαγαν οι ίδιοι οι μαθητές, όπως οι χειρονομίες τους και η χρήση χαρτιού για τη διερεύνηση των ιδεών τους.

Τέλος, ο ρόλος της ερευνήτριας ήταν σημαντικός καθώς επίλυε προβλήματα που συνδέονταν με το μικρό βαθμό εξοικείωσης των μαθητών με το πρόγραμμα, τόνιζε τους μαθηματικούς όρους, παρενέβαινε και καθοδηγούσε τους μαθητές όταν αντιμετώπιζαν δυσκολίες που δεν τους επέτρεπαν να συνεχίσουν, συζητούσε με τους μαθητές για τους σωστούς τρόπους εφαρμογής των μετασχηματισμών και των παραμέτρων τους.

4.2 Ο ρόλος των εργαλείων και της τέχνης στην κατασκευή μαθηματικών νοημάτων

Με βάση τη συζήτηση που αναπτύχθηκε στην ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, σε αυτό το επίπεδο ανάλυσης χρησιμοποιούμε τη σημειωτική διαμεσολάβηση προκειμένου να εστιάσουμε στα εργαλεία (artifacts) και να διερευνήσουμε το ρόλο που έπαιξαν στο να διαμεσολαβήσουν τις μεταβάσεις των μαθητών στην κατασκευή μαθηματικών νοημάτων. Επίσης, η βιβλιογραφία αναδεικνύει τη στενή σχέση της συμμετρίας με την τέχνη. Υπό αυτή την θεώρηση οι δραστηριότητες της παρέμβασης

πλαισιώθηκαν με δημιουργήματα τέχνης, με σκοπό να αναζητήσουμε το ρόλο της τέχνης στη νοηματοδότηση των μαθηματικών ιδεών. Από την ανάλυση των δεδομένων διαπιστώθηκε ότι λόγος των μαθητών και στις τρεις ομάδες ανέδειξε μια εξέλιξη των σημείων που συνδέονταν με τα εργαλεία και τα αντικείμενα στο περιβάλλον του προγράμματος άλλοτε σε ενδιάμεσα σημεία (pivot signs) και άλλοτε σε μαθηματικά (mathematical signs). Επίσης, η ενσωμάτωση της τέχνης στις μαθηματικές δραστηριότητες φάνηκε να έχει θετική επίδραση στον τρόπο που οι μαθητές νοηματοδότησαν τις μαθηματικές έννοιες. Οι δύο από τις τρεις ομάδες κατάφεραν να χρησιμοποιήσουν αποτελεσματικά τις έννοιες των μετασχηματισμών για να δημιουργήσουν τα δικά τους έργα.

4.2.1 Ο ρόλος των εργαλείων στην εξέλιξη των σημείων

Στο υπο-υποκεφάλαιο αυτό αναλύεται η διαμεσολαβητική λειτουργία των χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων που χρησιμοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια της παρέμβασης στην παραγωγή μαθηματικών νοημάτων. Παράλληλα, αναλύεται και ο ρόλος του ερευνητή, ως εκπαιδευτικού, καθώς και ο τρόπος που επηρεάζει αυτή τη διαδικασία.

Η διαμεσολαβητική λειτουργία του διαφανούς αντίγραφου του σπιτιού

Το αντίγραφο του σπιτιού από διαφανές χαρτί χρησιμοποιήθηκε κατά την εμπλοκή των μαθητών με τη δραστηριότητα «Το σπίτι και η σκιά του». Όπως έχει επισημανθεί, πρόκειται για ένα εργαλείο το οποίο δόθηκε στους μαθητές από την ερευνήτρια όταν διαπίστωσε την ανάγκη τους να χρησιμοποιήσουν ένα βοηθητικό μέσο για να οπτικοποιήσουν τις μετακινήσεις του σπιτιού. Το εργαλείο αυτό παρά το γεγονός ότι ήταν χειραπτικό προσέδιδε μια δυναμικότητα στο χαρτί. Σε συνδυασμό με αυτό, δόθηκαν βελόνες για να διευκολύνουν τους μαθητές να κρατάνε σταθερά τα σημεία περιστροφής. Οι δύο από τις τρεις ομάδες χρησιμοποίησαν το συγκεκριμένο εργαλείο και φάνηκε να διευκολύνονται από αυτό. Η τρίτη ομάδα δεν το χρησιμοποίησε καθόλου.

Πριν τη χρήση του διαφανούς αντιγράφου οι μαθητές προσπαθούσαν να κατανοήσουν τις μετακινήσεις του σπιτιού νοερά γυρνώντας το κεφάλι τους, το χαρτί ή σχεδίαζαν με το μολύβι. Η εισαγωγή του συγκεκριμένου εργαλείου έδωσε τη δυνατότητα στους μαθητές να οπτικοποιήσουν τις κινήσεις του σπιτιού. Το απόσπασμα που ακολουθεί προέρχεται από την ομάδα 1, κατά τη 2^η συνάντηση. Οι μαθητές M3 και M4 έχουν πάρει το φύλλο εργασίας της δραστηριότητας το «Το σπίτι και η σκιά του» και συζητούν τις ιδέες τους. Προσπαθώντας να προσανατολιστούν γυρνούν το χαρτί γύρω γύρω φέρνοντάς το τότε οριζόντια και τότε κατακόρυφα. Η ερευνήτρια διαπίστωσε μια δυσκολία στην επικοινωνία τους, ενώ το λεξιλόγιο που χρησιμοποιούσαν ήταν αρκετά αόριστο και γενικό. Π.χ. εκφράζονταν με φράσεις όπως, «σε αυτή την πλευρά να βάλουμε αυτή την πλευρά» ή «να γυρίσουμε τη μύτη της σκεπής προς τα αριστερά, όπως της σκιάς». Τους έδειξε το διαφανές αντίγραφο

και τους ρώτησε εάν το χρειάζονται. Ο Μ4 το ζήτησε. Όταν πήρε το διαφανές αντίγραφο στα χέρια του άρχισε να το μετακινεί και να το περιστρέφει επάνω στο χαρτί. Οι κινήσεις των μαθητών έγιναν πιο συγκεκριμένες, ενώ το λεξιλόγιο τους εμπλουτίστηκε με φράσεις που περιέγραφαν με περισσότερη ακρίβεια τις μετακινήσεις. Για παράδειγμα, κατά την περιστροφή κρατούσαν σταθερή τη μια γωνία του σπιτιού, αρχικά με το δάχτυλο και στη συνέχεια με τη βελόνα, υλοποιώντας το σημείο περιστροφής, κάτι το οποίο επεσήμαναν και λεκτικά (στίχος [310]). Επιπρόσθετα το αντίγραφο φάνηκε να τους δίνει τη δυνατότητα να διερευνήσουν με πολλούς τρόπους τη μετακίνηση του σπιτιού, ώστε να πέσει στη σκιά του.

- 27:26 [304] E Μήπως το χρειάζεσαι; (Δείχνω ένα αντίγραφο από διαφανές χαρτί του σπιτιού στο φύλλο εργασίας)
- [305] M4 Ναι εγώ θέλω ένα
- [306] E Γιατί το χρειάζεσαι σε προβληματίζει κάτι;
- [307] M4 Ναι, θέλω να το δοκιμάσω λίγο να δω πώς θα μετακινηθεί.
- [308] Κοίτα, βάζω το σπιτάκι...(βάζει το διαφανές σπιτάκι πάνω στο σπιτάκι του χαρτιού)
- [309] M3 Το γυρνάμε...
- [310] M4 Θα το μετακινήσω κρατώντας αυτή τη γωνία, θα το...(γυρνάει τη διαφάνεια και η σκεπή βγαίνει έξω από το χαρτί)
- [311] μετακινήσω...
- [312] E Έχω και βελόνα εάν χρειαστείς. Χρειάζεσαι;
- [313] M4 Ναι. (Ο Μ4 παίρνει τη βελόνα κρατάει σταθερή την κάτω γωνία και περιστρέφει το διαφανές σπιτάκι. Μετά, διερευνά κρατώντας το σπίτι από διάφορα σημεία με τη βελόνα και το περιστρέφει. Προσπαθεί να μεταφέρει το σπίτι στην σκιά του με διαδοχικές περιστροφές)

Με όρους της σημειωτικής διαμεσολάβησης, η χρήση του συγκεκριμένου εργαλείου είχε ως αποτέλεσμα την παραγωγή σημείων τα οποία συνδέονταν στενά με αυτό. Για παράδειγμα στο επόμενο απόσπασμα, εντοπίζονται τέτοιου είδους σημεία τόσο στον λόγο των μαθητών όσο και στον τρόπο που χρησιμοποιούσαν τα χέρια τους. Το απόσπασμα προέρχεται από την ίδια ομάδα μαθητών η οποία συνεχίζει τη διερεύνηση προσπαθώντας να καταλήξει στη λύση του προβλήματος. Επειδή οι μαθητές έπρεπε να απαντήσουν γραπτώς στο φύλλο εργασίας, προσπαθούσαν να διατυπώσουν με σαφήνεια τον τρόπο μετακίνησης του σπιτιού. Πολλά ανάλογα αποσπάσματα εντοπίστηκαν στο λόγο των μαθητών και στις δύο ομάδες που χρησιμοποίησαν το συγκεκριμένο εργαλείο.

- 38:36 [348] M3 Λοιπόν. Εδώ είναι το σπίτι (Τοποθετεί το διαφανές αντίγραφο,
- [349] ώστε να ταυτίζεται με το σπίτι του χαρτιού). Δείχνω εδώ πάνω
- [350] τις κινήσεις. Το μεταφέρουμε από εδώ... όχι όχι το

- [351] μεταφέρουμε από εδώ (κρατάει σταθερή τη γωνία του αντιγράφου και το γυρνάει μία προς τα πάνω και μία προς τα κάτω)
- [352] M4 Όχι, όχι. Περίμενε, άκου. Κρατάμε την αριστερή κάτω
- [353] γωνία
- [354] M3 Κουκκίδα
- [355] M4 Γωνία (υπάρχει διαμάχη εάν θα το αποκαλέσουν κουκκίδα ή γωνία)
- [356] M4 Κουκκίδα, κάθετος γωνία (αποφασίζουν τελικά και τα δύο)

Αναλύοντας τα δύο προηγούμενα αποσπάσματα παρατηρούμε την εμφάνιση σημείων, όπως το «μεταφέρω», «μετακινώ», «γυρνάω», «κρατώ τη γωνία» και «κουκκίδα». Αυτά αποτελούν σημεία που διατηρούν πολύ στενή σχέση με τα συγκεκριμένα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των υλικών από τα οποία προέρχονται.

Για παράδειγμα η «κουκκίδα» είναι η τελεία που βλέπουν τα παιδιά στο διάστικτο χαρτί και είναι υποψήφια για να μετατραπεί σε μαθηματικό σημείο, το σημείο περιστροφής. Στην κουκκίδα τοποθετούν το δάχτυλό τους ή τη βελόνα υλοποιώντας το σημείο περιστροφής, και αυτή την ενέργεια περιγράφουν. Ωστόσο, στη συγκεκριμένη φάση φαίνεται οι μαθητές της ομάδας να βρίσκονται μακριά από το να αντιληφθούν την κουκκίδα ως τη μαθηματική έννοια του σημείου περιστροφής.

Αναφορικά με το ρήμα «μεταφέρουμε» στο στίχο [351] αν και ως όρος είναι μαθηματικός δεν χρησιμοποιείται για να περιγράψει το μετασχηματισμό της μετάθεσης. Η M3 όταν χρησιμοποιεί το συγκεκριμένο ρήμα αναφέρεται στην περιστροφή. Μοιάζει η επιλογή του ρήματος να συνδέεται με την προσπάθειά της να περιγράψει τη συγκεκριμένη ενέργεια, χωρίς να έχει επίγνωση του μαθηματικού όρου. Στη συνέχεια, η M3 απευθύνθηκε στην ερευνήτρια ζητώντας να επικυρώσει την περιγραφή της (βλ. στίχοι [90]-[107]). Ο ρόλος της ερευνήτριας, η οποία παρενέβη και οπτικοποίησε την κίνηση, οδήγησε τον M4 να χρησιμοποιήσει τη λέξη «γυρνάω» για να περιγράψει την κίνηση. Και πάλι το συγκεκριμένο ρήμα αποτέλεσε σημείο που συνδέθηκε στενά με την κίνηση που εκτελούσαν οι μαθητές. Αν και η λέξη δεν ήταν καθαρά μαθηματική εντούτοις περιέγραψε σωστά τον μετασχηματισμό που εφαρμόζαν.

Κατά τη διερεύνηση των μετασχηματισμών με το διαφανές αντίγραφο στο λόγο των μαθητών δεν εντοπίστηκαν πολλά μαθηματικά σημεία. Όταν εμφανίζονταν δεν ήταν παγιωμένα και αντικαθιστούνταν από μη μαθηματικές εκφράσεις που ήταν πιο κοντά στον τρόπο που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές τα εργαλεία. Για παράδειγμα, στο απόσπασμα που ακολουθεί η ίδια ομάδα μαθητών συνεχίζει την προσπάθειά της να περιγράψει τις μετακινήσεις του σπιτιού. Η M3 θέλοντας να αναφερθεί στην περιστροφή του σπιτιού κατά 90 μοίρες, αντικαθιστά τη μαθηματική λέξη «κάθετος» με την περιφραστική περιγραφή: «έτσι ώστε η αριστερή πλευρά του σπιτιού να είναι στην ευθεία της κάτω πλευράς του σπιτιού».

- 42:19 [357] M3 Κάθετος γωνία. Ωραία, εγώ κάνω ότι μου λες (Η M3
- [358] μετακινεί το διαφανές αντίγραφο)
- [359] M4 Σσςς...Και μετακινούμε το σπίτι προς τα αριστερά.

- [360] M3 Έτσι ώστε η αριστερή πλευρά να είναι... να είναι κάθετος
(Έχει στρίψει το διαφανές σπίτι κάθετα προς τα αριστερά)
-
- [361] M4 Η κάθετη πλευρά του σπιτιού...
- [362] M3 Όχι πλευρά. Έτσι όπως είναι... έτσι ώστε η αριστερή πλευρά
[363] του σπιτιού να είναι στην ευθεία της κάτω πλευράς του
[364] σπιτιού.
- [365] M4 Κάτσε. ...Περίμενε. Το έχω έτσι, κρατάμε την αριστερή κάτω
[366] γωνία (βάζει το διαφανές αντίγραφο επάνω στο σπίτι) προς τα
[367] αριστερά (την ώρα που περιγράφει κινεί και το διαφανές
[368] σπιτάκι) και τη μετακινούμε...
- [369] M3 Προς τα αριστερά έτσι ώστε η αριστερή πλευρά του
[370] σπιτιού...
- [371] M4 Σσος! Έτσι ώστε ...η αριστερή πλευρά του σπιτιού να είναι
[372] στην ευθεία της κάτω πλευράς του σπιτιού. Ωραία.

Αναφορικά με την ομάδα 2 η οποία δεν χρησιμοποίησε το διαφανές αντίγραφο, παρατηρήθηκε ότι η διαχείριση των εννοιών έγινε νοερά καθώς και με τη χρήση των χεριών και του μολυβιού. Οι μαθητές ολοκλήρωσαν τη δραστηριότητα σχετικά γρήγορα, δεν διερεύνησαν αρκετά τις μετακινήσεις και δεν έδωσαν ιδιαίτερη προσοχή στον τρόπο σύνταξης της περιγραφής τους. Φάνηκε να θεώρησαν ότι η συγκεκριμένη δραστηριότητα δεν παρουσίαζε κάποια δυσκολία και ότι θα ήταν εύκολο οι υπόλοιποι μαθητές να διαπιστώσουν τη θέση της σκιάς από την περιγραφή τους. Το φύλλο εργασίας τους αφορούσε την οριζόντια μετάθεση του σπιτιού κατά 8 εκατοστά και την ανάκλασή του με άξονα ανάκλασης τη δεξιά πλευρά του. Η περιγραφή των μαθητών ήταν ως εξής «Θα μετακινήσω το σπίτι 12 τελίτσες και μόλις το μετακινήσω θα το γυρίσω για να φτάσει το παράθυρο στη θέση του». Στο γραπτό λόγο, που είναι σχετικά ελλιπής, εντοπίζονται σημεία όπως τα ρήματα «μετακινώ» και «γυρίζω» που παραπέμπουν στους μετασχηματισμούς της μετάθεσης και της ανάκλασης, καθώς και ο όρος «12 τελίτσες» που παραπέμπει στο μέτρο της μετάθεσης κατά 12 εκατοστά. Ωστόσο το ρήμα «γυρνάω» δεν προσδιορίζει σαφώς την ανάκλαση, ενώ δεν γίνεται αναφορά στον άξονα ανάκλασης. Όπως επίσης δεν γίνεται αναφορά και στη διεύθυνση της μετάθεσης.

Στον πίνακα 4.1 δίνονται όλοι οι όροι και οι εκφράσεις που χρησιμοποίησαν οι μαθητές κατά τη διερεύνησή τους με το χειραπτικό υλικό για να περιγράψουν τους μετασχηματισμούς και τις παραμέτρους τους. Οι διαφοροποιήσεις στις εκφράσεις και στις λέξεις που επέλεξαν για να περιγράψουν τον κάθε μετασχηματισμό και τις παραμέτρους του υποδήλωνε ότι αντιλαμβάνονταν τις διαφορές μεταξύ τους, έστω και διαισθητικά.

Πίνακας 4.1: Σημεία που εντοπίστηκαν στο λόγο των μαθητών στη δραστηριότητα «Το σπίτι και η σκιά του»

Μαθηματικές έννοιες	Σημεία που συνδέονται με τα χειραπτικά εργαλεία (artifacts signs)
Μετάθεση	<i>Βάζω, ανεβάζω, πάω, σύρω, προχωρώ, μετακινώ</i>
Περιστροφή	<i>Γυρνάω, σπρώχνω, στρίβω, σύρω, μεταφέρω</i>
Ανάκλαση	<i>Αναποδογυρίζω, διπλώνω, γυρνώ ανάποδα, ξαπλώνω</i>
Σημείο περιστροφής	<i>Κρατώ τη γωνία, κρατώ την κουκκίδα, τρυπώ, πιάνω, πιάνω χωρίς να αφήσω το δάχτυλό μου από τη γωνία, κρατώ με το δάχτυλό μου</i>
Άξονας Ανάκλασης	<i>Γραμμή, πλευρά, προς την κάτω πλευρά, βάζω απέναντι, καθρέφτης, ορίζοντας, κάθετη γραμμή, κρατώ σταθερή την πλευρά</i>
Μέτρο της Γωνίας περιστροφής	<i>Έτσι ώστε η αριστερή πλευρά να είναι στην ευθεία της κάτω πλευράς του σπιτιού, ώστε η σκεπή του σπιτιού να είναι προς τα κάτω, να είναι προς την κάτω πλευρά, να είναι ανάποδα, να κοιτάει προς τα κάτω, η δεξιά κάθετη πλευρά να γίνει οριζόντια, η μύτη του τριγώνου της σκεπής να είναι προς τα κάτω</i>
Διεύθυνση γωνία περιστροφής	<i>Προς τα αριστερά, προς τα δεξιά</i>
Μέτρο της απόστασης	<i>Βούλες, φορές, κουκκίδες</i>
Διεύθυνση της απόστασης	<i>Προς τα αριστερά, προς τα δεξιά</i>

Συνοψίζοντας, η φύση της δραστηριότητας «Το σπίτι και η σκιά του» καθώς και η χρήση των χειραπτικών εργαλείων, κυρίως του διαφανούς αντίγραφου του σπιτιού, έδωσε τη δυνατότητα στους μαθητές να αντιληφθούν τη δυναμική φύση των γεωμετρικών μετασχηματισμών και την ανάγκη προσδιορισμού των παραμέτρων τους. Σε όλες τις ομάδες, τα μαθηματικά σημεία ήταν ελάχιστα στο λόγο των μαθητών και η παρουσία τους δεν ήταν σταθερή. Αντίθετα, εντοπίστηκαν σημεία, όπως λέξεις και χειρονομίες, που συνδέονταν στενά με τα υλικά που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές (artifact signs). Παρόλα αυτά, δεδομένης της ηλικίας των μαθητών και των ελλειμμάτων τους σε μαθηματικό λεξιλόγιο μοιάζει τα σημεία που εντοπίστηκαν να εμπεριέχουν μαθηματικά νοήματα. Αν και δεν είναι βέβαιο ότι μπορούν να θεωρηθούν μαθηματικά σημεία είναι πιθανό να εξελιχθούν σε τέτοια.

Η διαμεσολαβητική λειτουργία του GSP

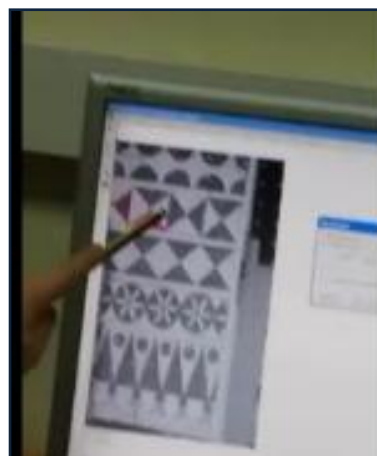
Η εισαγωγή του εργαλείου GSP φάνηκε να επηρέασε το λόγο των συμμετεχόντων και τον τρόπο που οι μαθητές αλληλεπιδρούσαν με τα μαθηματικά αντικείμενα. Κατά τη

διάρκεια εμπλοκής σε δραστηριότητες με το συγκεκριμένο εργαλείο, σε όλες τις ομάδες, ο λόγος των μαθητών εμπλουτίστηκε με μαθηματικές λέξεις και εκφράσεις, οι οποίες θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν μαθηματικά σημεία. Χωρίς βέβαια να λείπουν από το λόγο τους και τα σημεία που διατηρούσαν στενή σχέση με τα εργαλεία που χειρίζονταν οι μαθητές.

Τα εργαλεία του GSP, όπως για παράδειγμα αυτά των μετασχηματισμών, στην ορολογία της σημειωτικής διαμεσολάβησης μπορούν να αποτελέσουν τεχνουργηματικά σημεία (artifact signs). Κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας και ανάλογα με τον τρόπο που οι μαθητές τα χειρίζονται, μπορεί να εξελιχθούν σε μαθηματικά σημεία (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Για παράδειγμα, το εργαλείο της μετάθεσης εξελίσσεται σε μαθηματικό σημείο, όταν οι μαθητές εκφράζονται με τρόπο που να οδηγεί στη μαθηματική ιδέα της μετάθεσης.

Επίσης, αντικείμενα που εμφανίζονται στην οθόνη του προγράμματος αναμένεται να εξελιχθούν σε μαθηματικά σημεία που συνδέονται με μαθηματικές έννοιες των μετασχηματισμών. Για παράδειγμα, η επιλογή του σημείου περιστροφής και του μέτρου της γωνίας στην περιστροφή επιτρέπουν δυνητικά στους μαθητές να τα αντιληφθούν ως μαθηματικές παραμέτρους. Από τη στιγμή που γίνεται αντιληπτό ότι συνδέονται με μαθηματικές έννοιες αποτελούν μαθηματικά σημεία.

Το απόσπασμα που ακολουθεί προέρχεται από την υποφάση Α3, όπου η ομάδα 2 προσπαθεί να επιλέξει τον κατάλληλο μετασχηματισμό για να σχεδιάσει το επαναλαμβανόμενο μοτίβο στην εικόνα με τα ξυστά. Χρονικά τοποθετείται προς το τέλος της συνάντησης. Οι μαθητές έχουν ήδη σχεδιάσει το αριστερό και το κάτω τρίγωνο του τετραγώνου και προσπαθούν να σχεδιάσουν το επάνω (Εικ.4.19). Τόσο από το συγκεκριμένο απόσπασμα όσο και από το λόγο τους σε όλη τη διάρκεια αυτής της συνάντησης διαπιστώθηκε ότι χρησιμοποίησαν μαθηματικό λεξιλόγιο που αναφέρονταν στις έννοιες της μετάθεσης και της περιστροφής. Σχετικά με τις παραμέτρους, οι μαθητές περιέγραψαν το σημείο περιστροφής τότε με τη λέξη «τελίτσα» και τότε με

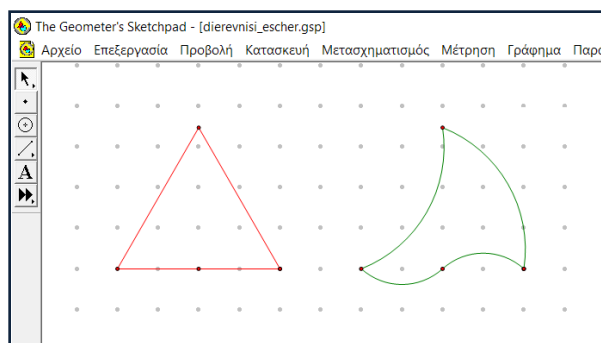


Εικόνα 4.19: Διερεύνηση των μετασχηματισμών στο περιβάλλον GSP

τις λέξεις «σημείο περιστροφής». Ομοίως ο άξονας ανάκλασης αναφέρθηκε ως «γραμμή» αλλά και ως «άξονας». Αυτή η εναλλαγή των όρων υποδεικνύει ότι μάλλον οι λέξεις αυτές αποτελούν σημεία που ναι μεν είναι περισσότερο μαθηματοποιημένα, αλλά δεν έχουν χάσει τη σύνδεση με τα εργαλεία από τα οποία προέρχονται (pivot signs). Δηλαδή από τη μια, φαίνεται οι μαθητές να αντιλαμβάνονται γραμμές και τελείες και έτσι να τις περιγράφουν. Από την άλλη, μοιάζει να εντοπίζουν τη σύνδεση αυτών των αντικειμένων με τις θεωρητικές έννοιες των παραμέτρων. Ωστόσο, από τη συνεχή αναδιατύπωση και τις λανθασμένες αντιστοιχήσεις μετασχηματισμών με τις παραμέτρους τους φαίνεται η σύνδεση αυτή να είναι ασταθής.

- 70:39 [373] M7 Από πάνω κάνε ανάκλαση (Έχουν σχεδιάσει το αριστερό και το κάτω τρίγωνο)
- [374] M1 Από εδώ θα το κάνω, περιστροφή
- [374] M7 Όχι κοίτα, βάλε την τελίτσα όπως έκανες και το κάτω (εννοεί να επιλέξει σημείο περιστροφής το κέντρο που ενώνονται τα τρίγωνα)
- [375] M1 Μα δεν γίνεται με την τελίτσα να κάνω ανάκλαση
- [376] E Εξήγησέ του γιατί
- [377] M1 Γιατί τις γραμμές διαλέγουμε για σημείο περιστροφής εεε...
- [378] ανάκλασης
- [379] E Εσύ θέλεις να κάνει ανάκλαση;
- [380] M7 Ναι
- [381] E Σου λέει για να κάνεις ανάκλαση... Ωραία δοκίμασε να
- [382] κάνεις ανάκλαση, αλλά για να κάνεις ανάκλαση πρέπει να
- [383] διαλέξεις πλευρά όχι σημείο.

Σε όλες τις ομάδες εντοπίστηκαν στο λόγο των μαθητών σημεία τα οποία συνέδεαν τα αντικείμενα της οθόνης με τα μαθηματικά αντικείμενα που απαντώνται στους μετασχηματισμούς, κάτι που διατηρήθηκε μέχρι το τέλος της παρέμβασης. Το επόμενο απόσπασμα, όπως και πολλά άλλα, δείχνει αυτή τη σύνδεση. Προέρχεται από το τέλος της φάσης B2, όπου οι μαθητές διερεύνησαν τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς μέσα από την τεχνική του Escher. Στην ομάδα 3 οι μαθητές προσπαθούν να περιστρέψουν το καμπυλόγραμμο σχήμα δεξιά (Εικ. 4.20), που προήλθε από το ισοσκελές τρίγωνο, για να δημιουργήσουν πλακόστρωση.

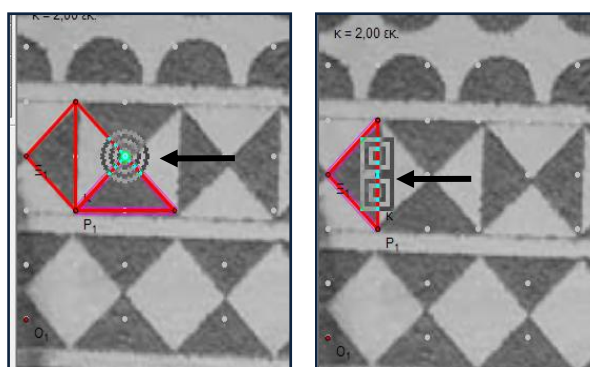


Εικόνα 4.20: Το τέταρτο ζευγάρι πλακιδίων στη δραστηριότητα της υποφάσης B2

- 74:00 [384] E Τι δεν επέλεξε; Πεξ M6
- [385] M6 Αυτή την τελίτσα
- [386] E Τι είναι αυτή η τελίτσα στην περιστροφή;
- [387] M6 Κουκκίδα
- [388] E Σημείο... περιστροφής. Πώς επιλέγουμε σημείο περιστροφής,
- [389] θυμάστε;... Διπλό κλικ. Από πού θέλεις να το κρατήσεις;

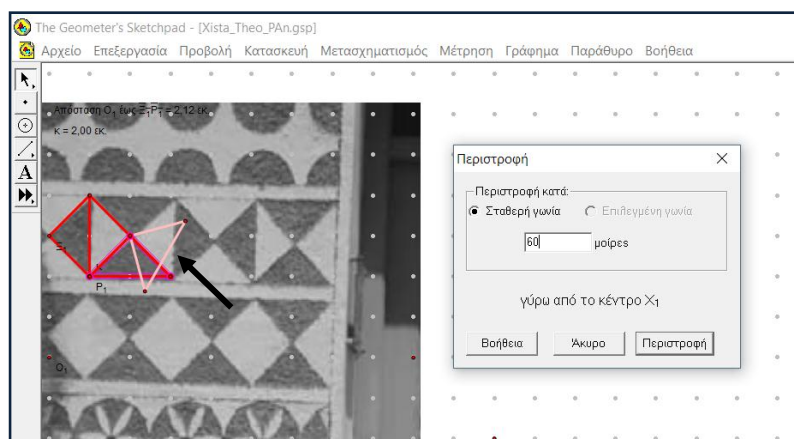
Οι λέξεις «τελίτσα» και «κουκκίδα» αποτελούν σημεία που αναφέρονται στα αντικείμενα της οθόνης που παρατηρούν και διαχειρίζονται οι μαθητές (artifact signs). Στόχος της ερευνήτριας, που επαναδιατύπωσε χρησιμοποιώντας τον μαθηματικό όρο, ήταν να κατασκευάσει τη σύνδεση μεταξύ τους και να βοηθήσει στην εξέλιξη των τεχνουργηματικών σε μαθηματικά σημεία.

Η δυνατότητα που δίνει το πρόγραμμα για δράση επάνω στα αντικείμενα και ο τρόπος που το δυναμικό περιβάλλον υποδεικνύει τα δύο διαφορετικά αντικείμενα (τονίζονται έντονα όταν επιλέγονται (Εικ. 4.21)) βοηθά στη δημιουργία συνδέσεων των παραμέτρων με τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς. Για παράδειγμα, στους στίχους [374]-[378], οι M1 και M7 φαίνεται να συγχέουν τις παραμέτρους των δύο μετασχηματισμών, τον άξονα ανάκλασης και το σημείο περιστροφής. Η ερευνήτρια παρότρυνε τους μαθητές να δοκιμάσουν να μετασχηματίσουν και με τους δύο τρόπους, ώστε να διαπιστώσουν τη διαφορά.



Εικόνα 4.21: Παλλόμενα γραφικά στο πρόγραμμα επισημαίνουν το σημείο περιστροφής και τον άξονα ανάκλασης

Ένα ακόμη σημαντικό εργαλείο του προγράμματος που βοηθά στη διαμεσολάβηση των μαθηματικών νοημάτων είναι η προεπισκόπηση. Στην υποφάση A3 οι μαθητές της ομάδας 2 αποφάσισαν τελικά, ως αποτέλεσμα της συζήτησης που περιγράφηκε στους στίχους [373]-[383], να κάνουν περιστροφή για να κατασκευάσουν το επάνω τρίγωνο. Επέλεξαν σημείο περιστροφής την κάτω κορυφή με γωνία περιστροφής 270 μοίρες. Το τρίγωνο περιστράφηκε με διαφορετικό τρόπο από τον επιθυμητό. Η προεπισκόπηση αποτέλεσε εργαλείο που τους βοηθούσε να επιλέξουν το μέτρο της γωνίας και βοήθησε να αναπτυχθούν στο λόγο τους περισσότερα μαθηματικοποιημένα σημεία (Εικ. 4.22).



Εικόνα 2.22: Επιλογή γωνίας περιστροφής με τη βοήθεια της προεπισκόπησης

Στο απόσπασμα που ακολουθεί οι μαθητές αναφέρονται σε μοίρες για να προσδιορίσουν το μέτρο της γωνίας περιστροφής, κάτι που αποτελεί μαθηματικό σημείο. Η περιφραστική περιγραφή του τρόπου που περιστρέφονταν τα αντικείμενα, που ήταν πολύ έντονη στη δραστηριότητα με τα χειραπτικά υλικά, πλέον δεν υπάρχει στο λόγο των μαθητών, καθώς στην καρτέλα της περιστροφής πρέπει να συμπληρωθούν μοίρες για να περιστραφεί το αντικείμενο. Η συμβολή της ερευνήτριας ήταν σημαντική καθώς στο λόγο της χρησιμοποιούσε συνεχώς μαθηματικούς όρους, προσπαθώντας να τους συνδέσει με τις ενέργειες των μαθητών (Στίχοι [392], [395], [399]).

- 71:30 [391] M1 Θέλω να το στρίψω προς τα δω (δείχνει την κατεύθυνση προς τα δεξιά)
- [392] E Μήπως έχεις λάθος σημείο περιστροφής;
- [393] M1 Ναι
- [394] E Μπράβο (Τώρα επιλέγει με διπλό κλικ σημείο περιστροφής τη δεξιά κορυφή του κάτω τριγώνου)
- [395] E Περιστροφή, πόσες μοίρες; Για σκέψου εσύ (προς τον M7)
- [396] πόσο πρέπει να το περιστρέψει;
- [397] M1 270 (Οι 270 απομακρύνουν από το δεξί τρίγωνο το οποίο σχεδιάζεται με γωνία 90 μοιρών)
- [398] E Από εδώ, κάπως να το στρίψεις αυτό, για να έρθει έτσι.
- [399] E Σου θυμίζω ότι περιστρέφει αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού.
- [400]
- [401] M1 Αχ ναι (Κάνει με το χέρι του μια στροφή όπως γυρνάει το ρολόι)

Καθώς οι μαθητές αποκτούσαν εμπειρία με το πρόγραμμα η παρουσία των μαθηματικών σημείων ήταν μεγαλύτερη. Οι εκφράσεις που έδειχναν στενότερη σύνδεση με το εργαλείο ήταν λιγότερες αν και συνέχιζαν να εντοπίζονται. Το δύο παρακάτω αποσπάσματα είναι από την τελευταία συνάντηση της παρέμβασης, όπου

οι ομάδες δημιούργησαν τα δικά τους σχέδια. Το πρώτο είναι από την ομάδα 1 και το δεύτερο από την ομάδα 2.

- 37:00 [402] M4 Ωραία. Τώρα, μετασχηματισμός, μεταφορά κάτω πώς πάμε;...
[403] Αυτή την τελίτσα (Βάζει 270, στη συνέχεια 180 και πάλι 270)
[404] Ααχ όχι! Έκανα κάτι λάθος. Περιστροφή (Αλλάζει
[405] μετασχηματισμό)
[406] E1 Τώρα τι πρέπει να επιλέξεις;
[407] M4 Δεν επέλεξα σημείο περιστροφής (Κινεί το ποντίκι προς
διάφορα σημεία για να επιλέξει σημείο περιστροφής τελικά
[409] επιλέγει την κάτω γωνία με διπλό κλικ). Και τώρα τη γωνία
[409] πρέπει να επιλέξω;
- 17:18 [410] M1 Θα μπορούσαμε να κάνουμε περιστροφή; (Σκέφτονται λίγο)
[411] M7 Να κάνουμε ανάκλαση (Κάνουν ανάκλαση, αλλά δεν
[412] επιλέγουν άξονα ανάκλασης. (Το σχήμα μετατίθεται τυχαία)
[413] M1 Κάντο να δούμε που θα πάει. Κάντο. Τι άξονα ανάκλασης
[414] έβαλες;
[415] M7 Ααα! δεν βάλαμε άξονα ανάκλασης.

Από τα δύο αποσπάσματα φαίνεται ότι ο λόγος των μαθητών που αλληλεπιδρούν με τις εντολές του προγράμματος είναι εμπλουτισμένος με μαθηματικούς όρους οι οποίοι συνδέονται με τις έννοιες των γεωμετρικών μετασχηματισμών. Συνεπώς, μπορούν να εκληφθούν ως μαθηματικά σημεία.

Η 3η ομάδα αν και κατάφερε να ενσωματώσει στο λόγο της μαθηματικούς όρους, δεν μπόρεσε να εφαρμόσει τις μαθηματικές ιδέες στο δικό της σχέδιο. Το ενδιαφέρον των μελών της ομάδας μειώθηκε προς το τέλος της παρέμβασης και το τελικό σχέδιο ήταν φτωχό σε ποικιλία και πολυπλοκότητα μετασχηματισμών.

Ο πίνακας 4.2 δείχνει τα μαθηματικά σημεία που εντοπίστηκαν στο λόγο των μαθητών σε όλες τις ομάδες κατά την αλληλεπίδρασή τους με το GSP, μέχρι και την τελευταία συνάντηση της παρέμβασης.

Πίνακας 4.2:Σημεία που εντοπίστηκαν στην εξέλιξη του λόγου των μαθητών κατά τη διάρκεια της παρέμβασης

Μαθηματικές έννοιες	Μαθηματικά σημεία στον λόγο των μαθητών σε δραστηριότητες στο περιβάλλον του GSP
Μετάθεση	<i>μεταφέρω</i>
Περιστροφή	<i>περιστρέφω</i>
Ανάκλαση	<i>ανακλώ</i>
Σημείο περιστροφής	<i>σημείο περιστροφής</i>
Άξονας Ανάκλασης	<i>άξονα ανάκλασης</i>
Μέτρο της Γωνίας περιστροφής	<i>μοίρες</i>
Διεύθυνση γωνία περιστροφής	<i>μοίρες</i>
Μέτρο της απόστασης	<i>εκατοστά</i>
Διεύθυνση της απόστασης	<i>μοίρες</i>

Συνοψίζοντας, τα σημεία που συνδέονταν με τα εργαλεία (artifact signs) ήταν περισσότερο ορατά στα πρώτα στάδια της παρέμβασης, όταν οι μαθητές χρησιμοποιούσαν χειραπτικά υλικά. Κατά τη διάρκεια εμπλοκής των μαθητών σε δραστηριότητες του δυναμικού περιβάλλοντος Geometer's Sketchpad ο λόγος των μαθητών ανέδειξε μια εξέλιξη των σημείων που συνδέονταν με τα εργαλεία και τα αντικείμενα στο περιβάλλον του προγράμματος άλλοτε σε ενδιάμεσα σημεία (pivot signs) και άλλοτε σε μαθηματικά (mathematical signs). Σε αυτό βοήθησαν οι λειτουργίες του προγράμματος, όπως οι εντολές των μετασχηματισμών που ήταν σε τυπικό μαθηματικό λόγο, η προεπισκόπηση, τα παλλόμενα γραφικά αλλά και η ερευνητήρια που προσπαθούσε να διευκολύνει τη διαμεσολαβητική λειτουργία των εργαλείων του προγράμματος. Ωστόσο, δεν θα μπορούσαμε να πούμε ότι δεν υπήρχαν και σημεία που συνδέονταν στενά με το ψηφιακό εργαλείο. Το εάν τα σημεία αυτά εξελίχθηκαν σε μαθηματικά ή ενδιάμεσα εξαρτάται κάθε φορά από το πόσο σταθερά ήταν τα νοήματα που δημιουργούσαν οι μαθητές για τις μαθηματικές έννοιες των μετασχηματισμών, καθώς αλληλεπιδρούσαν με το περιβάλλον του προγράμματος.

4.2.2 Η τέχνη ως πλαίσιο νοηματοδότησης των επίπεδων μετασχηματισμών

Στο υποκεφάλαιο αυτό εξετάζεται με ποιον τρόπο και σε ποιο βαθμό η ανάπτυξη του μαθηματικού λόγου των μαθητών επηρεάστηκε από την αλληλεπίδρασή τους με την τέχνη. Η πλαισίωση έλαβε χώρα σε όλη τη διάρκεια της παρέμβασης, όπου τα έργα

τέχνης ήταν ενταγμένα στις δραστηριότητες, ενώ ο τελικός στόχος της παρέμβασης ήταν οι μαθητές να ενσωματώσουν τις μαθηματικές έννοιες των μετασχηματισμών σε δικά τους δημιουργήματα. Τα σχετικά αποσπάσματα επιλέχθηκαν γιατί θεωρήθηκαν ενδεικτικά του παρωθητικού ρόλου της τέχνης στη νοηματοδότηση των μαθηματικών εννοιών.

Τα ξυστά της Χίου

Η αρχική προσέγγιση των εννοιών της συμμετρίας έγινε μέσω της επαφής τους με μοτίβα που προέρχονται από μια πολιτισμική πρακτική, αυτή των ξυστών κατασκευών σε τοιχοποιίες στο Πυργί της Χίου. Στόχος ήταν η ιδιαιτερότητα και η ποικιλία των σχεδίων να προσελκύσουν το ενδιαφέρον των μαθητών, ενισχύοντας παράλληλα τη σύνδεση των μαθηματικών με τα ανθρώπινα δημιουργήματα. Στην ομαδική συζήτηση στην αρχή της παρέμβασης, η ερευνήτρια πρόβαλε εικόνες με μοτίβα ξυστών και ζήτησε μεταξύ άλλων από τους μαθητές να εκφράσουν τα συναισθήματά τους για αυτά. Οι μαθητές φάνηκε να παρατηρούν με ενδιαφέρον τα σχέδια και έκαναν θετικά σχόλια. Κάποιοι από τους μαθητές τα παρομοίασαν με στοιχεία της εμπειρίας τους, όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα. Για παράδειγμα, τη ροζέτα δείγμα περιστροφικής συμμετρίας, η M3 την παρομοίασε με ένα λουλούδι (Εικ. 4.23). Ή σε ένα άλλο σχέδιο που απεικόνιζε κύκλους σε οριζόντια μετάθεση ο M1 τους παρομοίασε με τον λογότυπο της εταιρείας Σανέλ (Εικ.4.24).

- 33:00 [416] E Σας αρέσουν αυτά τα σχέδια;
 [417] M3 Εμένα μου αρέσουν γιατί έχουν αντίθεση τα σχήματα και
 [418] τα χρώματα
 [419] M1 Αυτά τα κάτω τα κυκλικά μοιάζουν λίγο σαν το σήμα της
 [420] Σανέλ
 [421] M3 Το πάνω πάνω σχέδιο μου άρεσε. Με τα φύλλα
 [422] M7 Εμένα μου αρέσει αυτό που είναι σαν ρόμβος
 [423] M3 Εγώ θα έκανα εκείνο το κυκλικό, που είναι σαν λουλούδι
 [424] E Πώς θα το έφτιαχνες;
 [425] M3 Εάν είχα όλα τα κομμάτια θα ήτανε σαν παζλ. Θα έβαζα τα
 [426] κομμάτια και θα γινότανε σαν κύκλος. Επειδή είναι έτσι τα
 [427] κομμάτια μπαίνουν κυκλικά.



Εικόνα 4.23: Ροζέτα σε τοιχοποιία στο Πυργί



Εικόνα 4.24: Μοτίβο σε τοιχοποιία στο Πυργί

Η προσδοκία της ερευνήτριας ήταν, μέσα από τον συσχετισμό των σχεδίων με τις καθημερινές εμπειρίες των παιδιών, να δημιουργηθούν συνδέσεις με τις μαθηματικές ιδέες των γεωμετρικών μετασχηματισμών. Για το λόγο αυτό, η ερευνήτρια προσπάθησε να διερευνήσει τις ιδέες των μαθητών σχετικά με τον τρόπο που πίστευαν ότι θα μπορούσε να δημιουργηθεί το κάθε μοτίβο με αφετηρία τα σχέδια που προτιμούσαν. Έτσι, στηρίχτηκε στην ιδέα της M3 ότι το μοτίβο περιστροφικής συμμετρίας μοιάζει με λουλούδι (στίχος [424]) και της ζήτησε να περιγράψει τον τρόπο που θα το έφτιαχνε. Η M3 χρησιμοποίησε τις μαθηματικές λέξεις «κύκλος» και «κυκλικός», οι οποίες εννοιολογικά συνδέονται με τον μετασχηματισμό της περιστροφής. Με παρόμοιο τρόπο στο επόμενο απόσπασμα η ερευνήτρια διερευνά τις ιδέες των μαθητών μέσα από μοτίβα που τους αρέσουν

- 33:34 [428] M4 Εμένα μου αρέσει αυτό που έχει πολλά σχήματα. Έχει και
[429] τρίγωνα και τετράγωνα
[430] E Πώς πιστεύετε ότι δημιουργήθηκε
[431] M4 Αρχικά στο κέντρο έβαλε ένα τρίγωνο συνεχώς δίπλα στο άλλο
[432] μέχρι να κάνει έναν κύκλο και μετά βρήκε ένα σχήμα για το
[433] υπόλοιπο γύρω (Εικ. 4.25)
[434] M1 Μάλλον είναι σαν ισοσκελές τρίγωνο που δεν έχει γωνία
[435] M3 Να σας πω πώς γίνεται. Σκαλίζει έναν κύκλο στη μέση και
[436] μετά ξύνει τα γύρω γύρω. Έτσι όπως είναι φέρνει τρίγωνα και
[437] τα σκαλίζει.
[438] E Σε αυτό το σχέδιο τι είναι αυτό που επαναλαμβάνεται.
[439] M3 Είναι ένας κώνος ζωγραφισμένος λες και είναι κανονικός. (Εικ.
4.26)
[440] Αλλά είναι ζωγραφισμένος.
[441] E Ο μαύρος εεε; Τι άλλο θα μπορούσαμε να πούμε ότι
[442] επαναλαμβάνεται;
[443] M3 Εμένα μου φαίνεται ότι είναι κλεψύδρες και σαν πέφτει μία...
[444] E Αυτό το άσπρο;
[445] M3 Ναι



Εικόνα 4.25: Το μοτίβο που περιέγραψαν ο M4 και η M3



Εικόνα 4.26: Το μοτίβο που περιέγραψε η M3

Οι M4 και M3 περιέγραψαν τον τρόπο κατασκευής του σχεδίου, χρησιμοποιώντας ρήματα στο τρίτο ενικό πρόσωπο, (Στίχοι [431]-[433] & [435]-[437]) όπως «έβαλε», «σκαλίζει», «βρήκε» και «ξύνει». Αυτό μπορεί να ερμηνευτεί με βάση την ιδέα ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονταν τα σχέδια ως ένα ανθρώπινο

δημιούργημα. Η σύνδεσή τους με τις μαθηματικές ιδέες δεν ήταν ορατή αν και εντοπίστηκε μαθηματικό λεξιλόγιο, όπως για παράδειγμα τα ονόματα των σχημάτων. Άλλωστε η γεωμετρία των μετασχηματισμών προϋπήρχε ως πρακτική γνώση της τέχνης προτού αναπτυχθεί ως μαθηματική θεωρία. Μέσα στο πλαίσιο αυτό η ερευνήτρια ακολούθησε ανάλογη πορεία. Πρώτα έφερε σε επαφή τους μαθητές με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, ως μια πρακτική τέχνη, και στη συνέχεια προσπάθησε να καθοδηγήσει τους μαθητές να προσεγγίσουν την μαθηματική τους υπόσταση.

Η τεχνική των πλακοστρώσεων του Escher

Η εξοικείωση με τους μετασχηματισμούς και η περαιτέρω διερεύνηση τους έγινε μέσω της τεχνικής των πλακοστρώσεων του Escher, στη φάση Β. Η επιλογή του συγκεκριμένου καλλιτέχνη έγινε γιατί αποτελεί ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα συνδυασμού των γεωμετρικών εννοιών των μετασχηματισμών με τις εικαστικές τέχνες. Στα έργα του τα μοτίβα του δεν έχουν τη μορφή γεωμετρικών σχημάτων αλλά ανθρώπων, ζώων κ.λ.π. Κρίθηκε ότι τα έργα του θα μπορούσαν να διεγείρουν το ενδιαφέρον των μαθητών, ώστε να θελήσουν να χρησιμοποιήσουν την τεχνική του για να κάνουν τα δικά τους σχέδια.

Για να προσελκύσουμε την προσοχή των μαθητών και να γνωρίσουν καλύτερα τον Escher δείξαμε έργα του με θέμα τις αδύνατες και παράξενες κατασκευές και κατασκευάσαμε ταινίες mobius. Στη συνέχεια προχωρήσαμε με την παρουσίαση έργων του που εμπεριέχουν μετασχηματισμούς (Εικ. 3.10).

Η επαφή με τα έργα του Escher φάνηκε να προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών. Στην ομαδική συζήτηση που συνόδευε την παρουσίαση των έργων, στην υποφάση Β1, η ερευνήτρια ζήτησε από τους μαθητές να περιγράψουν τις ιδέες τους σχετικά με τον τρόπο που ο καλλιτέχνης δημιούργησε τα έργα και να εντοπίσουν τους τρεις μετασχηματισμούς που είχαν διερευνήσει στις προηγούμενες συναντήσεις. Στο στάδιο αυτό, οι μαθητές φάνηκε να αναγνωρίζουν την μετάθεση επάνω σε συγκεκριμένη διεύθυνση, την περιστροφή και το σημείο περιστροφής, την ανάκλαση και τον άξονά της. Άλλες μαθηματικές ιδέες που αναδύθηκαν μέσα από τη διερεύνηση των έργων ήταν αυτή του απείρου, της ισομετρίας και της πλακόστρωσης. Οι μαθητές ήταν ιδιαίτερα αναλυτικοί στις περιγραφές τους. Εμφανίστηκαν πολλά τέτοια αποσπάσματα στην ομαδική συζήτηση. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα δίνεται με το επόμενο απόσπασμα. Η Μ3 χρησιμοποιεί τη λέξη «περιστροφή» για να περιγράψει τον τρόπο που έχει δημιουργηθεί ο πίνακας «Clowns, 1938». Όταν η ερευνήτρια της ζητά να βρει το σημείο περιστροφής το εντοπίζει σωστά.

24:30 [446] Μ3 Ο Escher, αυτός που το έφτιαξε, τα έχει σκεφτεί μάλλον πολύ
[447] καιρό για να το κάνει αυτό. Γιατί κάνει μια περιστροφή... λες
[448] και κρατιούνται λίγο εδώ πέρα με τα χέρια (Δείχνει στην
οθόνη περιστρέφοντας με το χέρι της)

- [449] E Ποιο είναι το σημείο περιστροφής
 [450] M3 Αυτό εδώ το σημείο (Το εντοπίζει σωστά)

Παρομοίως, στο επόμενο απόσπασμα ο M4 προσπαθεί να εντοπίσει τους μετασχηματισμούς στον πίνακα του Escher «Circle Limit III, 1959». Ήταν ανεβασμένος σε μια καρέκλα δείχνοντας στην οθόνη (Εικ. 4.27). Καθώς μιλούσε συνόδευε με χειρονομίες το λόγο του, που ήταν ιδιαίτερα ζωηρός. Εντόπισε τον μετασχηματισμό της περιστροφής και το σημείο περιστροφής. Μάλιστα στην επιχειρηματολογία του έκανε αναφορά στη δραστηριότητα «Το σπίτι και η σκιά του», εντοπίζοντας αναλογίες ανάμεσα στις μετακινήσεις του σπιτιού και στον τρόπο δημιουργίας των φιγούρων στον συγκεκριμένο πίνακα. Επιπρόσθετα, οι εκφράσεις «να πάει στο ίδιο του το χρώμα», «ολόιδιο» και «οι γωνίες είναι ολόιδιες» υπονοούσαν την έννοια της ισομετρίας, που αφορά τη διατήρηση των γεωμετρικών ιδιοτήτων όπως των γωνιών και των σχημάτων και αποτελεί βασική ιδιότητα του είδους των μετασχηματισμών που διερευνήθηκαν.

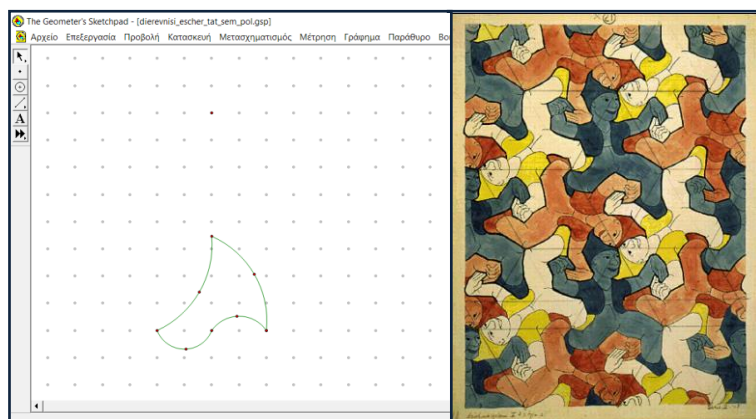
- 22:00 [451] M4 Α εγώ κατάλαβα από πού θα το περιστρέψω
 [452] E Από πού;
 [453] M4 Με το ίδιο του το χρώμα
 [454] E Δηλαδή;
 [455] M4 Δηλαδή, θα το περιστρέψουμε για να πάει στο ίδιο του το
 [456] χρώμα. Είναι σαν εκείνη την άσκηση με το σπιτάκι και την
 [457] σκιά του.
 [458] E Για πες
 [459] M4 Θα κρατήσουμε αυτή τη γωνία και όπως υπάρχει αυτό το
 [460] ψαράκι επάνω, ολόιδιο, κρατώντας αυτό θα το γυρίσουμε ώστε
 [461] αυτή η γωνία να είναι... γιατί αυτές οι δύο γωνίες είναι
 [462] ολόιδιες



Εικόνα 4.27: Οι μαθητές εντοπίζουν τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς στα έργα του Escher

Τα σχέδια του Escher φαίνεται να βοήθησαν μια ομάδα μαθητών να στηρίζουν την επιχειρηματολογία τους, καθώς διαπραγματεύονταν μαθηματικά νοήματα που αφορούσαν τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Αυτή η σύνδεση εμφανίστηκε μία φορά και εντοπίστηκε κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας στην υποφάση B2, όπου οι μαθητές διερευνούσαν με το GSP την τεχνική των πλακοστρώσεων του Escher. Πιο συγκεκριμένα, στην ομάδα 3 η M2 ανακάλεσε ένα έργο του Escher, που απεικονίζει μοτίβα με τη μορφή κλόουν να δημιουργούν πλακόστρωση μέσω περιστροφής, για να επιχειρηματολογήσει υπέρ της επιλογής του μετασχηματισμού της περιστροφής (Εικ. 4.28).

- 77:40 [463] M2 Το βρήκα είναι σαν εκείνο με τους κλόουν
 [464] E Ναι
 [465] M2 Ξέχασα εκείνο πώς λέγεται που γυρνάνε οι κλόουν
 [466] E Περιστροφή. Ναι...
 [467] M2 Εάν το γυρίσουμε θα κλείσει



Εικόνα 4.28: Αναλογίες μεταξύ του τρόπου που θα μετασχηματιστεί το σχήμα (αριστερά) και του έργου του Escher, Clowns (δεξιά)

Στην υποφάση B2 οι μαθητές κλήθηκαν να ανακαλύψουν τον τρόπο όπου ένα κανονικό πολύγωνο μπορεί να τροποποιηθεί κατάλληλα και με την εφαρμογή ενός κατάλληλου μετασχηματισμού να καλύψει το επίπεδο. Η τεχνική του Escher αποτέλεσε ένα πλαίσιο που παρακίνησε τους μαθητές να σκεφτούν τις μαθηματικές έννοιες των μετασχηματισμών και τους ενέπλεξε στην διερεύνηση και εμβάθυνση στις έννοιες αυτές με παραγωγικό τρόπο. Η όλη διαδικασία εκλήφθηκε θετικά από τους μαθητές, παρά το γεγονός ότι τους δυσκόλεψε. Δόθηκαν 4 ζευγάρια πλακιδίων (Εικ. 3.11). Η ομάδα 1 βρήκε πώς προέκυψαν τα τελικά σχήματα από τα αρχικά και πλακόστρωσε με όλα τα τροποποιημένα πλακίδια, χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς. Η ομάδα 2 βρήκε επίσης πώς προέκυψαν τα τελικά σχήματα, αλλά πρόλαβε να πλακοστρώσει μόνο με το πρώτο ζευγάρι. Η ομάδα 3 είχε δυσκολίες και δεν κατάφερε να βρει πώς τροποποιήθηκαν τα αρχικά πολύγωνα ώστε να δημιουργηθούν τα τελικά και δεν πλακόστρωσε με κανένα.

Τα έργα των μαθητών

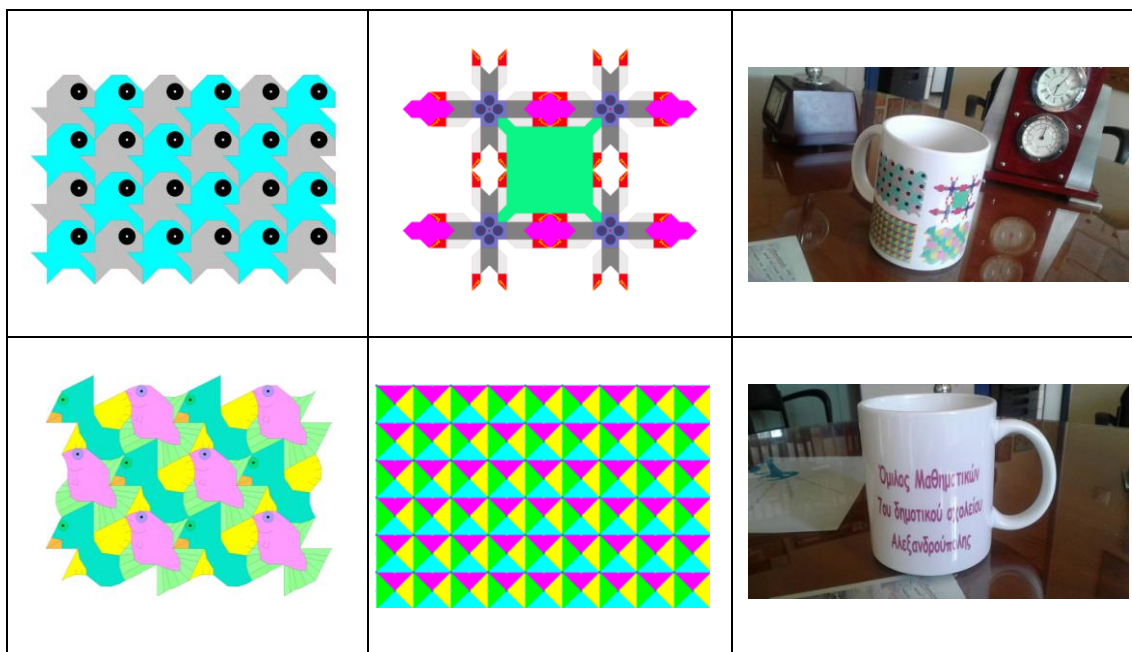
Στο τέλος της παρέμβασης (Φάση Γ), ζητήθηκε από τους μαθητές να δημιουργήσουν στο περιβάλλον του GSP τα δικά τους σχέδια, χρησιμοποιώντας τις μαθηματικές ιδέες των μετασχηματισμών και της τεχνικής των πλακοστρώσεων του Escher. Για να εμπνευστούν και να πάρουν ιδέες εκτυπώσαμε διάφορα πρότυπα σχέδια βασισμένα στην ίδια τεχνική. Οι μαθητές θα μπορούσαν να σχεδιάσουν κάτι από αυτά ή να δημιουργήσουν κάτι δικό τους.

Αρχικά οι μαθητές φάνηκε να δυσκολεύονται και να προβληματίζονται σχετικά με το τι θα κάνουν. Άλλαξαν συνεχώς άποψη για τα σχέδια που θα δημιουργούσαν απορρίπτοντας πολλά είτε γιατί δεν τους προκαλούσαν το ενδιαφέρον είτε γιατί τα θεωρούσαν δύσκολα. Προσπαθούσαμε να τους ενθαρρύνουμε, αναλύαμε και συζητούσαμε για τον τρόπο που θα μπορούσαν να δημιουργηθούν τα σχέδια. Για παράδειγμα, τους βοηθούσαμε να εντοπίσουν το αρχικό κανονικό πολύγωνο από το οποίο προέκυψαν, τις τροποποιήσεις που υπέστησαν και τον μετασχηματισμό που δημιουργούσε την πλακόστρωση. Στο απόσπασμα που ακολουθεί η ερευνήτρια συζητά με την Μ3 από την ομάδα 1 για ένα από τα πρότυπα σχέδια. Αναλύουν τον μετασχηματισμό του σχεδίου και τον τρόπο που έχει τροποποιηθεί το αρχικό πολύγωνο ώστε να μπορέσουν να το κατασκευάσουν.

- 36:00 [468] Μ3 Να κάνουμε τον σκύλο;
[469] Ε Τον σκύλο θέλετε να κάνετε; Ωραία, κάντε τον σκύλο.
[470] Εδώ πέρα τι έχει υποστεί ο σκύλος; (Ο σκύλος δημιουργεί πλακόστρωση με μετάθεση. Σειρά ανά σειρά έχει υποστεί ανάκλαση)
[471] Μ3 Ανάκλαση
[472] Ε Ναι. Εάν θέλετε μπορείτε να μη κάνετε ανάκλαση. Κάθε σειρά να έχει τον ίδιο προσανατολισμό. (Δείχνω με τα χέρια μου προς μία κατεύθυνση)... Ότι θέλετε... Ο σκύλος είναι έτσι.
[473] Κάνεις πρώτα το αρχικό τετράγωνο. Εδώ τι θα προσθέσετε;
[474] Μ3 Το κεφάλι, εδώ πέρα... εδώ κάτω την ουρά
[475] Ε Εδώ κάτω την ουρά, ναι...
[476] Μ3 Αυτά. Ααα και το ποδαράκι
[477] Ε Ποιο κομμάτι ουσιαστικά...;
[478] Μ3 Αυτή είναι η ουρά
[479] Ε Αυτό μπαίνει...

Συνολικά, οι δύο από τις τρεις ομάδες κατάφεραν να αξιοποιήσουν τις μαθηματικές τους ιδέες για τους μετασχηματισμούς, δημιουργώντας ενδιαφέροντα σχέδια. Η ομάδα 1 αποφάσισε να αντιγράψει ένα από τα εκτυπωμένα σχέδια που δώσαμε. Η ομάδα 2 δημιούργησε κάτι δικό της. Η ομάδα 3 δεν μπόρεσε να εφαρμόσει αποτελεσματικά τις μαθηματικές έννοιες και το τελικό της σχέδιο ήταν

φτωχό σε μαθηματικό περιεχόμενο. Τα τελικά σχέδια εκτυπώθηκαν δε αφίσες και κούπες για να δοθεί ένα ακόμη κίνητρο στους μαθητές (Εικ.4.29).



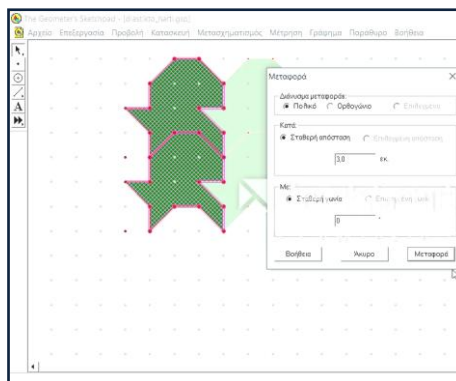
Εικόνα 4.29: Τα τελικά σχέδια των μαθητών

Παρά τη δυσκολία να αποφασίσουν τι σχέδιο να δημιουργήσουν, η όλη διαδικασία φάνηκε να κινητοποιεί τους μαθητές, αν και δεν εμφανίστηκαν πολλά αποσπάσματα πάνω σε αυτό. Στο απόσπασμα που ακολουθεί, στην ομάδα 2, οι Μ1 και Μ4 μετά από πολλές συζητήσεις και αλλαγές για το σχέδιο που θα δημιουργήσουν, κατασκεύασαν τελικά μία πλακόστρωση. Από το διάλογο είναι ορατό το ενδιαφέρον τους για τη διαδικασία, καθώς συζητάνε ζωηρά για τη μορφή που θα έχει το σχέδιο τους (Εικ. 4.30), τα χρώματα αλλά και τους μαθηματικούς μετασχηματισμούς που θα χρησιμοποιήσουν.

- 72:00 [482] Μ1 Σου αρέσει;
 [483] Μ4 Αυτό είναι θα είναι το πρωτότυπο μας
 [484] Μ1 Ωραίο, δεν είναι όμως;
 [485] Μ4 Ναι, πολύ ωραίο
 [486] Μ1 Κυρία, δείτε
 [487] Μ4 Έτσι θα είναι το σχέδιο μας απλά θα αλλάζουμε χρώματα
 [488] ΒΕ Ναι και μάλιστα ανά τέσσερα...
 [489] Μ1 Θέλουμε να του αλλάζουμε χρώματα
 [490] Μ4 Ναι αυτό θα κάνουμε. Εγώ λέω ανά ένα να αλλάζουμε
 [491] χρώματα

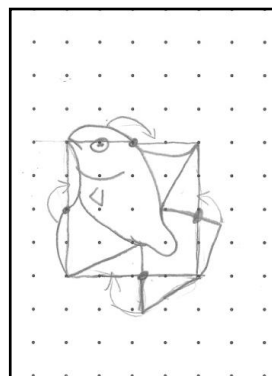
 [492] Μετασχηματισμός...
 [493] Να τα σχεδιάσουμε σαν δεινοσαυράκια;

- [494] M1 Μετασχηματισμός, περιστροφή, ότι να είναι απλά να
[495] δοκιμάζουμε



Εικόνα 4.30: Το σχέδιο της ομάδας 2 σε ένα από τα στάδια κατασκευής του

Η ομάδα 1 δημιούργησε ένα σχέδιο το οποίο είχε αρκετές κατασκευαστικές δυσκολίες. Αρχικά ανέλυσαν το σχέδιο σε διάστικτο χαρτί (Εικ. 4.31). Εντόπισαν το αρχικό πολύγωνο από το οποίο προέκυψε το πλακίδιο και τις τροποποιήσεις που υπέστη, δηλαδή τα κομμάτια που έπρεπε να προστεθούν και να αφαιρεθούν. Ανέλυσαν μαθηματικά το σχέδιο εντοπίζοντας τους μετασχηματισμούς που έπρεπε να χρησιμοποιήσουν για να το αναπαράγουν. Στην εικόνα 4.31 (δεξιά) τα βελάκια προσδιορίζουν τη διεύθυνση περιστροφής, ενώ με έντονο μολύβι οι μαθητές έχουν σημειώσει το σημείο περιστροφής.

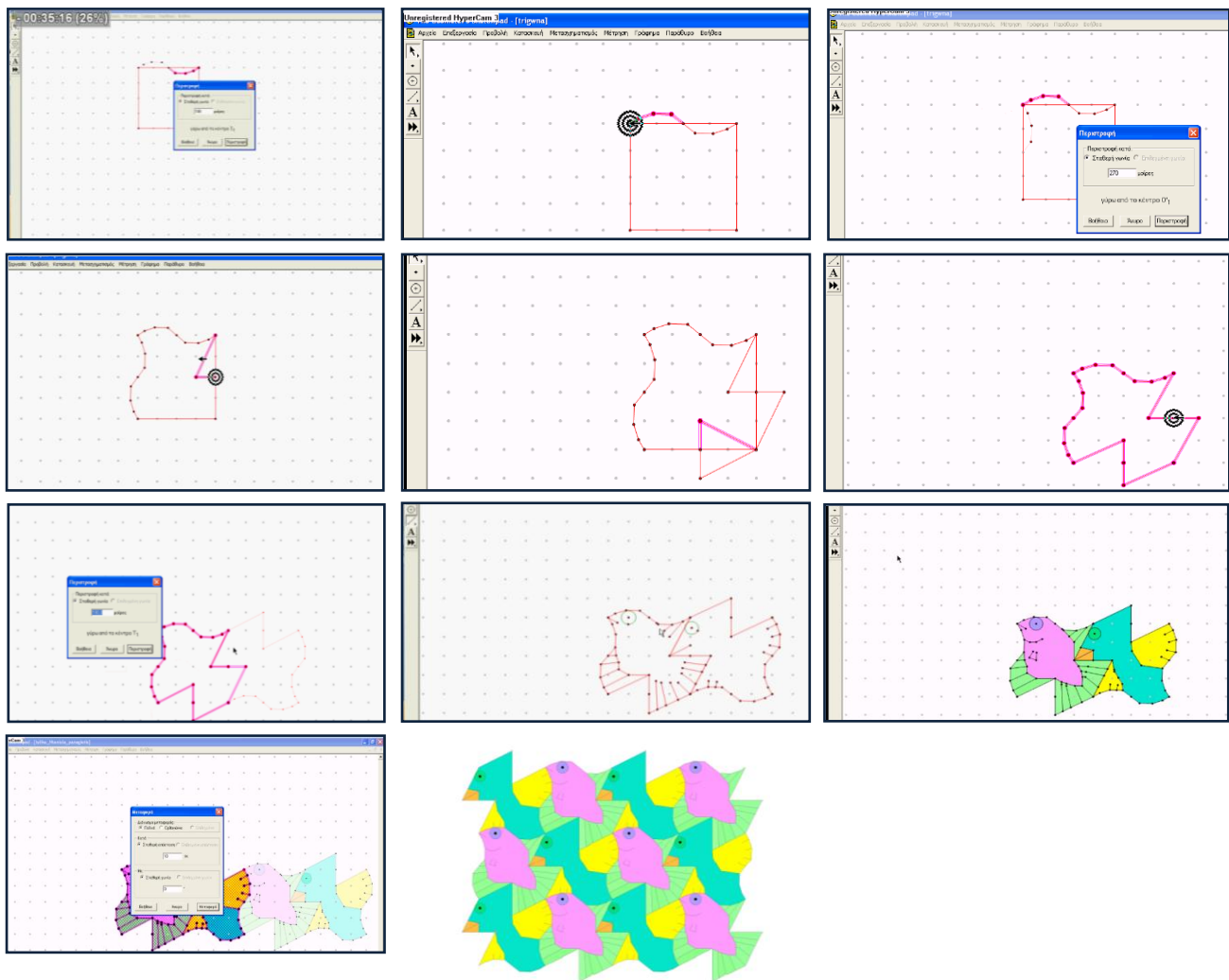


Εικόνα 4.31: Το πρότυπο σχέδιο (αριστερά) και το προσχέδιο (δεξιά) της ομάδας 2

Οι μαθητές ξεκίνησαν να κατασκευάζουν την καμπύλη εξοχή της επάνω πλευρά του τετραγώνου (Εικ. 4.32α). Στη συνέχεια με σημείο περιστροφής το μέσο της πλευράς περιέστρεψαν την καμπύλη κατά 180 μοίρες. Με παρόμοιο τρόπο δημιούργησαν τις καμπύλες της αριστερής και τα τρίγωνα της δεξιάς πλευράς. Οι μαθητές μετά από δοκιμές φάνηκε να αντιλαμβάνονται το εξής πρότυπο. Μια εξοχή κατά μήκους του μέσου μιας πλευράς μπορεί να προβληθεί αντεστραμμένη στο άλλο

μισό της, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού της περιστροφής, επιλέγοντας ως σημείο περιστροφής το μέσο της πλευράς και γωνία περιστροφής τις 180 μοίρες. Στη συνέχεια, γενίκευσαν αυτή την ιδέα και την εφάρμοσαν στα υπόλοιπα αντίστοιχα γεωμετρικά στοιχεία του σχήματος. Εκεί που δυσκολεύτηκαν οι μαθητές ήταν να δημιουργήσουν τα τρίγωνα της κάτω πλευράς. Μετά από δοκιμές με περιστροφή και μετάθεση της τριγωνικής εξοχής της δεξιάς πλευράς, αποφάσισαν να περιστρέψουν την εξοχή κατά 90 μοίρες και να ανακλάσουν το τρίγωνο που σχηματίστηκε με άξονα ανάκλασης την κάτω πλευρά (Εικ. 4.32ε). Στη συνέχεια την περιέστρεψαν κατά 180 μοίρες. Αφού δημιούργησαν το σχήμα που απεικονίζει το ψάρι το περιέστρεψαν κατά 180 μοίρες για να σχηματιστεί το πουλί. Σε αυτό το σημείο δυσκολεύτηκαν να επιλέξουν σημείο περιστροφής (Εικ.4.32,στ). Στο απόσπασμα που ακολουθεί συζητούν με την ερευνήτρια για το σημείο περιστροφής επάνω στο εκτυπωμένο σχέδιο.

- 58:00 [496] E Έχετε σκεφτεί πώς θα κουμπώσουν τα σχήματα μεταξύ τους;
(Συζητάμε παρατηρώντας το εκτυπωμένο πρότυπο σχέδιο)
- [497] M7 Ναι
- [498] E Πώς θα κουμπώσουν;
- [499] M7 Αυτό θα το... (Μου δείχνει με το χέρι του την περιστροφή)
- [500] E Θα το περιστρέψετε. Πώς θα το περιστρέψετε... Αυτό το
- [501] σημείο στο ψάρι που είναι στο πουλί. (Δείχνω το ψάρι και το πουλί στο εκτυπωμένο σχέδιο)
- [502] M3 Εδώ είναι η μύτη του (πρόκειται για το ίδιο σχέδιο αντεστραμμένο κατά 180 μοίρες)
- [503] E Σωστά, εδώ είναι η μύτη του (Αντιπαραβάλλει τη μύτη του ψαριού και την ουρά του πουλιού)
- [504] M3 Αυτό εάν το πιάσουμε...
- [505] E Από πού;
- [506] M3 Από εδώ (Δείχνει ένα σημείο περίπου κοντά στο μέσο της δεξιάς πλευράς)
- [507] E Από εδώ ή από εδώ;
- [508] M3 Από εδώ (Δείχνει τι σημείο στο μέσο της πλευράς)
- [509] E1 Αυτό το σημείο, ποιο είναι;
- [510] M3 Αυτό εδώ το σημείο είναι αυτό το σημείο
- [511] E Ναι, σε σχέση με το τετράγωνο. Αυτό το σημείο ποιο είναι σε
- [512] σχέση με την πλευρά; Αυτό εδώ το σημείο;
- [513] M3 Η μέση
- [514] E Η μέση. Δοκιμάστε λοιπόν να το περιστρέψετε από τη μέση της
- [515] πλευράς.



Εικόνα 4.32: Τα στάδια δημιουργίας του σχεδίου της ομάδας 1

Στο τέλος, αφού δημιούργησαν το ψάρι και το πουλί και μετά από πειραματισμούς με την περιστροφή, δημιούργησαν με μετάθεση την πλακόστρωσή τους (Εικ. 4.32ι).

Ο τρόπος που λειτούργησαν οι μαθητές της ομάδας 1 κατά τη δημιουργία του τελικού τους σχεδίου έδειξε μια κατανόηση στην τεχνική του Escher και στον τρόπο που έπρεπε να χρησιμοποιήσουν τους μετασχηματισμούς για να δημιουργήσουν το σχέδιό τους. Φάνηκε ότι οι μαθητές ήταν σε θέση να εφαρμόσουν αποτελεσματικά τους μετασχηματισμούς, αν και έκαναν κάποιες λανθασμένες δοκιμές κατά τη διάρκεια της κατασκευής του σχεδίου. Ο όλος τρόπος που δούλεψαν έδειξε μεθοδικότητα, εξέλιξη σε επίπεδο ανάλυσης, και ανάπτυξη στρατηγικών.

Συμπερασματικά, η προσέγγιση των μετασχηματισμών μέσα από τα έργα τέχνης μοιάζει να βοήθησε τους μαθητές να διαπραγματευτούν τις μαθηματικές ιδέες με ευχάριστο τρόπο. Η σύνδεση των σχεδίων με την καθημερινότητά διευκόλυνε στο

να κάνουν ανακλήσεις και να στηρίζουν τα επιχειρήματά τους. Η πορεία διερεύνησης των εννοιών μέσα από τα Ξυστά είχε αφετηρία τους μετασχηματισμούς ως πρακτική τέχνη και μετά ως μαθηματική έννοια. Η επαφή με τα έργα του Escher φάνηκε να προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών, καθώς δεν μετασχηματίζονται σχήματα αλλά διάφορες μορφές ανθρώπων ή ζώων. Τα έργα αυτά σε συνδυασμό με τη τεχνική του Escher μοιάζει να βοήθησαν στην νοηματοδότηση της μαθηματικής έννοιας των γεωμετρικών μετασχηματισμών. Η δημιουργία των δικών τους έργων έδειξε ότι οι μαθητές των δύο από τις τρεις ομάδες ήταν ικανοί να εφαρμόσουν τους μετασχηματισμούς και την τεχνική του Escher αναπτύσσοντας δεξιότητες επίλυσης προβλήματος.

Κεφάλαιο 5

Συζήτηση και συμπεράσματα

Στην παρούσα έρευνα διερευνήθηκε η εξέλιξη της σκέψης μιας ομάδας οχτώ μαθητών της Ε΄ και Στ΄ τάξης ενός δημοτικού σχολείου, αναφορικά με τους επίπεδους μετασχηματισμούς, παρατηρώντας τον τρόπο που εξελίχθηκε ο μαθηματικός τους λόγος. Επιπρόσθετα, διερευνήθηκε ο ρόλος των χειραπτικών και των ψηφιακών εργαλείων, σε αυτή την εξελικτική διαδικασία καθώς και ο ρόλος της τέχνης η οποία πλαισίωσε το σύνολο των δραστηριοτήτων. Το θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας αποτέλεσαν η Επικοινωνιογνωστική Προσέγγιση (Commoginition) και η Σημειωτική Διαμεσολάβηση (Semiotic Mediation). Η παρέμβαση στηρίχθηκε στο θεωρητικό παράδειγμα της έρευνας σχεδιασμού, διήρκησε 9 ώρες περίπου και πραγματοποιήθηκε σε τρεις μεγάλες φάσεις. Στην πρώτη φάση διερευνήθηκαν οι αρχικές ιδέες των μαθητών σχετικά με τους μετασχηματισμούς και η εξέλιξη του λόγου τους κατά την εμπλοκή τους με τη χρήση χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων. Στη δεύτερη φάση οι μαθητές ενεπλάκησαν σε δραστηριότητες που ως στόχο είχαν την περαιτέρω διερεύνηση των μετασχηματισμών. Ως πλαίσιο δραστηριοτήτων επιλέχθηκε ο Escher και η τεχνική κάλυψης του επιπέδου με τη χρήση μετασχηματισμών που χρησιμοποιούσε στα έργα του. Τέλος, στην τρίτη φάση οι μαθητές δημιούργησαν τα δικά τους σχέδια αξιοποιώντας τις ιδέες που ανέπτυξαν για τους μετασχηματισμούς κατά τη διάρκεια της παρέμβασης. Όλες οι δραστηριότητες επιλύθηκαν σε ομάδες δύο ή τριών ατόμων και ήταν σχεδιασμένες με τέτοιο τρόπο ώστε να ενθαρρύνουν την επικοινωνία μεταξύ των μαθητών. Ως ψηφιακό εργαλείο επιλέχθηκε το δυναμικό περιβάλλον του Geometer's Sketchpad.

Αναφορικά με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, σύμφωνα με τα ευρήματά μας ο λόγος των μαθητών και των τριών ομάδων φάνηκε να εξελίσσεται σε πιο μαθηματικοποιημένες εκδοχές. Η επικοινωνιογνωστική προσέγγιση αποτέλεσε ένα πλαίσιο βάσει του οποίου ερμηνεύσαμε την παραγωγή καινούριου λεξιλογίου, χειρονομιών και χρήσης οπτικών διαμεσολαβητών, καθώς οι μαθητές επικοινωνούσαν τις ιδέες τους για τους μετασχηματισμούς, ως αποτέλεσμα της δραστηριότητας που βασίστηκε στη χρήση των χειραπτικών και των ψηφιακών εργαλείων που εντάξαμε στην παρέμβαση.

Στην αρχή της παρέμβασης φάνηκε ότι η νοηματοδότηση από τους μαθητές του τρόπου δημιουργίας των επαναλαμβανόμενων προτύπων απείχε από τη δυναμική αντίληψη της μετακίνησης των σχημάτων, ενώ θα μπορούσε να χαρακτηριστεί στατική και χωρίς πολλές μαθηματικές αναφορές. Η εισαγωγή της δραστηριότητας το «Σπίτι και η σκιά του» και η χρήση των χειραπτικών υλικών, όπως το διάστικτο χαρτί, το διαφανές αντίγραφο του σπιτιού και οι βελόνες, επέφερε σταδιακά την παραγωγή λεξιλογίου που δήλωνε δυναμικότητα. Χρησιμοποιώντας τα εργαλεία για να δοκιμάσουν τις ιδέες τους ανέπτυξαν ατομικούς τρόπους έκφρασης, οι οποίοι συνδέονταν με το πλαίσιο της δραστηριότητας και τον τρόπο που ο καθένας τους αλληλεπιδρούσε με το χειραπτικό υλικό. Για παράδειγμα εάν κάποιος μαθητής επέλεγε να σύρει ή να αναποδογυρίσει το διαφανές αντίγραφο του σπιτιού

χρησιμοποιούσε τις λέξεις «σέρνω» ή «αναποδογυρίζω». Ή εάν υλοποιούσε με το δάχτυλο του ή με τη βελόνα το σημείο περιστροφής χρησιμοποιούσε τις φράσεις «κρατώ με το δάχτυλό μου» ή «τρυπώ με τη βελόνα». Αν και ο λόγος τους δεν ήταν απόλυτα μαθηματικός, ενείχε μαθηματικές ιδέες. Σε αυτή την αλλαγή στο λόγο τους, σε σχέση με την αρχή της παρέμβασης, σημαντικό ρόλο φάνηκε να έχει και η φύση της δραστηριότητας «Το σπίτι και η σκιά του». Στόχος της ήταν να βοηθήσει τους μαθητές να «επανακατασκευάσουν» (Κολέζα, 2009) την έννοια των μετασχηματισμών. Ο τρόπος που ήταν διατυπωμένη η ερώτηση, «Πώς θα μετακινούσατε το σπίτι, έτσι ώστε να πέσει ακριβώς πάνω στη σκιά του» καθοδήγησε τους μαθητές στην υιοθέτηση λεξιλογίου που αποτελούνταν από δυναμικά ρήματα και εκφράσεις που περιέγραφαν κινήσεις. Επίσης, η επισήμανση ότι οι ομάδες θα ανταλλάσαν περιγραφές ώθησε τους μαθητές να είναι ακριβείς στις περιγραφές τους. Θέλοντας να δώσουν σαφείς οδηγίες επικεντρώθηκαν, διαισθητικά, στις παραμέτρους των μετασχηματισμών όπως η απόσταση, η διεύθυνση, η γωνία περιστροφής κ.λ.π, καθώς φάνηκε να αντιλαμβάνονται ότι ο καθορισμός τους ήταν απαραίτητος για την ορθή περιγραφή των μετακινήσεων. Οι δυσκολίες που αντιμετώπιζαν στον τρόπο περιγραφής των μετακινήσεων τους οδηγούσε στην εύρεση εναλλακτικών λύσεων, στην αιτιολόγηση της σκέψης τους, στον αναστοχασμό επάνω στο λόγο που χρησιμοποιούσαν. Με αυτό τον τρόπο ενθαρρύνονταν η συζήτηση και η επικοινωνία.

Κατά τη εμπλοκή τους με τη χρήση του GSP ο λόγος των μαθητών εμπλουτίστηκε με τυπικούς μαθηματικούς όρους. Μιλούσαν για τους μετασχηματισμούς, αν και δεν φαίνεται να αντιλαμβάνονταν πλήρως τη μαθηματική τους διάσταση. Στην προσπάθειά τους να κατασκευάσουν τα σχέδια συζητούσαν για το είδος των μετασχηματισμών που έπρεπε να επιλέξουν και τις παραμέτρους τους. Τα εργαλεία του GSP βοηθούσαν τους μαθητές να εστιάζουν την προσοχή τους στις μαθηματικές συνιστώσες της διαδικασίας, καθώς η κατασκευή του σχεδίου απαιτούσε τόσο να επιλέξουν τον κατάλληλο μετασχηματισμό, όσο και τις παραμέτρους τους. Το πρόγραμμα προσέφερε τη δυνατότητα δυναμικής αλληλεπίδρασης των μαθητών με τα μαθηματικά αντικείμενα. Καθώς οι μαθητές επενέβαιναν στις παραμέτρους αντιλαμβάνονταν άμεσα την αλλαγή στον τρόπο μετακίνησης των αντικειμένων. Αυτή η δυνατότητα οδήγησε στην ανάπτυξη της στρατηγικής της δοκιμής και του λάθους, αφού έλεγχαν τις κινήσεις των σχημάτων αλλάζοντας κάθε φορά το μέτρο των παραμέτρων.

Ιδιαίτερη σημασία δώσαμε στις χειρονομίες που παρήγαγαν οι μαθητές καθώς επικοινωνούσαν τα μαθηματικά νοήματα για τους μετασχηματισμούς. Η δυναμική φύση των μετασχηματισμών από τη μια και τα ελλείμματα σε μαθηματικό λεξιλόγιο που δεν υποστήριζε τη μαθηματική επικοινωνία από την άλλη, ανάγκασε τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν το σώμα τους για να εκφραστούν. Αν και οι χειρονομίες δεν συμπεριλαμβάνονται ως χαρακτηριστικό του μαθηματικού λόγου από τη Sfard, εντούτοις διαπιστώσαμε ότι για τους μαθητές της έρευνάς μας λειτουργούσαν τόσο ως λέξεις όσο και ως οπτικοί διαμεσολαβητές, εκφράζοντας μαθηματικές ιδέες, όπως το είδος των μετασχηματισμών ή την έννοια της διεύθυνσης. Η εισαγωγή ενός νέου μέσου, όπως το GSP, φάνηκε ότι παρήγαγε νέους τρόπους επικοινωνίας. Οι

χειρονομίες που ήταν περισσότερο έντονες με τη χρήση χειραπτικού υλικού, μοιάζει να μειώθηκαν και να άλλαξαν κατά την εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες με το GSP, ίσως γιατί μέρος της ανάγκης για δυναμική έκφραση ικανοποιήθηκε από εργαλεία του προγράμματος, όπως αυτό της προεπισκόπησης.

Αναφορικά με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, η θεωρία της σημειωτικής διαμεσολάβησης προσέφερε ένα ερμηνευτικό πλαίσιο για να διερευνήσουμε τον τρόπο με τον οποίο τα εργαλεία διαμεσολάβησαν στην παραγωγή μαθηματικού νοήματος. Όπως διαπιστώθηκε από τον λόγο, συνολικά των μαθητών, τα εργαλεία συνέβαλαν στην παραγωγή σημείων και από τις τρεις κατηγορίες. Στα πρώτα στάδια της παρέμβασης η εμπλοκή των μαθητών με τη χρήση χειραπτικού υλικού ενθάρρυνε τη σημειωτική δραστηριότητα κυρίως με παραγωγή σημείων που συνδέονταν με τα εργαλεία (artifact signs). Η εισαγωγή του GSP, φάνηκε να επηρέασε την αλληλεπίδραση των συμμετεχόντων. Ο λόγος των μαθητών ανέδειξε μια εξέλιξη των σημείων που συνδέονταν με τα εργαλεία και τα αντικείμενα στο περιβάλλον του προγράμματος άλλοτε σε ενδιάμεσα σημεία (pivot signs) και άλλοτε σε μαθηματικά (mathematical signs). Σε αυτό βοήθησαν οι λειτουργίες του προγράμματος, όπως οι εντολές των μετασχηματισμών, η προεπισκόπηση και τα παλλόμενα γραφικά. Ωστόσο, δεν θα μπορούσαμε να πούμε ότι δεν υπήρχαν και σημεία που συνδέονταν στενά με το ψηφιακό εργαλείο. Τα σημεία αυτά εξελίσσονταν άλλοτε σε μαθηματικά και άλλοτε σε ενδιάμεσα ανάλογα με το πόσο σταθερή ήταν η νοηματοδότηση των μαθητών για τις μαθηματικές έννοιες των μετασχηματισμών. Για παράδειγμα παρατηρήθηκε ότι στο λόγο τους οι μαθητές της ομάδας 2 χρησιμοποιούσαν τότε τον όρο «γραμμή» και τότε το όρο «άξονας ανάκλασης» για να περιγράψουν την παράμετρο της ανάκλασης. Όπως επίσης και για το σημείο περιστροφής χρησιμοποιούσαν τότε τους όρους «τελίτσα» ή «κουκκίδα» και τότε «σημείο περιστροφής». Δηλαδή, αφενός οι μαθητές φαίνεται να αντιλαμβάνονται γραμμές και τελείες. Αφετέρου μοιάζει να εντοπίζουν τη σύνδεση αυτών των αντικειμένων με τις θεωρητικές έννοιες των παραμέτρων. Η εναλλαγή των όρων και η συνεχής αναδιατύπωση υποδηλώνει ότι αν και οι λέξεις αυτές αποτελούσαν σημεία που ήταν μαθηματικοποιημένα, δεν είχαν χάσει τη σύνδεση με τα εργαλεία από τα οποία προέρχονταν. Συνεπώς, θα μπορούσαμε να τα χαρακτηρίσουμε ενδιάμεσα σημεία.

Η τέχνη ως πλαίσιο φάνηκε να βοήθησε τους μαθητές, σε όλες τις ομάδες, να νοηματοδοτήσουν τις μαθηματικές έννοιες. Η πορεία διερεύνησης των μετασχηματισμών μέσα από τη τέχνη των Ξυστών αποσκοπούσε στην προσέγγιση τους πρώτα ως πρακτική τέχνη και στη συνέχεια ως μαθηματική έννοια. Οι μαθητές συνέδεσαν σχέδια σε μοτίβα των Ξυστών με την καθημερινότητά τους, γεγονός που τους βοηθούσε να κάνουν ανακλήσεις και να στηρίζουν τα επιχειρήματά τους. Επιπρόσθετα, η επαφή με τα έργα του Escher φάνηκε να προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών, καθώς τα σχήματα πήραν τη μορφή ανθρώπων ή ζώων, διεγείροντας το αισθητικό κριτήριο τους. Μοιάζει οι μορφές αυτές, που ήταν οικείες στους μαθητές και συνδέονταν με τον πραγματικό κόσμο (για παράδειγμα ένα ψάρι ή ένα πουλί), να διευκόλυναν τη δημιουργία συνδέσεων με τις μαθηματικές έννοιες. Για παράδειγμα μια ομάδα μαθητών που δεν μπορούσαν να θυμηθούν τον όρο περιστροφή

ανακάλεσαν το έργο Clown, που απεικονίζει μοτίβα με τη μορφή κλόουν να δημιουργούν πλακόστρωση μέσω περιστροφής, προκειμένου να δηλώσουν την επιλογή του συγκεκριμένου μετασχηματισμού για τη δημιουργία ψηφιδωτού. Επιπρόσθετα, η ένταξη της τεχνικής του Escher στη διερεύνηση των μετασχηματισμών αποτέλεσε μια διαδικασία που εκλήφθηκε θετικά από τους μαθητές, παρά το γεγονός ότι τους δυσκόλεψε. Αν και ο φαινομενικός στόχος ήταν η δημιουργία ψηφιδωτών και σε αυτό επικεντρώθηκαν οι μαθητές, στην ουσία αποτέλεσε το πλαίσιο εμβάθυνσης στις μαθηματικές έννοιες των μετασχηματισμών. Η δημιουργία έργων από τους ίδιους τους μαθητές έδειξε ότι οι δύο από τις τρεις ομάδες μπόρεσαν να εφαρμόσουν τους μετασχηματισμούς και την τεχνική του Escher. Ειδικότερα οι μαθητές της ομάδας 1 κατάφεραν να αναπτύξουν δεξιότητες επίλυσης προβλήματος, καθώς ανέλυσαν μαθηματικά το σχέδιο και ανέπτυξαν κατάλληλες στρατηγικές ώστε να το κατασκευάσουν.

Ο ρόλος της ερευνητριας-εκπαιδευτικού σε όλη αυτή τη διαδικασία θα μπορούσε να προσεγγιστεί βάσει και των δύο ερμηνευτικών πλαισίων. Με όρους επικοινωνιογνωστικής προσέγγισης, ο τρόπος που αντιλαμβανόταν την επικοινωνία μέσα στην τάξη οδηγούσε σε αποφάσεις που άλλαζαν την πορεία της παρέμβασης. Για παράδειγμα η δραστηριότητα το «Σπίτι και η σκιά του» δεν ήταν στον αρχικό σχεδιασμό. Σχεδιάστηκε και εντάχθηκε στην παρέμβαση εκ των υστέρων βάσει των δεδομένων από τη δραστηριότητα της προηγούμενης συνάντησης. Ακόμη, η ερευνήτρια προσπαθούσε να βοηθήσει τους μαθητές να ανακατασκευάσουν τη σύνδεση μεταξύ των μαθηματικών εννοιών, να χρησιμοποιήσουν περισσότερο μαθηματικοποιημένο λόγο και να εξελίσσουν την άτυπη γνώση τους και τις προσωπικές τους ιδέες σε μαθηματικές έννοιες (Κολέζα, 2009). Για παράδειγμα επαναλάμβανε τα νοήματα των μαθητών χρησιμοποιώντας μαθηματικούς όρους, ανέλυε και συχνά οπτικοποιούσε το λόγο τους με χρήση χειρονομιών ή διαγραμμάτων. Με όρους σημειωτικής διαμεσολάβησης, λειτουργούσε ως διαμεσολαβήτρια μεταξύ των εργαλείων που εισήγαγε κάθε φορά στην τάξη και του μαθηματικού νοήματος που έπρεπε να δομήσουν οι μαθητές. Προσπαθούσε να βοηθήσει στην αποσύνδεση των σημείων από τα εργαλεία και στην εξέλιξή τους σε μαθηματικά. Για παράδειγμα, επαναλάμβανε τον προσωπικό, άτυπο λόγο των μαθητών αντικαθιστώντας τον με μαθηματικούς όρους και ενθάρρυνε τους μαθητές να αιτιολογούν κάθε φορά τις επιλογές τους. Φρόντιζε οι μαθητές να λειτουργούν και σε μεταγνωστικό επίπεδο, αφού ανέλυε το λόγο τους συζητώντας μαζί τους τα νοήματα που εμπεριείχε.

Ο λόγος των μαθητών στις μικρές ηλικίες είναι κυρίως προσωπικός, καθώς τα παιδιά δεν έχουν πλούσιο μαθηματικό λεξιλόγιο. Ωστόσο, κάτι που εκφράζει προσωπικά νοήματα για τα παιδιά μπορεί να είναι ισχυρά μαθηματικό για τη δική τους εμπειρία. Ο τρόπος που οι μαθητές της παρέμβασης νοηματοδότησαν τους μετασχηματισμούς μοιάζει να συνάδει με αυτή την άποψη. Η μη ύπαρξη μαθηματικού λόγου, κατά την επικοινωνιακή προσέγγιση ή πολλών μαθηματικών σημείων, κατά τη σημειωτική διαμεσολάβηση δεν αποκλείει την ανάπτυξη μαθηματικών νοημάτων. Οι μαθητές της παρέμβασης θεωρούμε ότι ανέπτυξαν

μαθηματικά νοήματα για τους μετασχηματισμούς, καθώς ο λόγος τους περιελάμβανε λεξιλόγιο, έστω και μη μαθηματικό, που περιέγραφε σωστά τους μετασχηματισμούς και τις παραμέτρους τους. Για παράδειγμα η φράση «μετακινώ το σπίτι προς τα αριστερά 10 κουκκίδες» αποτελεί σαφή αναφορά στον μετασχηματισμό της μετάθεσης και προσδιορίζει τις δύο παραμέτρους της. Την διεύθυνση και την απόσταση. Η φράση «κρατώντας με το δάχτυλό μου τη γωνία του σπιτιού θα το γυρίσω έτσι ώστε η σκεπή του να είναι προς τα κάτω» αποτελεί αναφορά στον μετασχηματισμό της περιστροφής και στις παραμέτρους της, το σημείο περιστροφής και τη γωνία περιστροφής. Με την παραπάνω άποψη συνηγορεί και η χρήση των οπτικών διαμεσολαβητών όπως το χάρτινο ρολόι, οι χειρονομίες και η παραγωγή διαγραμμάτων που λειτούργησαν αποτελεσματικά για την επίλυση των δραστηριοτήτων.

Στην παρούσα έρευνα συνδυάσαμε δύο περιοχές: αυτή της τέχνης και των ψηφιακών εργαλείων. Παρόλο που σε διάφορες έρευνες έχουν μελετηθεί ξεχωριστά ή αναφέρονται σε μαθητές μεγαλύτερης ηλικίας στην παρούσα έρευνα έγινε ένας συνδυασμός τους που μοιάζει να είναι παραγωγικός για τη νοηματοδότηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών στις μικρές ηλικίες. Ως παράδειγμα φέρνουμε την ομάδα 1 που φάνηκε να αντιμετωπίζει αποτελεσματικά τις μαθησιακές προκλήσεις της παρέμβασης, επιδεικνύοντας στο τέλος δημιουργικότητα στη μαθηματική σκέψη που οδήγησε στη δημιουργία ενός αισθητικά όμορφου προϊόντος τέχνης με τη βοήθεια του δυναμικού εργαλείου GSP. Οι μαθητές χρησιμοποίησαν αποτελεσματικά ένα τεχνολογικό εργαλείο για να διερευνήσουν τις μαθηματικές ιδέες των μετασχηματισμών και να δημιουργήσουν ένα προϊόν τέχνης. Μέσα από αυτή τη διαδικασία αναδύθηκαν μαθηματικά νοήματα, όπως η σχέση του τρόπου που είναι σχεδιασμένα τα γεωμετρικά στοιχεία ενός σχήματος με τον μετασχηματισμό που θα πρέπει να επιλεγεί για να κατασκευαστούν. Για παράδειγμα, μια καμπύλη σχεδιασμένη κατά μήκος του μέσου μιας πλευράς μπορεί να προβληθεί αντεστραμμένη στο άλλο μισό της, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού της περιστροφής, επιλέγοντας ως σημείο περιστροφής το μέσο της πλευράς και γωνία περιστροφής τις 180 μοίρες. Η ιδέα αυτή που ήταν αρχικά αποτέλεσμα δοκιμής και λάθους γενικεύτηκε και οι μαθητές την εφάρμοζαν απευθείας σε ανάλογες περιπτώσεις.

Συμπερασματικά, η έρευνα έχει δείξει ότι οι μετασχηματισμοί αποτελούν ένα σημαντικό κομμάτι της γεωμετρίας. Είναι πλούσιοι από εννοιολογική σκοπιά και καλλιεργούν σημαντικές ικανότητες όπως η ικανότητα νοερής περιστροφής και η ικανότητα επίλυσης προβλήματος (Bruse & Hawes, 2015; Sinclair, 2015). Τα ευρήματα της έρευνας επιβεβαιώνουν ότι οι μαθητές του δημοτικού μέσα από κατάλληλα εργαλεία και δραστηριότητες μπορούν να έχουν πλούσιες νοηματοδοτήσεις για τους μετασχηματισμούς και να αναπτύξουν δεξιότητες όπως αυτές που αναφέρθηκαν παραπάνω. Συνεπώς, έχει νόημα να ενσωματωθούν στο αναλυτικό πρόγραμμα, με τρόπο που θα περιλαμβάνει δυναμικά εργαλεία που θα ενθαρρύνουν τη διερεύνηση της δυναμικής φύσης των εννοιών αυτών. Η τέχνη φαίνεται να αποτελεί ένα κατάλληλο πλαίσιο νοηματοδότησης, ενώ τα δυναμικά

εργαλεία, όπως το GSP, εξυπηρετούν τη διερεύνηση της δυναμικής διάστασης των μετασχηματισμών. Τέλος, η έρευνά μας αναδεικνύει σημαντικό τον συνδυασμό των ψηφιακών εργαλείων με τα χειραπτικά, καθώς τα τελευταία επιτρέπουν τη σωματοποιημένη έκφραση των μαθηματικών νοημάτων που τόσο έχουν ανάγκη οι μαθητές των μικρών ηλικιών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξενόγλωσση

- Bachmeier, E. E. (2016). *Tessellations: an artistic and mathematical look at the work of Maurits Cornelis Escher* (Honors Program Theses). University of Northern Iowa, Iowa. Retrieved from <http://scholarworks.uni.edu/hpt/204>
- Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education*, second revised edition (pp. 746-783). Mahwah: Lawrence Erlbaum. Retrieved from http://www.cfem.asso.fr/actualites/archives/bartolini-mariotti_handbook
- Bruce, C. D., & Hawes, Z. (2015). The role of 2D and 3D mental rotation in mathematics for young children: what is it? Why does it matter? And what can we do about it? *ZDM*, 47(3), 331-343. doi:10.1007/s11858-014-0637-4
- Callingham, R. (2004). *Primary Students' Understanding of Tessellation: An Initial Exploration*. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen. Retrieved from http://emis.ams.org/proceedings/PME28/RR/RR172_Callingham.pdf
- Chanan, S. (2001). *The Geometer's Sketchpad*. Οδηγός Εκμάθησης. Emeryville: Key Curriculum Press. Ανακτήθηκε από <http://users.sch.gr>.
- Clements, D., & Battista, M. (1994). Computer environments for learning geometry. *Journal of Educational Computing*, 10(2), 173-197. doi: 10.2190/8074-298
- Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher*, 32(1), 9-13. doi:10.3102/0013189X032001009
- Coen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2008). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*. Αθήνα: Μεταίχμιο.
- Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *The Journal of the learning sciences*, 13(1), 15-42. doi:10.1207/s15327809jls1301_2
- Design-Based Research Collective. (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, 32(1), 5-8. doi: 10.3102/0013189X032001005
- Eberle, R. S. (2014). The role of children's mathematical aesthetics: The case of tessellations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 35, 129-143. doi:10.1016/j.jmathb.2014.07.004
- Ernest, J. B., & Nemirovsky, R. (2016). Arguments for Integrating the Arts: Artistic Engagement in an Undergraduate Foundations of Geometry Course. *PRIMUS*, 26(4), 356-370. doi:10.1080/10511970.2015.1123784
- Finzer, W., Rothenbuhler, A. & Shein, L. (2000). *The Geometer's Sketchpad*. Οδηγός Χρήσης (μτφ. Πληροφορική Τεχνογνωσία Ε.Π.Ε.). Αθήνα: Καστανιώτη. (έτος έκδοσης πρωτοτύπου 1996). Ανακτήθηκε από <http://users.sch.gr>
- Ford, M. S., & Gold, S. (2008). Connecting Mathematics and the Arts through the Magic of Escher for Elementary School Students. In *Bridges Leeuwarden: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture* (pp. 347-352). Tarquin Publications. Retrieved from <http://archive.bridgesmathart.org>

- Goldin-Meadow, S., Nusbaum, H., Kelly, S. D., & Wagner, S. (2001). Explaining math: Gesturing lightens the load. *Psychological Science*, 12(6), 516-522. doi: 10.1111/1467-9280.00395
- Goodell, J. E. (2006). Using critical incident reflections: A self-study as a mathematics teacher educator. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(3), 221-248. doi:10.1007/s10857-006-9001-0
- Harris, A. (2000). *The mathematics of Tessellation*. Carlisle, St Martin's College. Retrieved from <http://ictedusrv.cumbria.ac.uk/maths/pgdl/unit9/Tessellation.pdf>
- Healy, L., & Sinclair, N. (2007). If this is our mathematics, what are our stories?. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 12(1), 3-21. doi: 10.1007/s10758-006-9109-4
- Hollebrands, K. 2003. High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *Journal of Mathematical Behavior*, 22: 55_72. doi:10.1016/S0732-3123(03)00004-X
- Hollebrands, K. F. (2004). High school students' intuitive understandings of geometric transformations. *The Mathematics Teacher*, 97(3), 207-214. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/20871559>
- Hollebrands, K. F., & Lee, H. S. (2016). Characterizing questions and their focus when pre-service teachers implement dynamic geometry tasks. *The Journal of Mathematical Behavior*, 43, 148-164. doi:10.1016/j.jmathb.2016.07.004
- Jackiw, N., & Sinclair, N. (2009). Sounds and pictures: Dynamism and dualism in dynamic geometry. *ZDM*, 41(4), 413-426. doi: 10.1007/s11858-009-0196-2
- Kaplan, C. S., & Salesin, D. H. (2000, July). Escherization. In *Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (pp. 499-510). ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co. doi:10.1145/344779.345022
- Laborde, C. (2001). Intergration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 283-317. doi: 10.1023/A:1013309728825
- McNeill, D. (1992). *Hand and mind: What gestures reveal about thought*. University of Chicago press.
- Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational studies in mathematics*, 44(1), 25-53. doi:10.1023/A:1012733122556
- Mariotti, M. A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: the role of the teacher. *ZDM*, 41(4), 427-440. doi:10.1007/s11858-009-0199-z
- Martin, G. E. (1982). *Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry*. New York: Springer-Verlag.
- Mitchelmore, M. C. (1998). Young Students' Concepts of Turning and Angle. *Cognition and Instruction*, 16(3), 265-284. doi:10.1207/s1532690xc1603_2
- Nardi, E., Ryve, A., Stadler, E., & Viirman, O. (2014). Commognitive analyses of the learning and teaching of mathematics at university level: the case of discursive shifts in the study of Calculus. *Research in Mathematics Education*, 16(2), 182-198. doi:10.1080/14794802.2014.918338
- Ng, O. L., & Sinclair, N. (2015). Young children reasoning about symmetry in a dynamic geometry environment. *ZDM*, 47(3), 421-434. doi:org/10.1007/s11858-014-0660-5

- Panaoura, A., Elia, I., Stamboulides, N., & Spyrou, P. (2009). Students 'structure for the understanding of the axis of reflective symmetry in mathematics. *Acta Didactica Universitatis Comenianae. Mathematics*, 9, 41-62. Retrieved from https://www.ddm.fmph.uniba.sk/ADUC/files/Issue9/04-Panoura_et_all.pdf
- Prediger, S., Gravemeijer, K., & Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: an overview on achievements and challenges. *ZDM*, 47(6), 877-891. doi:10.1007/s11858-015-0722-3
- Russell, J., & Zembylas, M. (2007). Arts integration in the curriculum: A review of research and implications for teaching and learning. In *International handbook of research in arts education* (pp. 287-312). Springer Netherlands. doi:10.1007/978-1-4020-3052-9_18
- Stathopoulou, C. (2007). Traditional patterns in Pyrgi of Chios: mathematics and community. In *Nexus Network Journal* (pp. 103-117). Birkhäuser Basel. doi:10.1007/S00004-006-0032-8
- Schultz, K. A., & Austin, J. D. (1983). Directional effects in transformation tasks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 95-101. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/748577>
- Shaffer, D. W. (1997). Learning mathematics through design: The anatomy of Escher's World. *The Journal of Mathematical Behavior*, 16(2), 95-112. doi:10.1016/S0732-3123(97)90019-5
- Sfard, A., & Kieran, C. (2001). Cognition as communication: Rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture, and Activity*, 8(1), 42-76. doi:10.1207/S15327884MCA0801_04
- Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the Learning Sciences*, 16(4), 565-613. doi:10.1080/10508400701525253
- Sfard, A. (2008). Introduction to Thinking as communicating. *The Mathematics Enthusiast*, 5(2), 429-436. Available at: <https://scholarworks.umt.edu/tme/vol5/iss2/24>
- Sfard, A. (2009a). What's all the fuss about gestures? A commentary. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 191-200. doi:10.1007/s10649-008-9161-1
- Sfard, A. (2009b, November). Moving Between Discourses: From Learning-As-Acquisition To Learning-As-Participation. In *AIP Conference proceedings* (Vol. 1179, No. 1, pp. 55-58). AIP. doi:10.1063/1.3266753
- Sinclair, N. (2002). The kissing triangles: The aesthetics of mathematical discovery. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(1), 45-63. doi:10.1023/A:1016021912539
- Sinclair, N., & Yurita, V. (2008). To be or to become: How dynamic geometry changes discourse. *Research in Mathematics Education*, 10(2), 135-150. doi: 10.1080/14794800802233670
- Sinclair, N., & Moss, J. (2012). The more it changes, the more it becomes the same: The development of the routine of shape identification in dynamic geometry environment. *International Journal of Educational Research*, 51, 28-44. doi:10.1016/j.ijer.2011.12.009
- Sinclair, N., & Bruce, C. D. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. *ZDM*, 47(3), 319-329. doi: 10.1007/s11858-015-0693-4

- Stylianou, D. A., & Grzegorzczak, I. (2005). Symmetry in mathematics in art: an exploration of an art venue for mathematics learning. *Primus*, 15(1), 30-44. doi:10.1080/10511970508984104
- Swoboda, E., & Vighi, P. (2016). Early geometrical thinking in the environment of patterns, mosaics and isometries. In *Early Geometrical Thinking in the Environment of Patterns, Mosaics and Isometries* (pp. 1-50). Springer International Publishing. Retrieved from https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-44272-3_1
- Tatar, E., Akkaya, A., & Kağızmanlı, T. B. (2014). Using dynamic software in mathematics: The case of reflection symmetry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(7), 980-995. doi: 10.1080/0020739X.2014.902129
- Van de Walle, J. A. (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια Εξελικτική Διδασκαλία*. Επιμέλεια: Τριανταφυλλίδης, Τ. Αθήνα: Τυπωθήτω-Γιώργος Δάρδανος.
- Xistouri, X. and Pitta-Pantazi, D. (2011). *A theoretical model for understanding the ability of geometric transformations in elementary school: the case of reflection*. Proceedings of the Fourth Conference of the Union of Researchers in Mathematics Education. Ioannina, Greece: ENEDIM. Retrieved from <http://www.ucy.ac.cy/transformations/publications>

Ελληνόγλωσση

- Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών. (2000). *The Geometer's Sketchpad: Οδηγός Χρήσης*. Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών. Ανακτήθηκε από users.sch.gr/nikbalki/files/Sketchpad.pdf
- Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και Πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών*. Αθήνα: Τόπος.
- Μήτσης, Σπ. Ν. (2007). *Η διδασκαλία της γλώσσας υπό το πρίσμα της επικοινωνιακής προσέγγισης*. Αθήνα: Gutenberg.
- ΥΠΕΠΘ. *Μαθαίνοντας Γεωμετρία με το Geometer's Sketchpad*. Βιβλίο μαθητή (μτφ ΥΠΕΠΘ). Emeryville: Key Curriculum Press. Ανακτήθηκε από <http://users.sch.gr>
- Χασάπης, Δ. (2015). *Ζωγραφίζω όπως ο Έσερ και μαθαίνω για τη γεωμετρία*. Αθήνα: Μεταίχμιο.

Διαδικτυακές Πηγές

- Gallery M.C. Escher. (n.d.). Retrieved October 5, 2016, from M.C. Escher, The Official website, <http://www.mcescher.com/>
- Math Games for Kids. Transformation Game for Kids. (n.d.). Retrieved October 26, 2016, from Science Kids. Fun Science & Technology for Kids, <http://www.sciencekids.co.nz/gamesactivities/math/transformation.html>

EPT A.E. (Παραγωγή) & Χούρσογλου, Π. (Σκηνοθεσία). (2011). *Συνάντησα κι Ευτυχισμένους Μαστόρους. Επ.ΙΙ. Τα Ξυστά στο Πυργί της Χίου* [Αρχείο Βίντεο]. Ελλάδα. Ανακτήθηκε από <http://www.sciencekids.co.nz/gamesactivities/math/transformation.html>

ΕΥΡΕΤΗΡΙΑ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 3.1: Οι εντολές των μετασχηματισμών στο GSP.....	24
Εικόνα 3.2: Η επιλογή της γωνίας περιστροφής	24
Εικόνα 3.3: Η επιλογή του σημείου περιστροφής.....	24
Εικόνα 3.4: Η επιλογή του άξονα ανάκλασης.....	24
Εικόνα 3.5: Η επιλογή των πολικών συντεταγμένων στη μετάθεση.....	24
Εικόνα 3.6: Τοιχοποιία κτηρίου στο χωριό Πυργί.....	26
Εικόνα 3.7: Το σπίτι και η σκιά του.....	27
Εικόνα 3.8: Η δραστηριότητα με τα μοτίβα των ξυστών στο GSP.....	28
Εικόνα 3.9: Το χάρτινο ρολόι.....	28
Εικόνα 3.10: Τα έργα του Escher	30
Εικόνα 3.11: Τα τέσσερα ζευγάρια πλακιδίων.....	31
Εικόνα 4.1: Ο M1 δείχνει ένα μοτίβο στην εικόνα με τα Ξυστά.....	36
Εικόνα 4.2: Μοτίβο σε τοίχο στο Πυργί.....	37
Εικόνα 4.3: Χρήση χειρονομιών από την ερευνήτρια.....	37
Εικόνα 4.4: Χρήση χειρονομιών για τον προσδιορισμό της διεύθυνσης.....	39
Εικόνα 4.5: Η εικόνα της δραστηριότητας 1.....	40
Εικόνα 4.6: Η δραστηριότητα «το σπίτι και η σκιά του.....	43
Εικόνα 4.7: Αυθόρμητοι τρόποι διαχείρισης των δυναμικών κινήσεων του σπιτιού στην ομάδα 1.....	43
Εικόνα 4.8: Αυθόρμητοι τρόποι διαχείρισης των δυναμικών κινήσεων του σπιτιού στην ομάδα 3.....	44
Εικόνα 4.9: Τρόποι χρήσης του διαφανούς αντιγράφου.....	44
Εικόνα 4.10: Η εικόνα με μοτίβα που επικολλήθηκε στο περιβάλλον GSP.....	54
Εικόνα 4.11: Η λειτουργία της προεπισκόπησης.....	58
Εικόνα 4.12: Υπολογισμός της γωνία περιστροφής με το «χάρτινο ρολόι».....	61
Εικόνα 3.13: Περιστροφή του κόκκινου τρίγωνο επάνω στο πράσινο	61
Εικόνα 4.14: Υπολογισμός της γωνίας με το «χάρτινο ρολόι»	61
Εικόνα 4.15: Περιστροφή του κόκκινου τριγώνου επάνω στο πράσινο	61
Εικόνα 4.16: Δοκιμές κατά τη διερεύνηση των πλακοστρώσεων με την τεχνική του Escher.....	63
Εικόνα 4.17: Δοκιμές κατά τη διερεύνηση των πλακοστρώσεων με την τεχνική του Escher.....	63
Εικόνα 4.18: Διερεύνηση των ιδεών για τη δημιουργία σχεδίων.....	63
Εικόνα 4.19: Διερεύνηση των μετασχηματισμών στο περιβάλλον GSP.....	71
Εικόνα 4.20: Διερεύνηση των μετασχηματισμών στο περιβάλλον GSP.....	72
Εικόνα 4.21: Παλλόμενα γραφικά στο πρόγραμμα επισημαίνουν το σημείο περιστροφής και τον άξονα ανάκλασης.....	73
Εικόνα 4.22: Επιλογή γωνίας περιστροφής με τη βοήθεια της προεπισκόπησης.....	74
Εικόνα 4.23: Ροζέτα σε τοιχοποιία στο Πυργί	77
Εικόνα 4.24: Μοτίβο σε τοιχοποιία στο Πυργί.....	77
Εικόνα 4.25: Το μοτίβο που περιέγραψαν ο M4 και η M3.....	78
Εικόνα 4.26: Το μοτίβο που περιέγραψε η M3.....	78
Εικόνα 4.27: Οι μαθητές εντοπίζουν τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς στα έργα του Escher.....	80
Εικόνα 4.28: Αναλογίες μεταξύ του τρόπου που θα μετασχηματιστεί το σχήμα (αριστερά) και του έργου του Escher, Clowns (δεξιά)	81
Εικόνα 4.29: Τα τελικά σχέδια των μαθητών.....	83
Εικόνα 4.30: Το σχέδιο της ομάδας 2 σε ένα από τα στάδια κατασκευής του	84

Εικόνα 4.31: Το πρότυπο σχέδιο (αριστερά) και το προσχέδιο (δεξιά) της ομάδας 2.....	84
Εικόνα 4.32: Τα στάδια δημιουργίας του σχεδίου της ομάδας 1.....	86

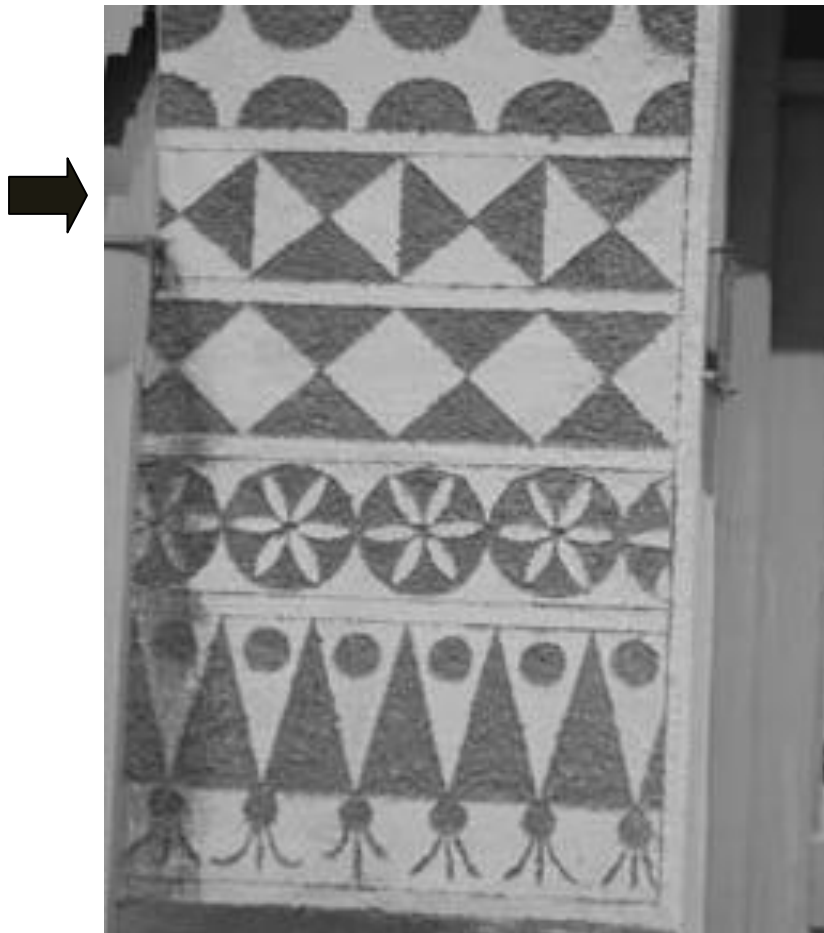
ΕΥΡΕΤΗΡΙΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 4.1: Σημεία που εντοπίστηκαν στο λόγο των μαθητών στη δραστηριότητα «Το σπίτι και η σκιά του».....	70
Πίνακας 4.2:Σημεία που εντοπίστηκαν στην εξέλιξη του λόγου των μαθητών κατά τη διάρκεια της παρέμβασης.....	76

Παράρτημα

Φύλλο εργασίας 1

Η παρακάτω φωτογραφία αποτελεί τμήμα ενός τοίχου σε κτήριο που βρίσκεται στο χωριό Πυργί της Χίου.



Α) Στη φωτογραφία βλέπετε σειρές από επαναλαμβανόμενα σχέδια. Παρατηρήστε τη σειρά που δείχνει το βελάκι. Ποιο ή ποια είναι τα σχήματα που επαναλαμβάνονται;

.....

.....

.....

Β) Προς ποια κατεύθυνση κινούνται τα σχέδια που επαναλαμβάνονται; Μπορείτε να τη σχεδιάσετε επάνω στη φωτογραφία;

.....
.....

Γ) Περιγράψτε γραπτώς τις κινήσεις που πρέπει να κάνουν τα σχήματα που επαναλαμβάνονται, για να δημιουργήσουν το συγκεκριμένο γεωμετρικό σχέδιο (για να βοηθηθείτε, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε διαφανές χαρτί):

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Φύλλο εργασίας 2

Το σπίτι και η σκιά του

Πώς θα μετακινούσατε το σπίτι, έτσι ώστε να πέσει ακριβώς πάνω στη σκιά του; Εξηγήστε γραπτώς και με ακρίβεια τον τρόπο που θα το κάνατε. Δώστε τις οδηγίες στη διπλανή σας ομάδα, ώστε εάν τις ακολουθήσει να καταφέρει να μετακινήσει με τον ίδιο ακριβώς τρόπο το σπίτι πάνω στη σκιά του.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

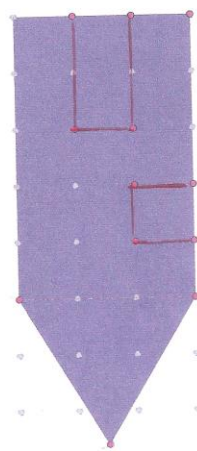
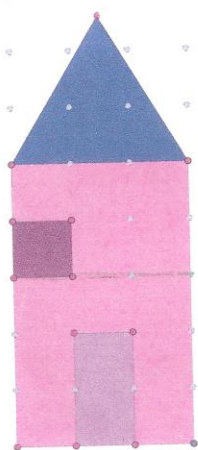
.....

.....

.....

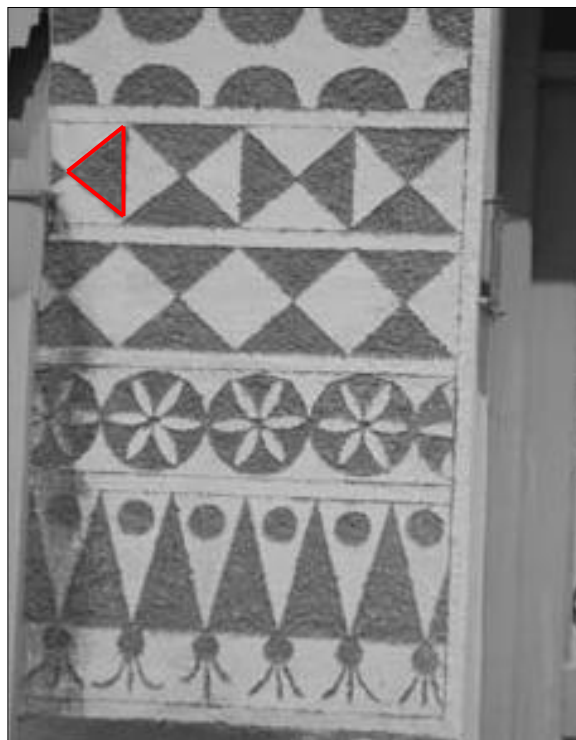
.....

Ninos-Vav'sha



Φύλλο Εργασίας 3

Περιγράψτε τις μετακινήσεις (μετασχηματισμούς) που θα κάνετε στο τρίγωνο, για να κατασκευάσετε το μοτίβο της εικόνας, χρησιμοποιώντας τις εντολές μετασχηματισμών του προγράμματος Geometer Sketchpad.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

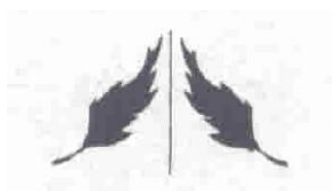
Geometers's Sketchpad (GSP): Οδηγός εντολών για τους μετασχηματισμούς

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να μετακινήσεις ένα σχήμα στο επίπεδο. Τρεις από αυτούς είναι η **μετάθεση** ή **μεταφορά**, η **περιστροφή** και το **καθρέφτισμα** (ανάκλαση).

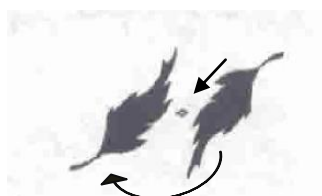
- Όταν **μεταθέτω** ένα σχήμα πρέπει να αποφασίσω προς τα πού θα το μετακινήσω (αριστερά, δεξιά, πάνω, κάτω, πλάγια κ.λ.π.) και πόσο θα το μετακινήσω (την απόσταση που θα το μετακινήσω). Πρέπει, δηλαδή, να αποφασίσω την κατεύθυνση και την απόσταση.



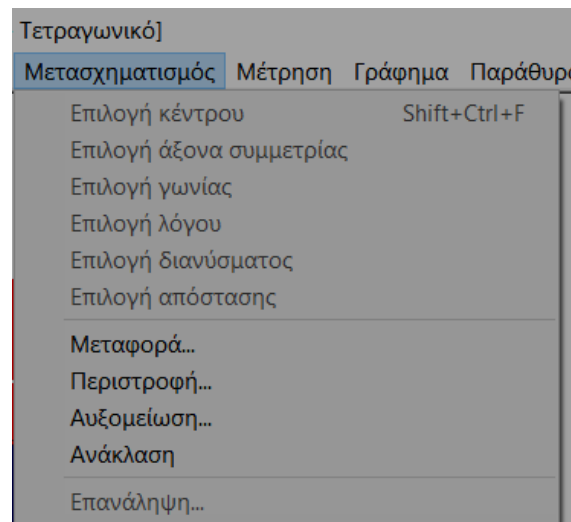
- Όταν **καθρεφτίζω** ένα σχήμα, πρέπει να αποφασίσω ποιος θα είναι ο καθρέφτης μου, δηλαδή ο άξονας ανάκλασης.



- Όταν **περιστρέφω** ένα σχήμα, πρέπει να αποφασίσω από πού θα το κρατήσω για να το περιστρέψω, προς τα πού θα το περιστρέψω και πόσο θα το περιστρέψω. Πρέπει να αποφασίσω δηλαδή το σημείο περιστροφής, την κατεύθυνση και τη γωνία περιστροφής.



Τα εργαλεία για τις μετακινήσεις στο πρόγραμμα GSP βρίσκονται στο μενού **Μετασχηματισμός** —————> **Μεταφορά, Περιστροφή, Ανάκλαση** (Εικ. 1).

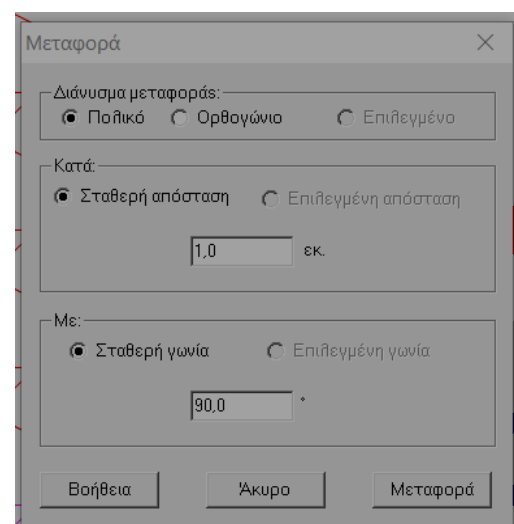


Εικόνα 1: Οι εντολές των μετασχηματισμών

Η **Μεταφορά** στο επίπεδο μπορεί να γίνει ως εξής. Αφού επιλέξετε με το ποντίκι το σχήμα που θέλετε να μεταφέρετε, επιλέγετε

Μετασχηματισμός —————> **Μεταφορά**.

Μπορείτε να μεταφέρετε το σχήμα κατά ορισμένη **κατεύθυνση** (επιλέγοντας **γωνία**) και **απόσταση**.



Εικόνα 2: Επιλογή απόστασης και γωνίας στη μεταφορά

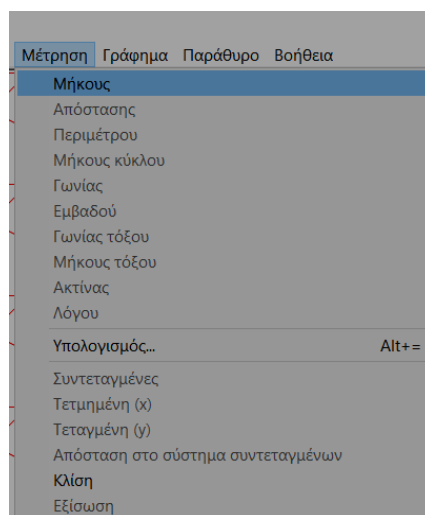
Στον πίνακα 1 φαίνεται σε πόσες μοίρες γωνία αντιστοιχούν οι κινήσεις: πάνω – κάτω- δεξιά – αριστερά.

Πίνακας 1: Γωνίες Διεύθυνσης

Δεξιά	0 μοίρες
Πάνω	90 μοίρες
Αριστερά	180 μοίρες
Κάτω	270 μοίρες

Συμπληρώνετε τις μοίρες εκεί που λέει σταθερή γωνία.

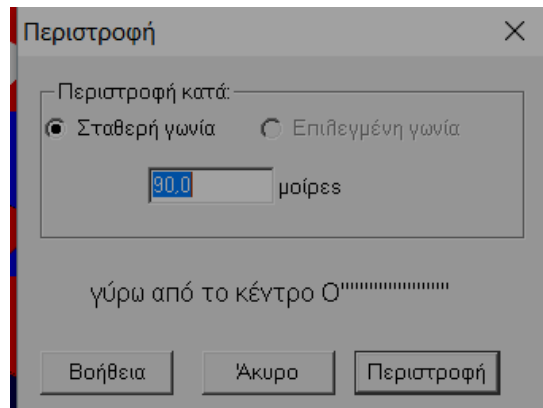
Σχετικά με την απόσταση, συμπληρώνετε εκεί που λέει σταθερή απόσταση. Στο πρόγραμμα υπολογίζεται σε εκατοστά. **Το μήκος από σημείο σε σημείο στον καμβά** μπορείτε να το υπολογίσετε χρησιμοποιώντας την εντολή **Μέτρηση** ως εξής: Κατασκευάστε μια γραμμή από τελεία σε τελεία και επιλέξτε την. Στη συνέχεια, επιλέξτε **Μέτρηση** → **Μήκους** (Εικ.3).



Εικόνα 3: Μέτρηση Μήκους

Η εντολή **Περιστροφή** λειτουργεί ως εξής: Αρχικά, επιλέγετε με το ποντίκι το σχήμα που πρέπει να περιστραφεί. Μετά επιλέγετε με διπλό

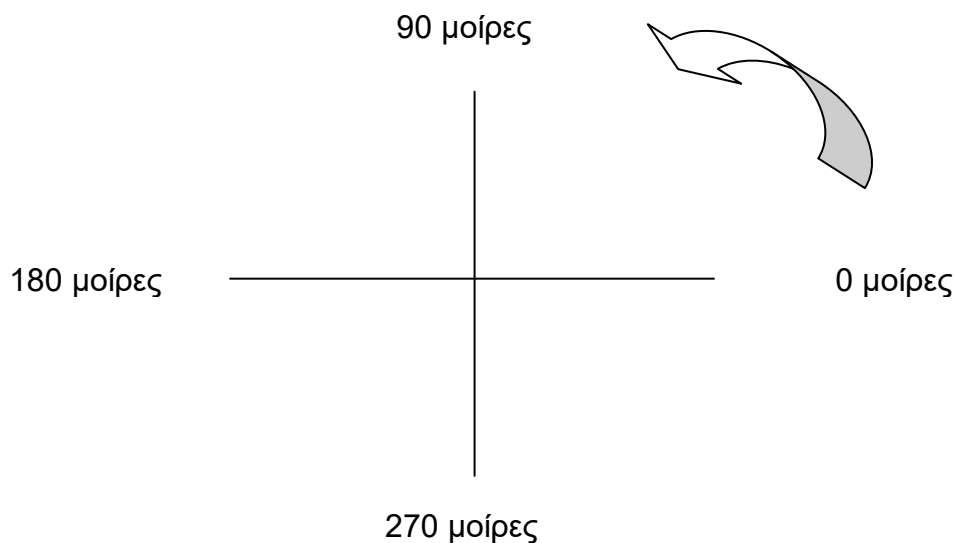
κλικ το σημείο από το οποίο θέλετε να το περιστρέψετε (σημείο περιστροφής). Θα εμφανιστούν κινούμενοι κύκλοι στο σημείο. Στη συνέχεια πηγαίνετε στη επιλογή **Μετασχηματισμός** → **Περιστροφή**. Θα εμφανιστεί ένα παράθυρο από το οποίο θα επιλέξετε πόσες μοίρες θέλετε να περιστραφεί. (Εικόνα 4).



Εικόνα 4: Επιλογή γωνίας στην περιστροφή

Προσοχή! Το πρόγραμμα Geometer Sketchpad μετρά τη γωνία αντίθετα με το πώς πάνε οι δείκτες του ρολογιού.

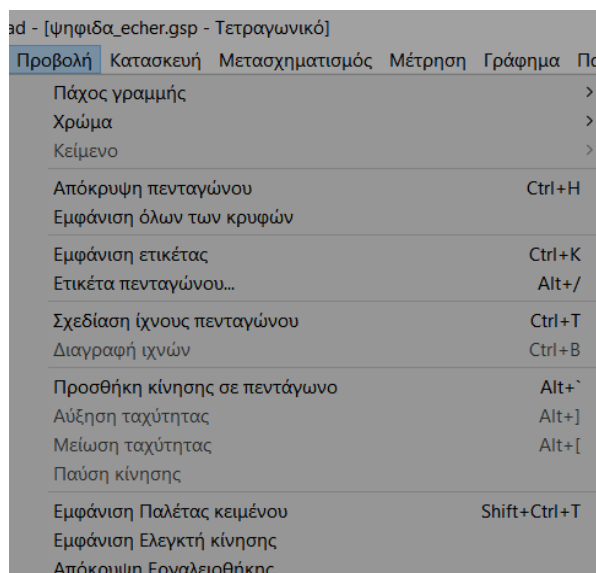
Στην εικόνα 5 φαίνονται οι μοίρες που αντιστοιχούν στην κάθε γωνία.



Εικόνα 5: Οι μοίρες στο επίπεδο

Όσον αφορά την **Ανάκλαση**, επιλέγετε αρχικά το σχήμα και με διπλό κλικ την ευθεία που θα λειτουργήσει ως **άξονας συμμετρίας**. Εάν επιλεγθεί η ευθεία εμφανίζονται δύο κινούμενα τετραγωνάκια. Στη συνέχεια, από το ίδιο μενού, επιλέγετε την εντολή **Ανάκλαση**.

Προσοχή!!! Δεν μπορείτε να σβήσετε σχήμα που προήλθε από ένα άλλο, γιατί θα σβήσουν όλα. Μπορείτε, ωστόσο, να αποκρύψετε σχήματα ή στοιχεία σχημάτων ως εξής (Εικ.6): Αφού επιλέξετε το σχήμα που θέλετε να αποκρύψετε από το μενού **Προβολή** —————> **Απόκρυψη Τμημάτων**.



Εικόνα 6: Εντολή απόκρυψης τμημάτων