ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ & ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

27-6-2017

---

1 Για $\kappa \in \mathbb{R}$ να λυθεί το πρόβλημα

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \kappa \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\text{κ.α.} \quad 0 \le x_i \le 1 \qquad i = 1, \dots, n$$

2 Για $\kappa \in \mathbb{R}$ να λυθεί το πρόβλημα

$$\max (x_1 x_2 x_3 \cdots x_{n-1} x_n)$$

$$\text{κ.α.} \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n = \kappa$$

$$x_i \ge 0 \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$x_n \in \mathbb{R}$$

3 Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση την οποία επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε κάτω από τους περιορισμούς:

$$x_1 + x_2 \le 2, \quad x_2 \ge 0, \quad x_2 \le x_1^3.$$

(α) Αυτό το πρόβλημα έχει λύση και γιατί;

(β) Έστω ότι η f είναι κυρτή. Ισχυρισμός: "Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος των ικανών συνθηκών KKT και επομένως τα σημεία KKT αποτελούν λύσεις του προβλήματος". Αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός; [Η απάντηση πρέπει να είναι πλήρως αιτιολογημένη].

(γ) Ισχυρισμός: "Η λύση είναι πάντοτε σημείο KKT". Αποδείξτε τον ισχυρισμό ή δώστε συγκεκριμένη f για την οποία η λύση του προβλήματος δεν είναι σημείο KKT.

(δ) Έστω ότι στο παραπάνω πρόβλημα λύνοντας τις συνθήκες KKT πήραμε δύο σημεία KKT, τα (x_1^0, x_2^0) και τα (x_1^*, x_2^*). Εξηγήστε τι θα κάνετε (και γιατί) για να βρείτε τη λύση του προβλήματος.

$\boxed{4}$ Έστω το πρόβλημα $\max \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2+2}$

κ.α. $x_1^2 - 6x_1 + 8 \leq x_2 \leq 1$

(α) Να αιτιολογηθεί η ύπαρξη λύσης αυτού του προβλήματος και να δειχθεί ότι αυτή είναι σημείο KKT.

(β) Να δειχθεί ότι η λύση (x_1^0, x_2^0) ικανοποιεί το σύστημα

$$\begin{cases} (x_1^2 - 6x_1 + 10)^2 + 2x_1^2(x_1 - 3) = 0 \\ x_2 = (x_1 - 4)(x_1 - 2) \end{cases}$$

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ</u>

Οι λύσεις οφείλουν να είναι αιτιολογημένες με σαφήνεια, η απλή καταγραφή των συνθηκών KKT δεν σημαίνει κάτι από μόνη της. Τα θέματα είναι ισοδύναμα και βαθμολογούνται με 28 μονάδες το καθένα. Άριστα το 100, βάση το 50.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3h.

$\boxed{1}$ $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1+k \\ 2x_2+k \\ \vdots \\ 2x_n+k \end{pmatrix}$ $\quad H_f(x) = \begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$

Άρα η f κυρτή. Επίσης οι περιορισμοί $0 \le x_i \le 1$ $i=1,\dots,n$ γράφονται

$$g_i(x) = -x_i \le 0 \quad i=1,\dots,n$$
$$h_i(x) = x_i - 1 \le 0 \quad i=1,\dots,n$$

Αφού και οι g_i, h_i, $i=1,\dots,n$, είναι κυρτές συναρτήσεις, ικανοποιούνται οι ικανές συνθήκες KKT και αρκεί να βρούμε τα σημεία KKT.

(ΠΕ) $\quad 0 \le x_i \le 1 \quad i=1,\dots,n$

(ΔΕ) $\quad 2x_i + k - \mu_i + \lambda_i = 0 \quad i=1,\dots,n$

$\mu_i \ge 0 \quad \lambda_i \ge 0$

(ΣΧ) $\quad \mu_i x_i = 0$

$\lambda_i (x_i - 1) = 0. \quad i=1,\dots,n$

ως εδώ 4 μονάδες

Ψάχνουμε πρώτα για λύση στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύβου ($0 < x_i < 1$, $i=1,\dots,n$). Τότε $\mu_i = \lambda_i = 0$ (από ΣΧ). Άρα $2x_i + k = 0 \Longrightarrow x_i = -\frac{k}{2}$ $i=1,\dots,n$

Η λύση θα είναι δεκτή αν $0 \le -\frac{k}{2} \le 1 \Longleftrightarrow -2 \le k \le 0$

Άρα, τότε $x^0 = \left(-\frac{k}{2}, -\frac{k}{2}, \dots, -\frac{k}{2}\right)$ και

$$f(x^0) = n\frac{k^2}{4} - n\frac{k^2}{2} = -n\frac{k^2}{4} < 0$$

Άρα το ερώτημα είναι τι γίνεται

(α) Αν $k \geq 0$

(β) Αν $k \leq -2$

(α) $\boxed{\text{Αν } k \geq 0}$ από την $f(x) := \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + k \sum_{i=1}^{n} x_i$

προκύπτει αμέσως ότι το ελάχιστο της f πετυχαίνεται για $x_i = 0$, $i=1,\dots,n$. Δηλ. $x^0 = (0,\dots,0)$ και $f(x^0) = 0$ για $k \geq 0$

(β) $\boxed{\text{Αν } k < -2}$ (i) Έστω ότι για κάποιο i_0 ισχύει $x_{i_0} = 0$. Τότε $(\Sigma X) \rightsquigarrow \lambda_{i_0} = 0$, οπότε από $(\Delta E) \rightsquigarrow$

$k - \mu_{i_0} = 0 \Rightarrow \mu_{i_0} = k < 0$ ΑΤΟΠΟ. Άρα θα πρέπει $x_i > 0$ $\forall i \in \{1,\dots,n\}$. Επομένως, $(\Sigma X) \rightsquigarrow \mu_i = 0$, $i=1,\dots,n$

Άρα, $\Delta E \rightsquigarrow 2x_i + k + \lambda_i = 0 \Rightarrow x_i = -\frac{k+\lambda_i}{2}$, $i=1,\dots,n$.

Αν υπήρχε i_0 τ.ω. $0 < x_{i_0} < 1$, τότε $\lambda_{i_0} = 0$, $\mu_{i_0} = 0$ (ΣX)

και $x_{i_0} = -\frac{k}{2} > 1$, που είναι άτοπο.

Άρα θα πρέπει $x_i = 1$, $i=1,\dots,n$. Σε αυτή την περίπτωση

είναι $\lambda_i = -k-2 > 0$ και επομένως το σημείο

$x^0 = (1,1,\dots,1)$, $\mu_i = 0$, $i=1,\dots,n$, $\lambda_i = -k-2$, $i=1,\dots,n$.

είναι σημείο KKT και άρα λύση, με $f(x^0) = n + nk = n(k+1)$

3

$x^0 = (1, 1, \dots, 1)$ $\quad$ $x^0 = \left(-\frac{k}{2}, -\frac{k}{2}, \dots, -\frac{k}{2}\right)$ $\quad$ $x^0 = (0, \dots, 0)$

$f(x^0) = n(k+1)$ $\quad$ $f(x^0) = -n\frac{k^2}{4}$ $\quad$ $f(x^0) = 0$.

$(\mu_i = 0, \lambda_i = -k-2)$ $\quad$ $(\mu_i = \lambda_i = 0)$

Παρατήρησε τη συνέχεια της λύσης στα σημεία $k=-2$ και $k=0$.

Η καθεμία από τις 3 περιπτώσεις από 8 μονάδες (με έμφαση στην 1η και στην 3η)

Αφού $\varepsilon > 0$ αυθαίρετο, προφανώς υποθέτουμε

$x_i > \varepsilon \overset{\Sigma X}{\rightsquigarrow} \mu_i = 0, \quad i = 1, \dots, n$

Άρα (ΔΕ) $\rightsquigarrow$ $2\nu x_i = \dfrac{1}{x_i} \Longrightarrow x_i^2 = \dfrac{1}{2\nu} \quad i = 1, \dots, n-1$

$$\frac{1}{x_n} = \nu \Longrightarrow x_n = \frac{1}{\nu}$$

Άρα (ΠΕ) $\rightsquigarrow$ $(n-1)\dfrac{1}{2\nu} + \dfrac{1}{\nu} = k \Longrightarrow k\nu = \dfrac{n+1}{2}$

$\Longrightarrow \nu = \dfrac{n+1}{2k}$. Για $k > 0$ είναι όντως $\nu > 0$

και συνεπώς, από ικανές συνθήκες KKT η

λύση του προβλήματος θα είναι

$$x_n = \frac{1}{\nu} = \frac{2k}{n+1}$$

$$x_i = \sqrt{\frac{1}{2\nu}} = \sqrt{\frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}k}{n+1}} = \sqrt{\frac{k}{n+1}} \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Επειδή η λύση είναι ανεξάρτητη του ε, παίρνοντας $\varepsilon \to 0$ συμπεραίνουμε ότι η λύση του αρχικού προβλήματος είναι η $x^0 = \left(\sqrt{\frac{k}{n+1}}, \dots, \sqrt{\frac{k}{n+1}}, \frac{2k}{n+1}\right)$

με $f(x^0) = \left(\dfrac{k}{n+1}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\dfrac{2k}{n+1}\right)$

1 $\max \overbrace{(x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n)}^{f(x)}$

κ.α. $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n = k$

$x_i \geq 0 \quad i=1,\dots,n-1$

$x_n \in \mathbb{R}$

Διερεύνηση: $\boxed{\text{Αν } k<0}$, τότε αναγκαστικά $x_n = k - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 < 0$. Δεδομένου ότι $x_i \geq 0$, $i=1,\dots,n-1$ θα έχουμε $f(x) := \prod_{i=1}^{n} x_i \leq 0$. Άρα η $f(x)$ είναι άνω φραγμένη από το 0. Αλλά το σημείο $x^0 := (0,0,\dots,0,k)$ είναι εφικτή λύση και $f(x^0)=0$. Άρα x^0 είναι λύση του προβλήματος για $k<0$.

$\boxed{\text{Αν } k=0}$

(a) Αν x τ.ω. $x_i > 0$, $i=1,\dots,n-1$ και $x_n = -\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$ τότε $f(x)<0$. Αν x τ.ω. $x_{i_0}=0$ για κάποιο i_0 και $x_n = -\sum_{i=1}^{k-1} x_i^2$, τότε $f(x)=0$. Άρα και πάλι η μέγιστη τιμή της f πάνω στο σύνολο των εφικτών λύσεων είναι η 0. Και πάλι το $x^0 = (0,\dots,0)$ αποτελεί λύση.

Άρα ενδιαφέρει η περίπτωση $\boxed{k>0}$

$\boxed{k>0}$ Τότε το x_n στη λύση θα είναι >0 (διαφορετικά $f(x)\leq 0$ που είναι υποβέλτιστο). Επίσης, θα είναι στη λύση $x_i>0$, $i=1,\dots,n-1$, διότι αν ήταν κάποιο $x_{i_0}=0$, $i_0\in\{1,\dots,n-1\}$, θα είχαμε $f(x)=0$ που είναι υποβέλτιστο. Άρα στην αναζήτηση της λύσης μπορούμε να περιοριστούμε σε $x_1,\dots,x_n>0$.

Εξετάζουμε επομένως το πρόβλημα (κατά τα γνωστά)

$$\min \overbrace{\left(-\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)\right)}^{\hat f(x)}$$

$$\text{κ.α.}\begin{cases} x_i\geq \varepsilon>0 \quad i=1,\dots,n-1,\underline{\underline{n}} \rightarrow \text{N.B.!} \\ \sum_{i=1}^{n-1}x_i^2+x_n=k \end{cases}$$

$$\nabla\hat f(x)=-\begin{pmatrix}1/x_1\\ \vdots\\ 1/x_n\end{pmatrix} \qquad H_{\hat f}(x)=\begin{pmatrix}1/x_1^2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1/x_n^2\end{pmatrix}$$

Η $\hat f$ κυρτή αφού $H_{\hat f}(x)$ είναι θ.ο. (διαγώνιος με θετικές ιδιοτιμές).

Έστω $h(x)=\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2+x_n-k$ $\quad \nabla h(x)=\begin{pmatrix}2x_1\\ 2x_2\\ \vdots\\ 2x_{n-1}\\ 1\end{pmatrix}$

$$H_h(x) = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & 0 \\ & 0 & \ddots 2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$ θ.η.ο. (όμοιος λόγος)

Άρα η $h(x)$ είναι κυρτή $\forall k$

Επίσης οι ανισωτικοί περιορισμοί $g_i(x) := -x_i + \varepsilon \leq 0$ είναι γραμμικοί, άρα κυρτές συναρτήσεις, $i=1,\dots,n$

Θα δουλέψουμε ικανές συνθήκες KKT για προβλήματα με ανισωτικούς και εξισωτικούς περιορισμούς. Για να ισχύει αυτή η προσέγγιση θα πρέπει ο πολλαπλ. Lagrange v του εξισωτικού περιορισμού να είναι ≥ 0.

(ΠΕ) $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n = k$.

$x_i \geq \varepsilon > 0, \quad i=1,\dots,n$

(ΔΕ) $-\dfrac{1}{x_i} - \mu_i + v\,2x_i = 0 \qquad i=1,\dots,n-1$

$-\dfrac{1}{x_n} - \mu_n + v = 0$

$\mu_1,\dots,\mu_n \geq 0$

(ΣΧ) $\mu_i(-x_i + \varepsilon) = 0 \quad i=1,\dots,n$.

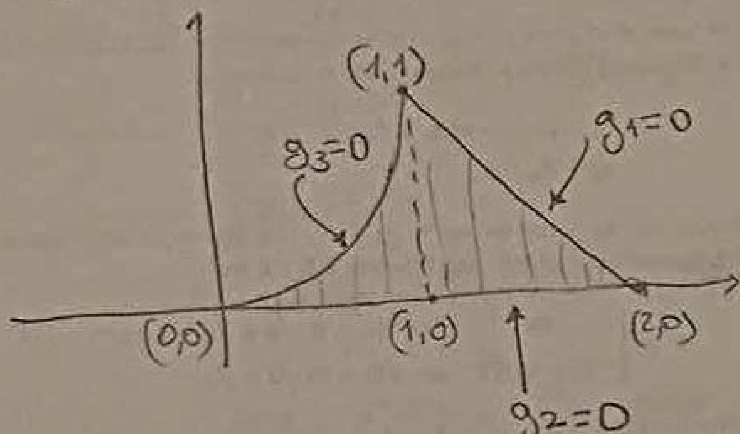
1 $g_1(x) := x_1 + x_2 - 2 \le 0$

$g_2(x) := -x_2 \le 0$

$g_3(x) := -x_1^3 + x_2 \le 0$

(4)

(α) Το σύνολο S των εφικτών λύσεων είναι το



Το S είναι κλειστό και φραγμένο (συμπαγές) στον $\mathbb{R}^2$, και η f ως διαφορίσιμη είναι συνεχής. Άρα η f παίρνει μέγιστο και ελάχιστο πάνω στο S και άρα το πρόβλημα $\min_{x \in S} f(x)$ έχει λύση.

(7)

(β) Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, διότι θα πρέπει οι περιορισμοί να είναι κυρτές συναρτήσεις και η g_3 δεν είναι. Άλλωστε αυτό φαίνεται και από το S το οποίο δεν είναι κυρτό. Τυπικά!

$\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} -3x_1^2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $H_{g_3}(x) = \begin{pmatrix} -6x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Άρα $x \in S \Rightarrow x_1 \ge 0$

συμπεραίνουμε ότι $H_{g_3}(x)$ δεν είναι θ.η.ο.

Για να είναι πάντοτε η λύση σημείο ΚΚΤ θα πρέπει, σύμφωνα με το θεώρημα των αναγκαίων συνθηκών ΚΚΤ για προβλήματα με ανισωτικούς περιορισμούς, να είναι τα $\{\nabla g_i(x^0),\ i\in I(x^0)\}$ γραμμικά ανεξάρτητα για κάθε x^0 λύση του προβλήματος. Στο εσωτερικό του $S \rightsquigarrow I(x)=\emptyset$ και επομένως O.K.

Στα 3 ακρότατα έχω:

(i) $x^0=(1,1) \rightsquigarrow I(x^0)=\{1,3\}$. Εξετάζω

$$\lambda_1\nabla g_1(1,1)+\lambda_2\nabla g_3(1,1)=0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1-3\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_3=0\end{cases}$$

Άρα για $(1,1)$ O.K.

(ii) $x^0=(2,0) \rightsquigarrow I(x^0)=\{1,2\}$. Εξετάζω

$$\lambda_1\nabla g_1(2,0)+\lambda_2\nabla g_2(2,0)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_1-\lambda_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\end{cases}$$

Άρα για $(2,0)$ OK

(iii) $x^0=(0,0) \rightsquigarrow I(x^0)=\{2,3\}$ Εξετάζω

$$\lambda_2\nabla g_2(0,0)+\lambda_3\nabla g_3(0,0)=0 \Rightarrow \lambda_2\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_2=\lambda_3.$$ Άρα στη θέση $(0,0)$

δεν είμαστε O.K.

εκτός τα ακρότατα

(iv) Πάνω στην $g_1=0$: $I(x^0)=\{1\}$.

$\nabla g_1(x^0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ γραμμ. ανεξ. OK.

(v) Πάνω στην $g_2=0$ (εκτός τα ακρότατα)

$\nabla g_2(x^0)=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ γραμμ. ανεξ. OK.

(vi) Πάνω στην $g_3=0$ (εκτός τα ακρότατα)

$\nabla g_3(x^0)=\begin{pmatrix}-3x_1^{0\,2}\\1\end{pmatrix}$ και είμαστε OK (γρ. ανεξ.).

Άρα η μόνη περίπτωση η λύση, έστω x^0, να μην είναι σημείο KKT είναι όταν $x^0=(0,0)$. Υπάρχει f διαφορίσιμη για την οποία $\min_{x\in S} f(x)=f(0,0)$?

Φυσικά και ναι, π.χ. $f(x):=x_1+x_2$ ή $f(x)=x_1^2+x_2^2$ κ.ο.κ.

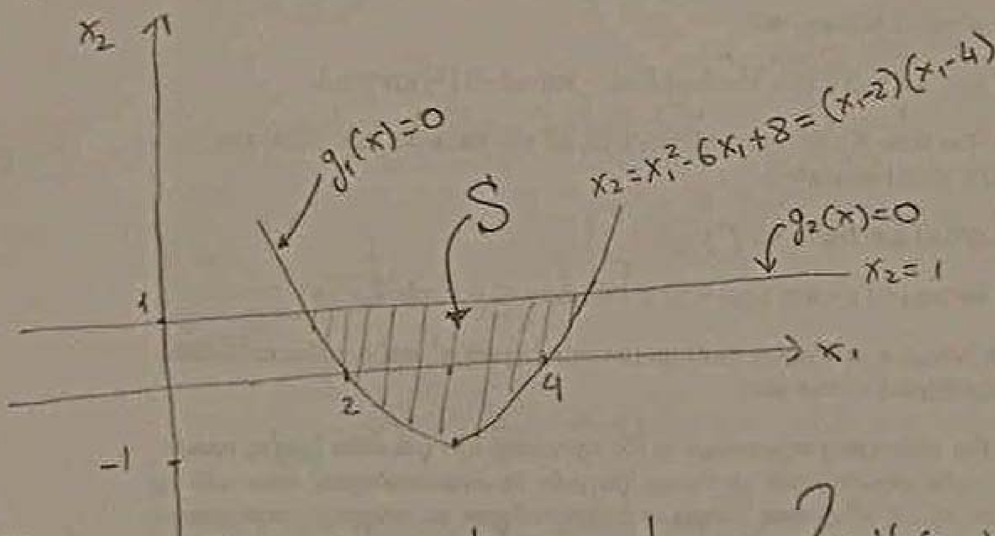
(δ) (7) Αφού λύση υπάρχει (από το (a)) αυτή ή θα είναι σημείο KKT ή θα είναι το $(0,0)$.

Άρα θα εξετάσω τις τιμές $f(0,0)$, $f(x_1^0,x_2^0)$, $f(x_1^*,x_2^*)$ και θα επιλέξω ως λύση από τα 3 x, εκείνο με την μικρότερη τιμή για την f.

$$\max\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2+2}\right)$$

κ.α. $\quad x_1^2-6x_1+8 \le x_2 \le 1$

$$g_1(x) := x_1^2-6x_1-x_2+8 \le 0$$
$$g_2(x) := x_2-1 \le 0$$



Έστω $f(x) := -\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2+2}$. Ζητάμε $\min f(x)$ κ.α. $x\in S$

$$\nabla f(x)=\begin{pmatrix}\frac{1}{x_1^2}\\ \frac{1}{(x_2+2)^2}\end{pmatrix} \qquad H_f(x)=\begin{pmatrix}-2x_1^{-3} & 0\\ 0 & -2(x_2+2)^{-3}\end{pmatrix}$$

Η f δεν είναι κυρτή αφού $x_1>0$.

$$\nabla g_1(x)=\begin{pmatrix}2x_1-6\\ -1\end{pmatrix} \qquad \nabla g_2(x)=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

(a) Θα επιδιώξουμε να δείξουμε ότι $\forall x\in S$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις των αναγκαίων συνθηκών KKT. Οπότε, πε, η λύση που γνωρίζουμε ότι υπάρχει (αφού η f είναι συνεχής πάνω στο συμπαγές S), θα είναι αναγκαστικά σημείο ΚΚΤ.

(ΠΕ) $x_1^2-6x_1-x_2+8\leq 0$

$x_2-1 \leq 0$

(ΔΕ) $\frac{1}{x_1^2}+\mu_1(2x_1-6)=0$

$\frac{1}{(x_2+2)^2}-\mu_1+\mu_2=0$

$\mu_1\geq 0 \quad \mu_2\geq 0$

(ΣΧ) $\mu_1(x_1^2-6x_1-x_2+8)=0$

$\mu_2(x_2-1)=0$

i) Εσωτερική λύση έτσι κι αλλιώς δεν υπάρχει, αφού $\mu_1=\mu_2=0 \xrightarrow{ΔΕ} \frac{1}{x_1^2}=0$ & $\frac{1}{(x_2+2)^2}=0$ άτοπο.

ii) Τα γωνιακά σημεία, όπου & οι 2 περιορισμοί είναι ενεργοί, δηλ. $I(x)=\{1,2\}$. Θα έχω

$1=x_1^2-6x_1+8 \Rightarrow x_1^2-6x_1+7=0$

$p_{1,2}=3\pm\sqrt{2}$ $\quad \nabla g_1(p_1,1)=\begin{pmatrix}2(3+\sqrt{2})-6\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\ -1\end{pmatrix}$

$$\nabla g_2(p_1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 2\sqrt{2} = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Άρα $\nabla g_1(p_1,1), \nabla g_2(p_1,1)$ γρ. ανεξ.

$$\nabla g_1(p_2,1) = \begin{pmatrix} 2(3-\sqrt{2})-6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\nabla g_2(p_2,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Και πάλι $\nabla g_1(p_2,1), \nabla g_2(p_2,1)$ είναι γραμμ. ανεξάρτητα.

(iii) Αν είναι μόνο ο $g_2(x)=0$ (δηλ. $I(x)=\{2\}$) τότε έχω ένα μόνο διάνυσμα, το $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και η συλλογή $\{\nabla g_i(x), i \in I(x)\}$ είναι γρ. ανεξάρτητ.

Αν είναι μόνο ο $g_1(x)=0$, δηλ. $I(x)=\{1\}$ πάλι η συλλογή των διανυσμάτων είναι ένα διάνυσμα, το $\begin{pmatrix} 2x_1-6 \\ -1 \end{pmatrix}$, $3-\sqrt{2} < x_1 < 3+\sqrt{2}$ που είναι $\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ και επομ. γρ. ανεξ.

Άρα $\forall x \in S$ ισχύει $\{\nabla g_i(x), i \in I(x)\}$ είναι γρ. ανεξ.

και επομένως ικανοποιούνται οι αναγκαίες συνθήκες KKT και άρα η λύση (που ξέρουμε ότι υπάρχει) θα και σημείο ΚΚΤ. Άρα το (α) είναι δεκτό.

(β) (i) Έχουμε ήδη δει ότι δεν υπάρχουν σημεία ΚΚΤ στο εσωτερικό του S.

(ii) Εξετάζουμε αν τα $(3+\sqrt{2}, 1)$ & $(3-\sqrt{2}, 1)$ είναι σημεία ΚΚΤ.

Για το πρώτο $\xrightarrow{\Delta E}$ $\dfrac{1}{(3+\sqrt{2})^2} + \mu_1(\cancel{6}+2\sqrt{2}-\cancel{6}) = 0$

$\Longrightarrow 1 + \mu_1 (3+\sqrt{2})^2 2\sqrt{2} = 0 \Longrightarrow \mu_1 = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}(3+\sqrt{2})^2} < 0$

ΑΤΟΠΟ, δηλ. το $(3+\sqrt{2}, 1)$ δεν μπορεί να είναι ΚΚΤ.

Για το δεύτερο $\xrightarrow{\Delta E}$ $\dfrac{1}{(3-\sqrt{2})^2} + \mu_1(\cancel{6}-2\sqrt{2}-\cancel{6}) = 0$

$\Longrightarrow \mu_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}(3-\sqrt{2})^2} > 0$ ο.κ. για το μ_1

Αλλά επίσης $\xrightarrow{\Delta E}$ $\dfrac{1}{(1+2)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{2}(3-\sqrt{2})^2} + \mu_2 = 0$

$\Longrightarrow \mu_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}(3-\sqrt{2})^2} - \dfrac{1}{9}$

$\mu_2 > 0 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{2}(3-\sqrt{2})^2} > \dfrac{1}{9} \Longleftrightarrow 9 > 2\sqrt{2}(3-\sqrt{2})^2$

$\Longleftrightarrow 9 > 2\sqrt{2}(9-6\sqrt{2}+2) \Longleftrightarrow 9 > 18\sqrt{2} - 24 + 4\sqrt{2}$

$\Longleftrightarrow 3\cancel{3}_{3} > \cancel{22}_{2}\sqrt{2} \Longleftrightarrow 9 > 8$ αληθές

Άρα το $(3-\sqrt{2}, 1)$ είναι σημείο ΚΚΤ.

(iii) Εξετάζουμε αν τα σημεία $x \in S$ με $g_2(x) = 0$ αλλά $g_1(x) \neq 0$ είναι ΚΚΤ.

$$g_2(x) = 0 \xrightarrow{\text{ΠΕ}} x_2 = 1$$

$$g_1(x) \neq 0 \xrightarrow{\text{ΣΧ}} \mu_1 = 0 \xrightarrow{\text{ΔΕ}} \frac{1}{x_1^2} = 0 \quad \text{ΑΤΟΠΟ.}$$

Άρα τα σημεία πάνω στην $x_2 = 1$ (εκτός από το γωνιακό $(3-\sqrt{2}, 1)$) δεν είναι ΚΚΤ.

(iv) Τέλος εξετάζουμε τα σημεία για τα οποία $x_2 < 1$ και $g_1(x) = 0$ (δηλ. στο σύνορο πάνω στην καμπύλη).

$$x_2 < 1 \xrightarrow{\text{ΣΧ}} \mu_2 = 0 \xrightarrow{(\text{ΔΕ})} \mu_1 = \frac{1}{(x_2+2)^2} > 0 \quad \text{οκ.}$$

Θα είναι $\xrightarrow{g_1(x)=0} x_2 = x_1^2 - 6x_1 + 8 = (x_1-4)(x_1-2)$ (*)

$$\text{ΔΕ} \rightsquigarrow \frac{1}{x_1^2} + \underbrace{\frac{1}{(x_2+2)^2}}_{\mu_1} 2(x_1-3) = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{(x_1^2-6x_1+10)^2} 2(x_1-3) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1^2-6x_1+10)^2+2x_1^2(x_1-3)=0 \quad (**)$$

Οι (*) & (**) είναι οι σχέσεις που τις ζητάει να δείξουμε ότι ικανοποιεί η λύση (x_1^0, x_2^0).

Φυσικά το γωνιακό $(3-\sqrt{2}, 1)$ ικανοποιεί τη σχέση (*), αφού η (*) λέει ότι $g_1(x)=0$, αλλά δεν ικανοποιεί την (**).

Άρα για νδο η λύση ικανοποιεί τις (*) & (**), αφού γνωρίζουμε ότι αυτή είναι KKT, θέλουμε νδο η λύση δεν βρίσκεται στο $(3-\sqrt{2}, 1)$.

Αρκεί να βρώ ένα άλλο σημείο όπου ικανοποιεί $g_1(x)=0$ που να είναι καλύτερο. Συγκρίνω λοιπόν το $(3-\sqrt{2}, 1)$ με το $(2,0)$. Η αντικειμενική συνάρτηση είναι η $\underbrace{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2+2}}_{u(x)}$. Είναι

$$u((3-\sqrt{2},1)) < u((2,0)) \Leftrightarrow \frac{1}{3-\sqrt{2}}+\frac{1}{3}<1 \Leftrightarrow \frac{1}{3-\sqrt{2}}<\frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3<6-2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}<3 \Leftrightarrow 8<9 \quad \text{ΑΛΗΘΕΣ}$$