Σήμερα: §§ 2.2, 3.1, 3.2

§ 2.2 Μέτρα κινδύνου.

(Kaas, Goovaerts, ... κεφ. 5)

$$X \longrightarrow \rho(X)$$

Αξία σε κίνδυνο / Value at risk

S τ.μ. με τιμές ≥ 0

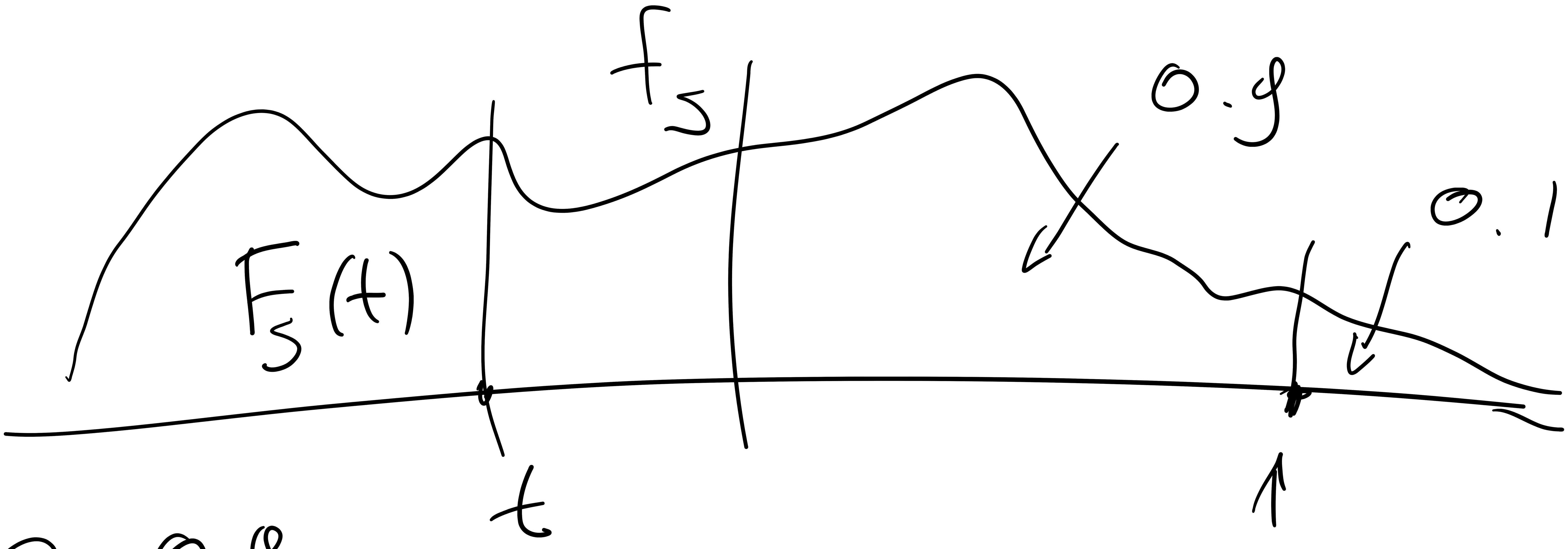
έχει συνάρτηση κατανομής

$$F_S(t) = P(S \leq t)$$

<u>Ορισμός</u> $p \in [0,1]$. Αξία σε κίνδυνο σε επίπεδο εμπιστοσύνης p λέμε τον αριθμό

$$VaR(S;p) := \inf\{t : F_S(t) \geq p\}$$

π.χ. αν η S έχει πυκνότητα



$p=0.9$ $\qquad$ $VaR(S;0.9)$

Αν $F_S \nearrow$ συνεχής

$$F_S(t)=p \qquad t=F_S^{-1}(p)$$

Παράδειγμα $\qquad$ Αν $S \sim exp(\lambda)$

τότε $F_S(t) = 1-e^{-\lambda t}$ για $t>0$

$\qquad\quad = 0$ $\qquad$ " $t \leq 0$

$$VaR(S;p) = \inf\{t : 1-e^{-\lambda t} \geq p\}$$

$$= \inf\{t : 1-p \geq e^{-\lambda t}\}$$

$$= \frac{\log(1-p)}{-\lambda}$$

Αν $p=0.$

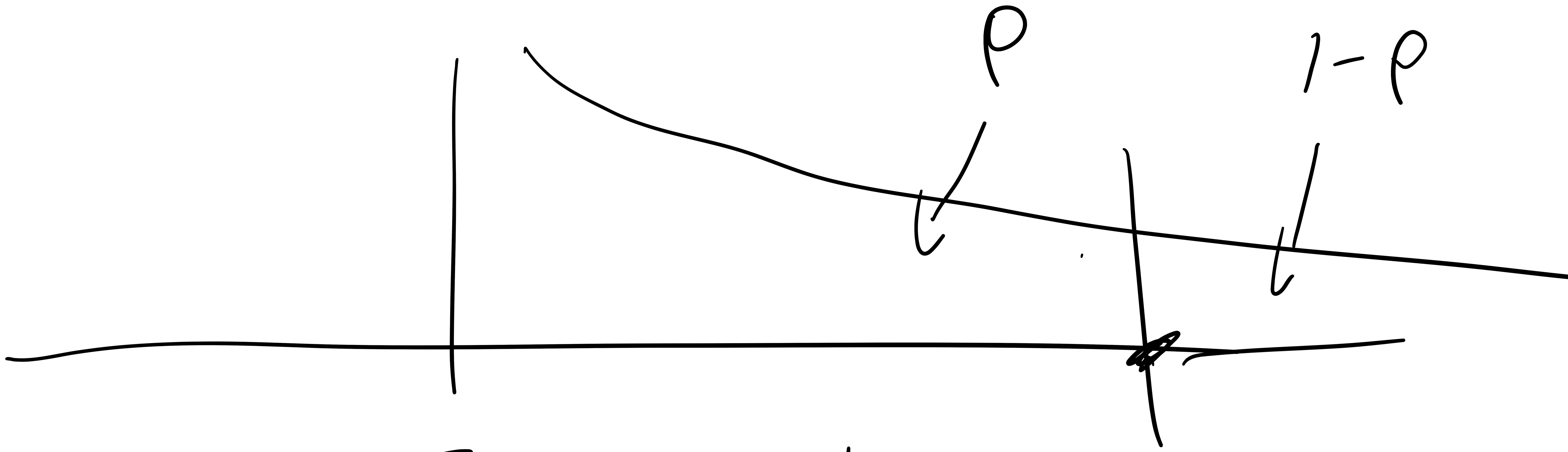
$$VaR(S;0) = \inf\{t : F_S(t) \geq 0\}$$
$$= \inf\{t : t \in \mathbb{R}\}$$
$$= -\infty$$

Αν $p = 1$

$$VaR(S;1) = \inf\{t : F_S(t) \geq 1\}$$

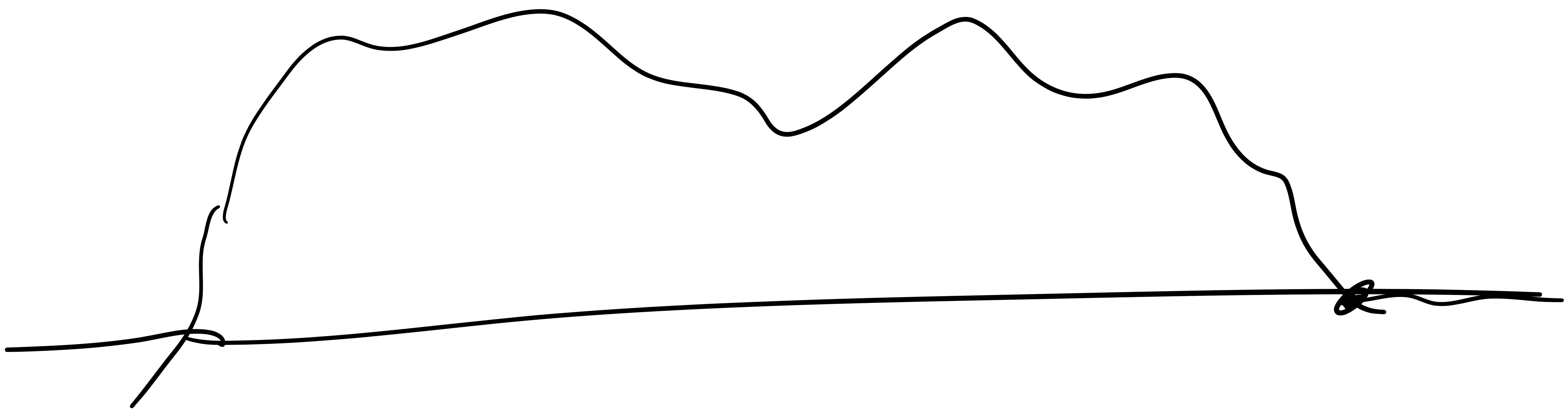
Αν $F_S(t) < 1 \quad \forall t$ τότε

$$VaR(S;1) = \inf \emptyset = \infty$$



Αν $\exists\, t_0 : F_S(t_0) = 1 \Leftarrow P(S \leq t_0) = 1$

τότε $VaR(S;p) < \infty$



Άλλα μέτρα

$$X_+ = \begin{cases} x & \text{αν } x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

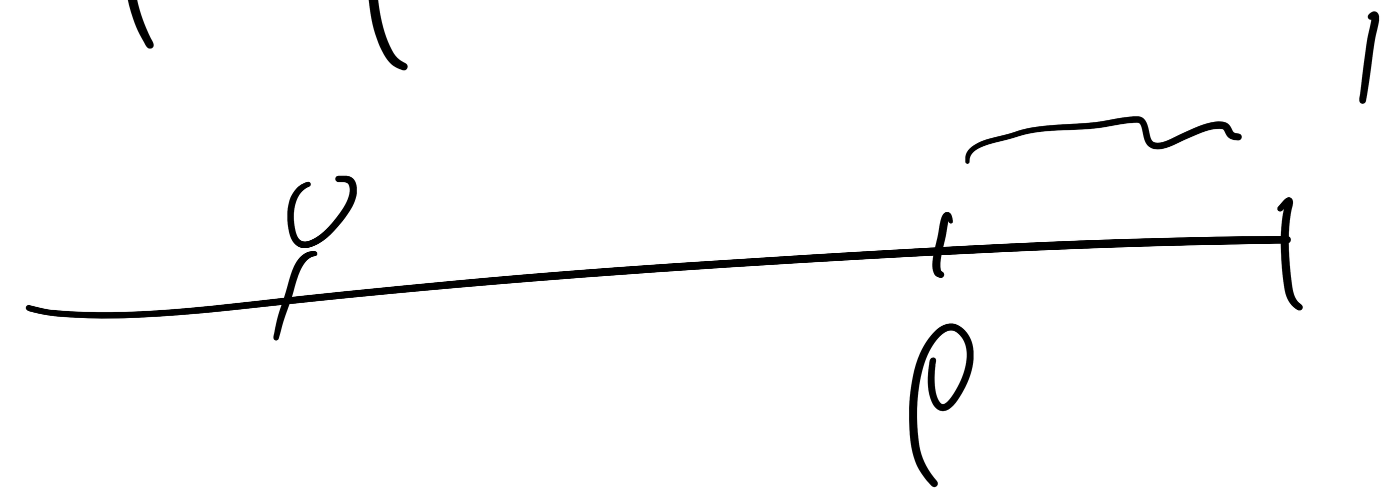
$3^+ = 3, \; (-2)^+ = 0$

1) Αναμενόμενο έλλειμμα

$$ES(S;p) = E\left(\left(S - \underbrace{VaR(S;p)}\right)_+\right)$$

2) Tail-Value-at-risk

$$TVaR(S;p) = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR(S;t)\,dt$$



3) conditional tail expectation

$$CTE(S;p) := E\left(S \mid S > VaR(S;p)\right)$$

$$(\;\; > VaR(S;p) \;\;)$$

παράδειγμα X, Y ανεξάρτητες, ισό-
νομες. $X = Z + H$ με

Z, H ανεξάρτητες και $Z \sim N(0,1)$

$$H = \begin{cases} 0 & \text{με πιθ. } 0.991 \\ -10 & \text{''} \quad 0.009 \end{cases}$$

Να βρεθούν τα

(α) $VaR(X; 0.99)$

(β) $VaR(X+Y; 0.99)$

Λύση

(α) $F_X(t) = P(Z+H \leq t)$

$$= 0.991\, P(Z \leq t) + 0.009\, P(Z \leq t+10)$$

$$VaR(X; 0.99) = \inf\{t : F_X(t) \geq 0.99\}$$

$$= \dots = 6.2$$

(β) $X+Y = Z_1 + H_1 + Z_2 + H_2$

$$= (Z_1 + Z_2) + H_1 + H_2$$

$$VaR(X+Y; 0.99) = 9.8$$

$$VaR(X+Y; 0.99) > VaR(X; 0.99) + VaR(Y; 0.99)$$

Άσκηση X τ.μ.

10η $$E((X-a)_+) = \int_a^\infty P(X>t)\,dt$$

λόγω
$$EX = \int_0^\infty P(X>t)\,dt$$

$$E((X-a)_+) = \int_0^\infty P((X-a)_+ > t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty P(X-a>t)\,dt$$

$s = a+t$

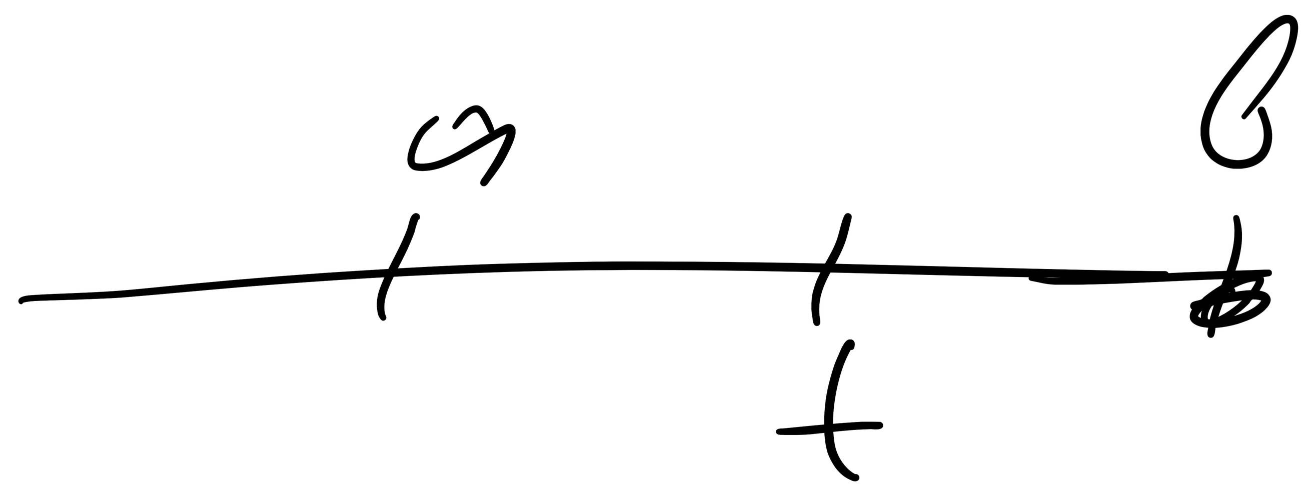
$$= \int_0^\infty P(X>a+t)\,dt = \int_a^\infty P(X>s)\,ds$$

Άσκηση $\xi \sim U(a,b)$, $0<a<b$

$p \in (0,1]$

$VaR(\xi;p) = ;$

$ES(\xi;p) = ;$



Λύση

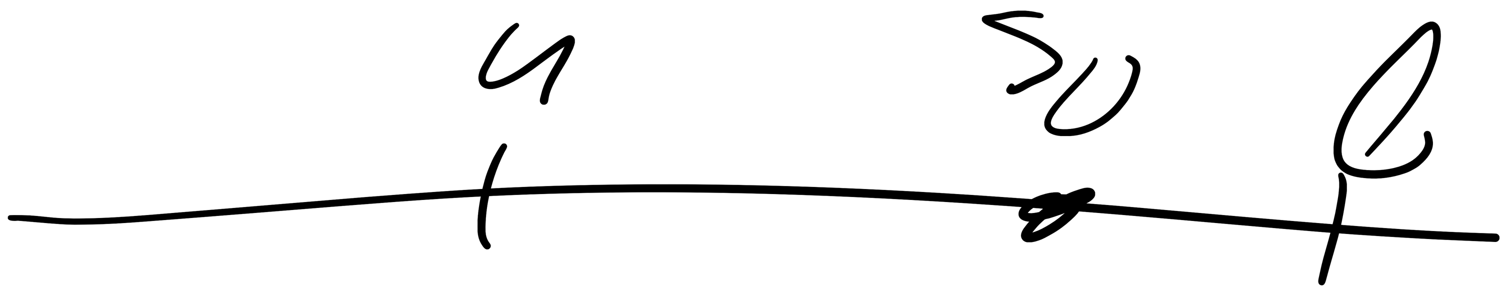
$$F_\xi(t) = P(\xi \le t) = \int_a^t \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{t-a}{b-a}$$

$$F_\xi(t) = \begin{cases} \frac{t-a}{b-a} & t \in (a,b) \quad t \in [a,b) \\ 0 & t \le a \\ 1 & t \ge b \end{cases}$$

$$VaR(\xi;p) = a + (b-a)p \leftarrow \frac{t-a}{b-a} \ge p, \quad p \in (0,1]$$

$$VaR(\xi;p) = \inf\{t : F_\xi(t) \ge 1\} = b$$

Έστω $s_0 = VaR(\xi;p) = a + (b-a)p$



$$ES(S;\rho) = E((S-s_0)_+)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-s_0)_+ f_S(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b (x-s_0)_+ \, dx =$$

$w = x - s_0$

$$= \frac{1}{b-a} \int_{s_0}^{b} (x-s_0)\, dx =$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_0^{b-s_0} w\, dw = \frac{1}{b-a} \frac{(b-s_0)^2}{2}$$

$$= \frac{1}{b-a} \frac{(b-a-\rho(b-a))^2}{2}$$

$$= \frac{(b-a)^2(1-\rho)^2}{(b-a)\cdot 2} = \frac{(b-a)(1-\rho)^2}{2}$$

Συνεπή μέτρα κινδύνου

$X \longmapsto m(X)$

Το μέτρο m λέγεται συνεπές αν

i) $m(X+Y) \leq m(X) + m(Y)$

ii) $m(aX) = a\, m(X)$ για κάθε $a>0$

iii) $X \leq Y \Rightarrow m(X) \leq m(Y)$

iv) $m(X+k) = m(X) + k$

$m(X) = Var(X)$

<u>Άσκηση</u> Το VaR ικανοποιεί τις ii – iv.

Λύση

Έστω $p \in (0,1)$

ii) Για $a>0$ $\quad F_{aX}(t)$

$VaR(aX; p) = \inf\{t : P(aX \leq t) \geq p\}$

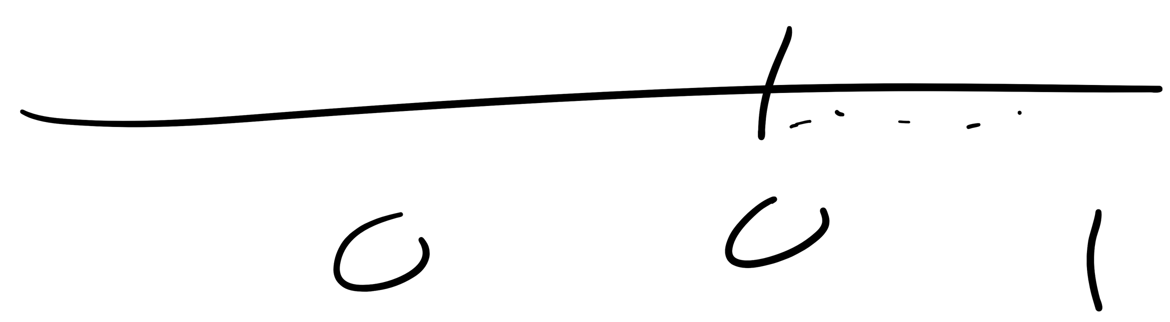
$$= \inf\left\{ t : P\left(X \le \frac{t}{a}\right) \ge p \right\}$$

$$= a \inf\left\{ \underbrace{\frac{t}{a}}_{y} : \underbrace{P\left(X \le \frac{t}{a}\right)}_{F_X(x) \ge p} \ge p \right\}$$

$$= a \, \mathrm{VaR}(X ; p)$$

The $a = 0$

$$\mathrm{VaR}(0 ; p) = \inf\{ t : P(0 \cdot X \le t) \ge p \}$$
$$= 0$$



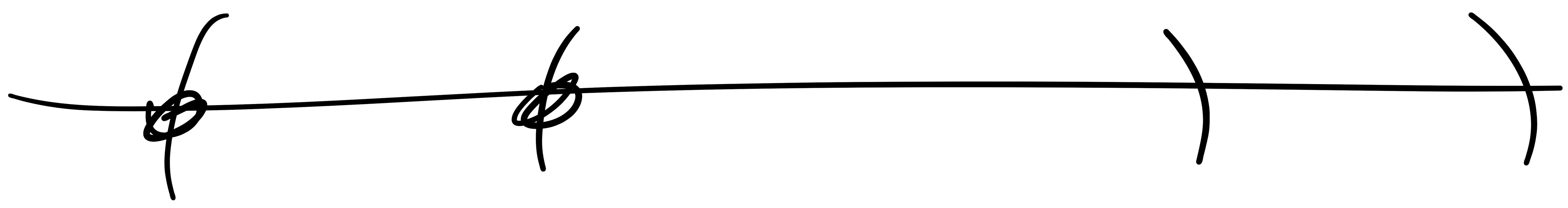
(iii) $\mathrm{VaR}(X ; p) = \inf\{ t : P(X \le t) \ge p \}$

$$X \le Y \Rightarrow P(X \le t) \ge P(Y \le t) \ge p$$

$$F_X(t) \ge F_Y(t)$$

$$\{ t : F_X(t) \ge p \} \supset \{ t : F_Y(t) \ge p \}$$

$$\inf\{ \quad \} \le \inf\{ \quad \}$$



iv) $\mathrm{VaR}(X+\kappa;\rho)=\inf\{t : P(X+\kappa\le t)\ge\rho\}$

$$=\inf\{t : P(X\le t-\kappa)\ge\rho\}$$

$$=\kappa+\inf\{\underbrace{t-\kappa}_{y} : P(X\le \underbrace{t-\kappa}_{y})\ge\rho\}$$

$$=\kappa+\mathrm{VaR}(X;\rho)$$

Άσκηση $\quad \rho=0.9$

$X\sim U(0,1)$, $\quad Y=\begin{cases}0.95-X & \text{αν } X\le 0.95\\ 1.95-X & \text{αν } X>0.95\end{cases}$

Ν.δ. ότι δεν ισχύει

$$\mathrm{CTE}(X+Y;\rho)\le \mathrm{CTE}(X;\rho)+\mathrm{CTE}(Y;\rho)$$

Λύση

$$\mathrm{VaR}(X; 0.9) = \inf\{t : F_X(t) \geq 0.95\}$$
$$= 0.9$$

Αν $t < 0.95$

$$P(Y \leq t) = P(Y \leq t, X \leq 0.95)$$
$$+ P(Y \leq t, X > 0.95)$$
$$= P(0.95 - X \leq t, X \leq 0.95)$$
$$= P(0.95 - t \leq X \leq 0.95)$$
$$= t$$

Αν $1 > t > 0.95$

$$P(Y \leq t) = P(Y \leq 0.95)$$
$$+ P(0.95 < Y \leq t)$$
$$= 0.95 + P(X > 0.95,$$
$$0.95 < Y < t)$$

$$= 0.95 + P(X > 0.95,$$

$$0.95 < 1.95 - \underline{X \le t})$$

$$0.95 + P(\overline{1.95 - t < X < 1,}$$

$$\cancel{X > 0.95}) = 0.95$$

$$+ 1 - (1.95 - t) = 0.95$$

$$+ 1 - 1.95 + t = t$$

$$Y \sim U(0,1)$$

$$VaR(Y; 0.9) = 0.9$$

$$CTE(X; 0.9) = E(X \mid X > VaR(X; 0.9))$$

$$= E(X \mid X > 0.9) =$$

$$\left(E(X \mid A) = \frac{1}{P(A)} E(X \mathbb{1}_A) \right)$$

$$= \frac{E(X \mathbb{1}_{X>0.9})}{P(X>0.9)} =$$

$$= \frac{\int_0^1 x \mathbb{1}_{x>0.9}\, dx}{0.1} = 10 \int_{0.9}^{1} x\, dx$$

$$= 0.95$$

$$X+Y = \begin{cases} 0.95 & \text{w} \quad X \le 0.95 \\ 1.95 & \text{w} \quad X > 0.95 \end{cases}$$

$$\mathrm{VaR}(X+Y; 0.9) = 0.95$$

$$\mathrm{CTE}(X+Y; 0.9) = E(X+Y \mid X+Y > 0.95)$$

$$= \frac{E(X+Y \, 1_{X+Y>0.95})}{P(X+Y>0.95)}$$

$$= \frac{1.95 \cdot P(X>0.95)}{P(X>0.95)} = 1.95$$

$$CTE(X+Y;p) > CTE(X;p) + CTE(Y;p)$$

$$1.95 \qquad\qquad 0.95 + 0.95$$

Κεφ. 3 Το συλλογικό πρότυπο

Υπενθύμιση

$$E(X|Y=y) = \int x \, \underbrace{f_{X|Y}(x|y)}_{= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}} \, dx$$

$$E(X|Y) = \underbrace{E(X|Y=y)}_{= \varphi(y)}\Big|_{y=Y}$$

$$= \varphi(Y)$$

$$Var(X|Y) = E(X^2|Y) - (E(X|Y))^2$$

$$EX = E(E(X|Y))$$

$$Var(X) = \underline{Var(E(X|Y))} + E(Var(X|Y))$$

$$E(X_1 + \dots + X_n) = EX_1 + \dots + EX_n$$

$$Var(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} Cov(X_i, X_j)$$

Έχουμε n κινδύνους $1, 2, \ldots, n$

Αν συμβεί ο i προκαλεί ζημιά μεγέθους X_i.

Έστω $I_i = \begin{cases} 1 & \text{αν ο } i \text{ συμβαίνει} \\ 0 & \text{αν δεν συμβαίνει} \end{cases}$

Συνολική ζημιά

$$S = \sum_{i=1}^{n} I_i X_i$$

Υποθ. ότι I_i, X_i $i = 1, \ldots, n$ ανεξάρτητες

$$q_i = P(I_i = 1)$$

$$\mu_i = E X_i$$

$$\sigma_i = \sqrt{Var(X_i)} \qquad i = 1 \ldots n$$

Πρόταση

a) $$ES = \sum_{i=1}^{n} q_i \mu_i$$

β) $Var(S) = \sum_{i=1}^{7} q_i \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{7} q_i(1-q_i)\mu_i^2$

Απόδειξη

α) $ES = \sum_{i=1}^{7} E(I_i X_i) = \sum_{i=1}^{7} EI_i \, EX_i$

$$\left(\begin{aligned} EI_i &= 1 \cdot P(I_i = 1) + 0 \cdot P(I_i = 0) \\ &= 1 \cdot q_i + 0 = q_i \end{aligned} \right)$$

$= \sum_{i=1}^{7} q_i \mu_i$

β) $Var(S) = \sum_{i=1}^{7} Var(I_i X_i)$

$Var(I_i X_i) = E((I_i X_i)^2) - (E(I_i X_i))^2 = E(I_i^2) E(X_i^2)$

$\shortparallel$

$$-\left(E(I_i)E(X_i)\right)^2 \qquad E(I_i)$$

$$= q_i\left(Var(X_i)+(EX_i)^2\right)$$

$$- q_i^2\mu_i^2 = q_i(\sigma_i^2+\mu_i^2)$$

$$- q_i^2\mu_i^2 = q_i\sigma_i^2+\mu_i^2 q_i(1-q_i)$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} I_i X_i$$

$$\Xi = I_1 + \quad + I_n$$ = πλήθος πληρωμών που πραγματοποιούνται

$$E\Xi = q_1 + \quad + q_n$$

μέση αποζημίωση $\longrightarrow \dfrac{ES}{E\Xi}$

$$E\left(\frac{S}{\Xi}\right)$$

<u>Άσκηση</u>

$n = 300$ κίνδυνοι

ανεξάρτητοι $(X_i)_{1 \le i \le 300}$

$q = q_i = 0.01 \ \forall i$

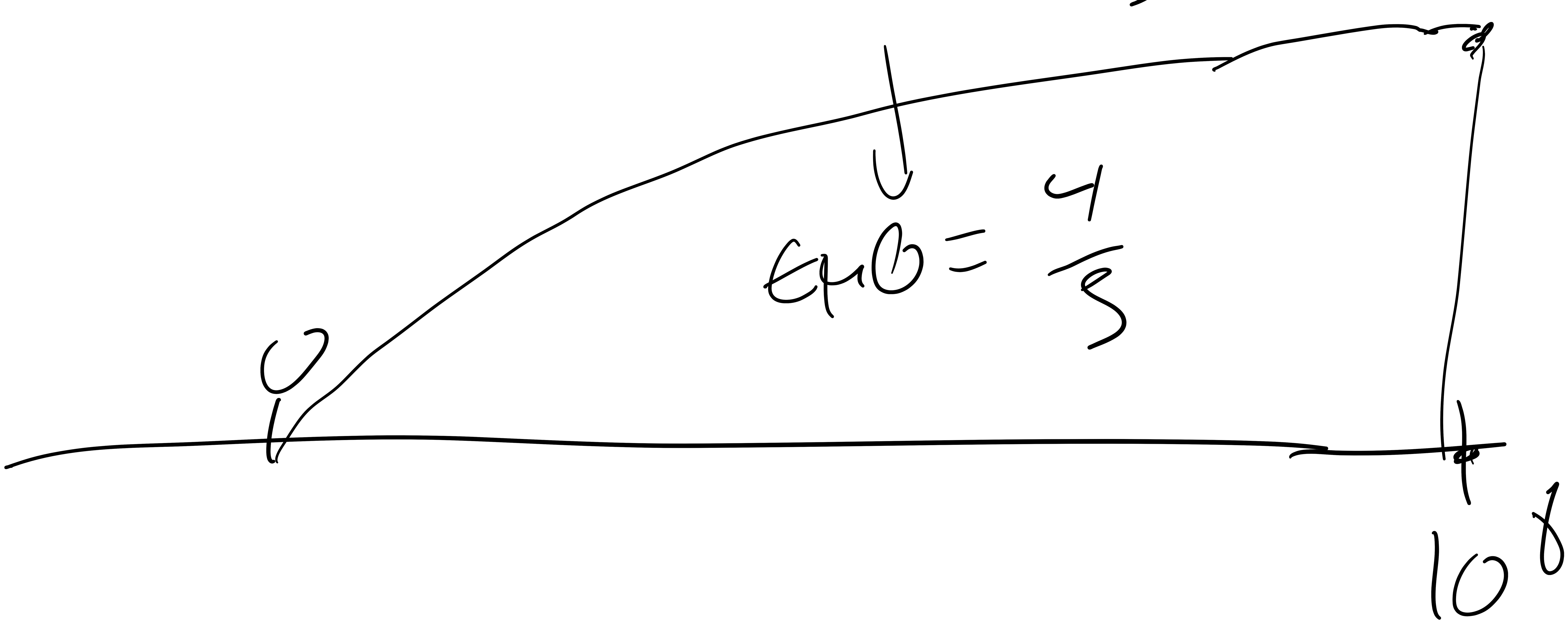
X_1 έχει την εξής κατανομή

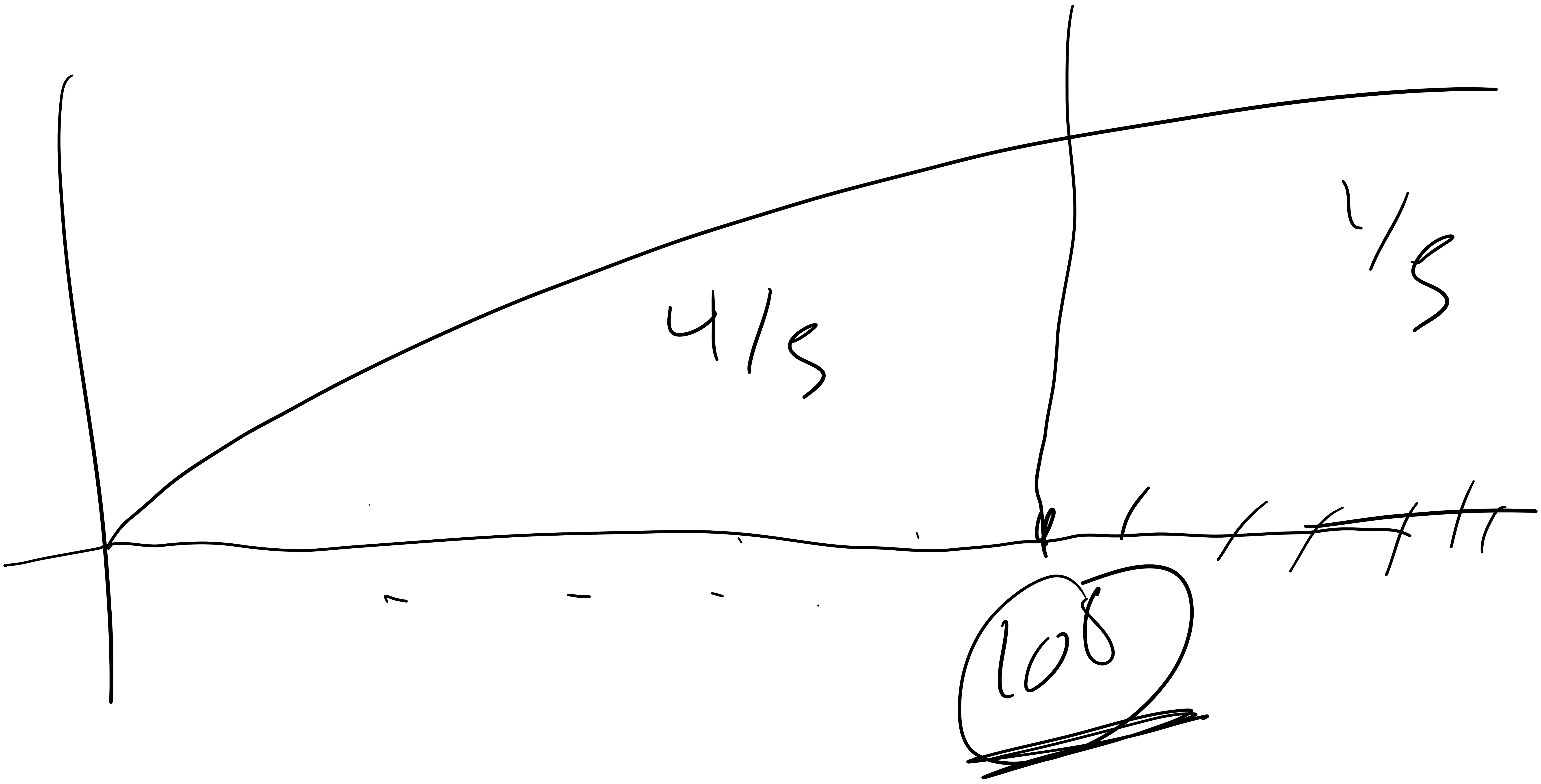
πυκνότητα

$$f(x) = \frac{6}{5} 10^{-12} \sqrt{x} \ , \quad x \in (0, 10^8)$$

στο $(0, 10^8)$

και $P(X_1 = 10^8) = \dfrac{1}{5}$





α) EX_1, $Var(X_1) =$;

β) ES, $Var(S)$

γ) Μέσο πλήθος κινδύνων που πραγματοποιούνται

100ση

α) $EX_1 = \int_0^{10^8} x f(x)\,dx + 10^8 P(X_1 = 10^8)$

$$= \int_0^{10^8} x \, \frac{6}{5} 10^{-12} \sqrt{x} \, dx + 10^8 \, \frac{1}{5}$$

$$= \frac{6}{5} 10^{-12} \left. \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right|_0^{10^8} + \frac{10^8}{5}$$

$$= \frac{12}{25} 10^{-12} 10^{20} + \frac{10^8}{5} \leftarrow \frac{5}{25}$$

$$= \frac{17}{25} 10^8$$

$$E X_1^2 = \int_0^{10^8} x^2 \frac{6}{5} 10^{-12} \sqrt{x} dx +$$

$$(10^8)^2 \frac{1}{5} = \cdots = \frac{19}{35} 10^{16}$$

$$\text{var}(X_1) = E(X_1^2) - (E X_1)^2$$

f) $\Xi = I_1 + \quad + I_4$

$$E\Xi = 4 E I_1 = 4 \cdot 500 \cdot \frac{1}{100} = 5$$

$$ES = nq\,EX_1$$

$$\frac{ES}{E\Xi} = \frac{nq\,EX_1}{nq} = EX_1$$

§3.2

έστω X_i, I_i $i=1,\dots,n$

όπως πιο πριν.

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i I_i \qquad (1+\theta)ES$$

Ασφάλιστρο: $(1+\theta)ES$

αρχή της μαθηματικής ελπίδας

πόσο πρέπει να είναι το θ;

Ζητάμε για δεδομένο $a \in (0,1)$ μικρό

να βρεθεί το ελάχιστο θ ώστε

$$P(S > (1+\theta)ES) \le a \quad (*)$$

Εκτιμούμε την $P(S > (1+\theta)ES)$

με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

$(Y_i)_{i \geq 1}$ ανεξάρτητες ισόνομες

$EY_1 = \mu \quad Var(Y_1) = \sigma^2 \in (0,\infty)$

τότε $$\frac{Y_1 + \dots + Y_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \Rightarrow Z \sim N(0,1)$$

Υποθ. ότι στην S εφαρμόζεται το Κ.Ο.Θ. δηλ.

$$\frac{S - ES}{\sqrt{Var(S)}} \approx Z \sim N(0,1)$$

Τότε

$$P(S > (1+\theta)ES)$$

$$= P\left(\frac{S-ES}{\sqrt{Var(S)}} > \frac{\theta ES}{\sqrt{Var(S)}}\right)$$

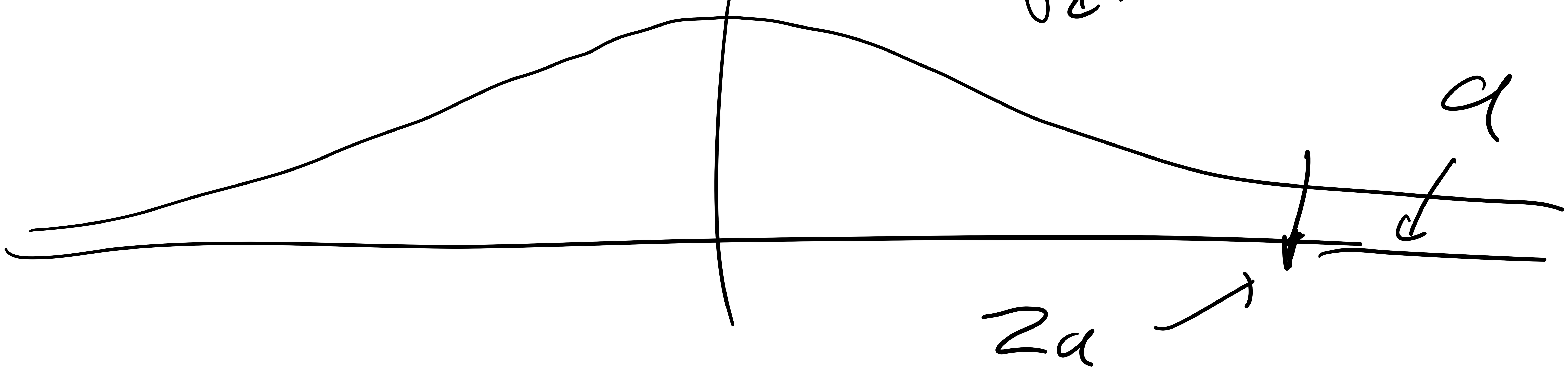
$$\approx P\left(Z > \frac{\theta ES}{\sqrt{Var(S)}}\right)$$

$Z \sim N(0,1)$

Θέλουμε

$$P\left(Z > \frac{\theta ES}{\sqrt{Var(S)}}\right) \le a \quad (*)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



∃ μοναδικό z_a : $P(Z>z_a)=a$

10ης

(**) $\iff \dfrac{\theta ES}{\sqrt{Var(S)}} \geq z_a$

$$\theta \geq z_a \frac{\sqrt{Var(S)}}{ES}$$

Άσκηση $n=10^4$, $q=10^{-2}$

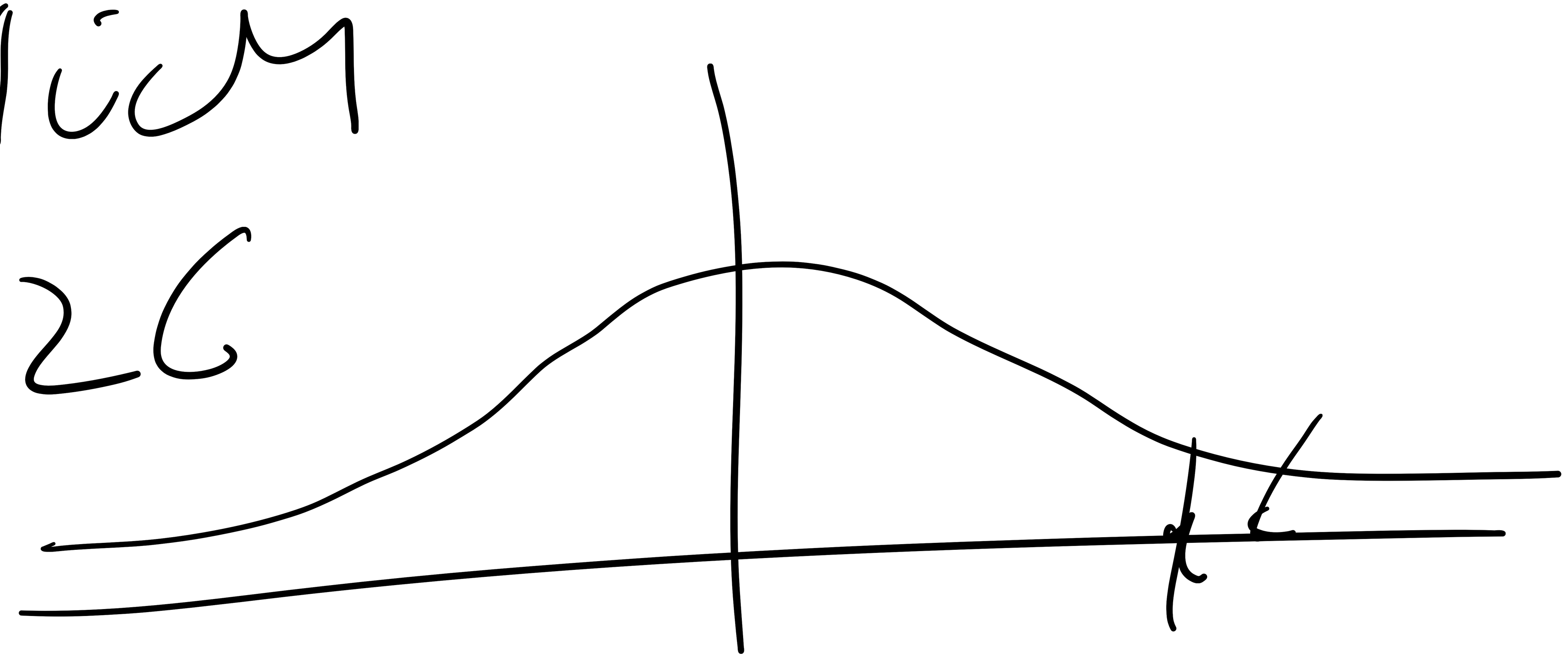
$X_i \sim U(0,100)$.

(a) Για ποιο θ ισχύει

$P(S>(1+\theta)ES)=0.01$?

Λύση

$z_{0.01} \approx 2,326$



$$EX_1 = 50$$

$$ES = nq\,EX_1 = 10^4\,10^{-2} \cdot 50$$
$$= 100 \cdot 50 = 5000$$

$$\mathrm{Var}(S) = nq\,\mathrm{Var}(X_1) + nq(1-q)(EX_1)^2$$

$$= 10^4\,10^{-2}\,\frac{(100-0)^2}{12} +$$
$$10^4 \cdot 10^{-2} \cdot 50^2 = 330833{,}33$$

$$\theta = z_\alpha\,\frac{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}{ES}$$