$u_1(x) = x$ $\leftarrow$ $u_1(1000) = 100\, u_1(10)$

$u_2(x) = \log x$

$u_2(10^3) = 3\, u(10)$

$u(x+1) - u(x) \simeq u'(x)$

$u_1'(x) = 1$

$u_2'(x) = \dfrac{1}{x}$

§1.3 Απόλυτος συντελεστής αποστροφής κινδύνου

$u$ συν. ωφελιμότητας

Υποθ. ότι $u'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ και $\exists\, u''$

Ορισμός: ο απολ. συντ. αποστρ. κινδύνου σε πλούτο $w$ είναι ο αριθμός

$$r_u(w) := -\frac{u''(w)}{u'(w)} = -\left(\log u'(w)\right)'$$

Αν $\tilde{u}$ είναι άλλη συνάρτηση ωφέλειας για το ίδιο άτομο, τότε $\exists\, a>0, b\in\mathbb{R}$ ώστε $\tilde{u}(x) = a\,u(x) + b$

$$r_{\tilde{u}}(w) = -\frac{a\,u''(w)}{a\,u'(w)} = -r_u(w)$$

$r_u(w) > 0 \iff u''(w) < 0 \iff$ η κοίλη κινδυνοφοβο άτομο

Παραδείγματα

i) $u(x) = \log x,\ x>0$

$$u'(x) = \frac{1}{x} \qquad u''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$r_u(x) = -\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

ii) $u(x) = -e^{-ax}$, $a>0$

$u'(x) = a e^{-ax}$, $u''(x) = -a^2 e^{-ax}$

$$r_u(x) = \frac{a^2 e^{-}}{a e^{-}} = a$$

iii) $u(x) = x^c$, $x>0$, $c>0$ σταθερά

- - -

Σημασία του $r_u$

---

Έστω άτομο με σ.ω. $u$, περιουσία $w$.
Αντιμετ. κίνδυνο $X$ με $EX=\mu$, $Var(X)=\sigma^2$
Έστω $P$ το μέγιστο ποσό που δέχεται να πληρώσει για να ασφαλιστεί από τον $X$.
Τότε $$P \approx \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot r_u(w-\mu)$$

Απόδ.

Το $P$ ικανοποιεί

επιλογή $w - X$, $w - P$

$$E\,u(w-X) = E\,u(w-P)$$

$$\Rightarrow \quad u(w-P) = E\big(u(w-X)\big) \quad (*)$$

Υπόθ: ότι $P \simeq \mu$.

$$\left( x_0 \quad f(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \varepsilon^k \right)$$

$$= f(x_0+\varepsilon)$$

$$u(w-P) = u(\underbrace{w-\mu}+\overbrace{\mu-P}^{\varepsilon})$$

$$\simeq u(w-\mu) + u'(w-\mu)(\mu-P) \quad (1)$$

$$u(w-X) = u(w-\mu+\overbrace{\mu-X}^{\text{μικρό}}) = u(w-\mu)$$

$$+ \underline{u'(w-\mu)(\mu-X)} + \frac{1}{2}u''(w-\mu)\underbrace{(\mu-X)^2}$$

$$E\,u(w-X) \simeq u(w-\mu) + 0 + \frac{1}{2}u''(w-\mu)\,Var(X) \quad (2)$$

$$u'(w-\mu)(\mu-P) = \frac{1}{2}u''(w-\mu)\sigma^2$$

$$\mu - P = \frac{1}{2}\frac{u''(w-\mu)}{u'(w-\mu)}\sigma^2$$

$$= -\frac{1}{2} r_u(w-\mu)\sigma^2$$

$$\Rightarrow \quad P \approx \mu + \frac{1}{2} r_u(w-\mu)\cdot\sigma^2$$

$r_u > 0$

## §1.4 Ασφαλιστικά σχήματα

(Κατσόπουλος, Κεφ. 5)

Ασφαλιστικό σχήμα λέγεται κάθε

$I : [0,\infty) \to [0,\infty)$ με $I(x) \le x \ \forall x$

$I(x)$ = το ποσό που πληρώνει ο ασφαλιστής αν γίνει ζημιά $x$.

## Παραδείγματα

i) Πλήρης ασφάλιση: $I(x) = x$

ii) Αναλογική ασφάλιση: $I(x) = \lambda x$, $\lambda \in [0,1]$

iii) Υπερβάλλουσας ζημίας: $I(x) = (x-a)_+$, $a > 0$
$= \max\{x-a, 0\}$

Ο ασφαλισμένος πληρώνει

$K(x) = x - I(x)$ ← ίδια κράτηση.

Καθορισμός κόστους μέσω συνάρτησης ωφελιμότητας

## Πλευρά του ασφαλισμένου

Ασφαλισμένος έχει στόχο $u$, πλούτο $w$, αντιμετωπίζει κίνδυνο $X$,
$G$ το μέγιστο που δέχεται να πληρώσει.
Πρέπει

Σενάρια: δεν ασφαλ., ασφαλίζεται

$w - X$     $w - G - X + I(X)$

$$E\,u(w-X) = E\,u(w-G-X+I(X))$$

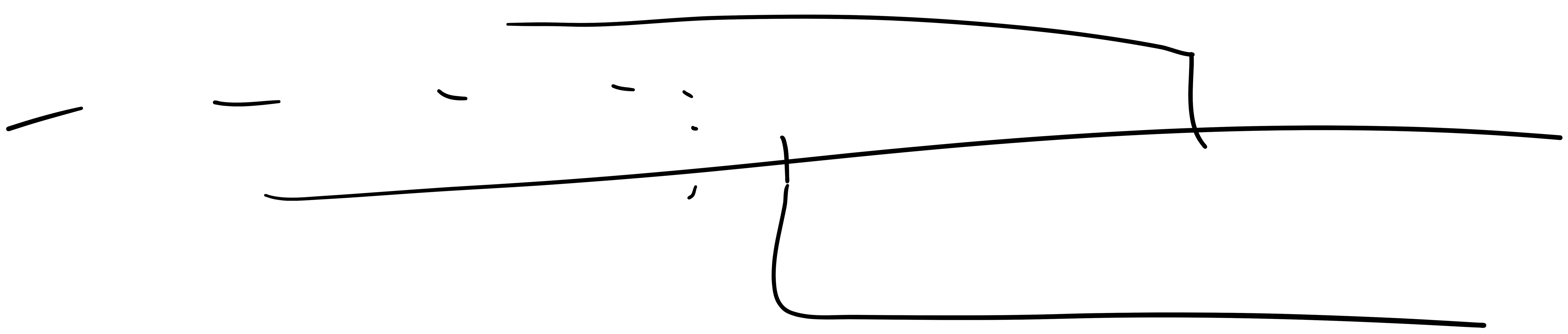
<u>Πλευρά του ασφαλιστή</u>

έχει σ. ω. $u$, πλούτο $w$,
ασφαλίζει κίνδυνο $X$.

$G$ το ελάχιστο που ζητάει

2 σενάρια: $w$ , $w+G-I(X)$

$$u(w) = E\,u(w+G-I(X))$$



<u>Παράδειγμα</u> Υπολογισμός του $G$ παράγοντα

όταν $u(x) = -e^{-ax}$

$$H(X) = X - I(X)$$

i) Ασφαλισμένος.

$$E\,u(w-X) = E\{u(w-G-H(X))\}$$

$$-E\left(e^{-a(w-X)}\right) = -E\left(e^{-a(w-G-H(X))}\right)$$

$$\underbrace{E\left(e^{aX}\right)}_{=M_X(a)} = e^{aG} E\left(e^{aH(X)}\right)$$

$$G = \frac{1}{a} \log \frac{M_X(a)}{M_{H(X)}(a)}$$

ii) Ασφαλιση

$$u(w) = E\left(u(w+G-I(X))\right)$$

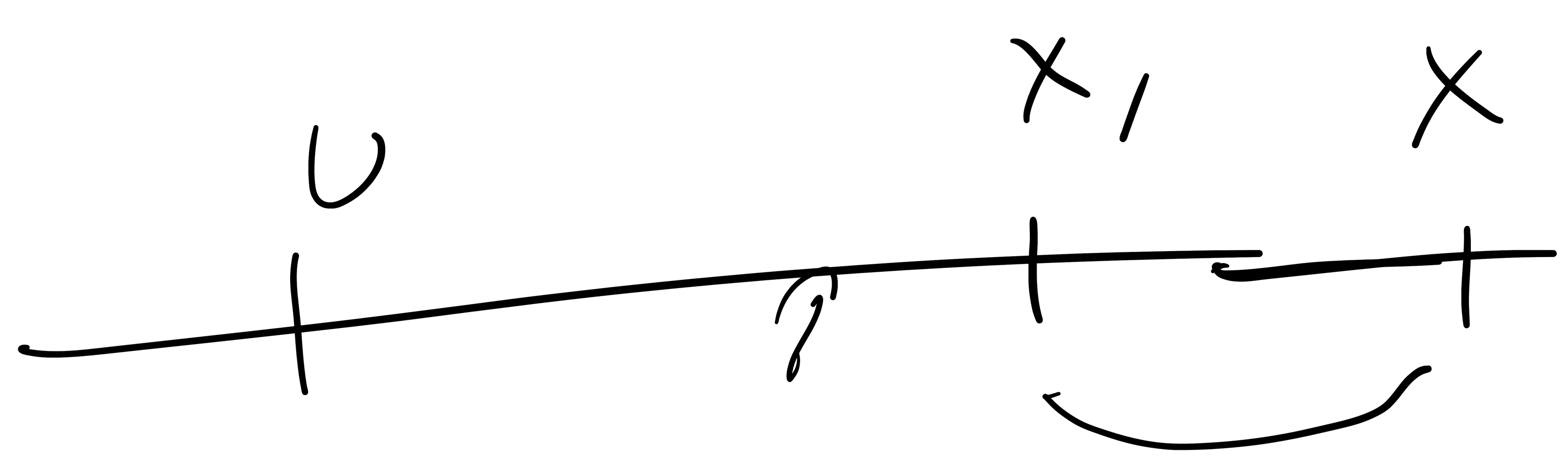
$$-e^{-aw} = -E\left(e^{-aw-aG+aI(X)}\right)$$

$$1 = e^{-aG}\, \underline{E\left(e^{aI(X)}\right)}$$

$$G = \frac{1}{a} \log M_{I(X)}(a)$$

---

$$I(X) = (X - x_1)_+$$



Συμβολισμοί

$G(x_1)$: ασφάλιστρο που πληρώνει ο ασφαλισμένος όταν $I(x) = (x - x_1)_+$

$G^A(x_1)$: - - - ο ασφαλιστής

. - . .

$G(\lambda)$: ο ασφαλισμένος

όταν $I(x) = \lambda x$

$G^A(\lambda)$: . . . ο ασφαλιστής

όταν $I(x) = \lambda x$

**β)** Ασφαλιστική εταιρία έχει αναλάβει χαρτοφυλάκιο συμβολαίων που οι αποζημιώσεις χαρακτηρίζονται από την κατανομή $Pareto$ με παραμέτρους $\alpha = 3$ και $\lambda = 100$. Η ασφαλιστική εταιρία αντασφαλίζει το χαρτοφυλάκιο με κάλυψη υπερβάλλοντος ζημιάς ιδίας κράτησης $M$ ώστε το $90\%$ των αποζημιώσεων πληρώνονται από την ασφαλιστική εταιρία.

(i) Υπολογίστε το $M$.

(2,5 μονάδες)

(ii) Υπολογίστε το αναμενόμενο ύψος της αποζημίωσης που θα πληρώσει ο αντασφαλιστής για τα συμβάντα στα οποία συμμετέχει.

(2,5 μονάδες)

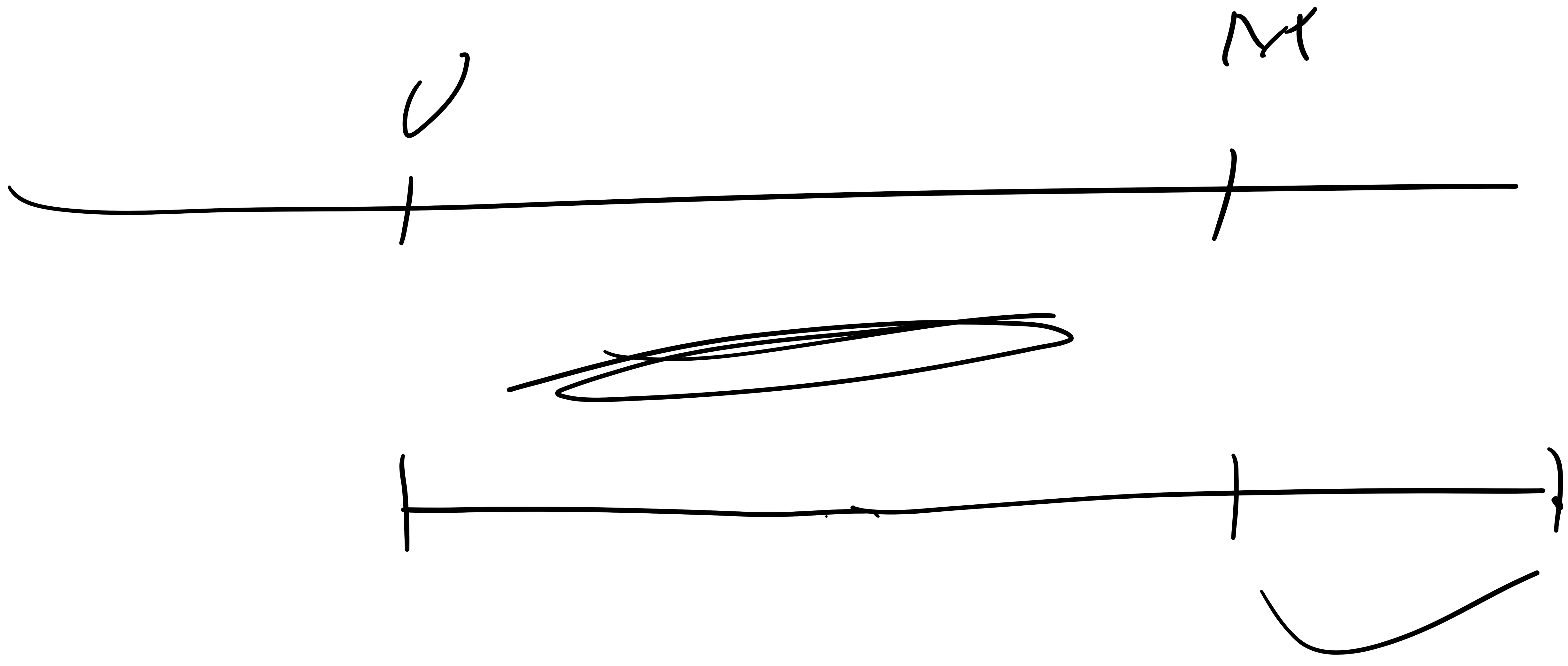
Δίνεται η Σ.Κ της $Pareto$: $F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha}$, $x > 0$

$-\lambda^a(\lambda+x)^{-a}$

$F'(x) = \dfrac{a\lambda^a}{(\lambda+x)^{a+1}}$

Λύση

i) Έστω $X$ κίνδυνος με σ.κ. $F$




$$P(X \leq M) = 0.9$$

$$F(M) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + M}\right)^{\alpha}$$

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda+M}\right)^{\alpha} = 0.1 \Rightarrow \frac{\lambda}{\lambda+M} = 0.1^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$1 + \frac{M}{\lambda} = 10^{\frac{1}{\alpha}} \qquad M = \lambda\left(10^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \simeq 77.82$$

ii) $$E\left((X-M)_+\right) = \int_0^{\infty} (x-M)_+ f_X(x)\,dx$$

$$= \int_M^\infty (x-M) \frac{a\lambda^a}{(\lambda+x)^{a+1}}\, dx$$

$$= \int_M^\infty (x-M) \left(-\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^a\right)' dx$$

$$= \underline{-(x-M)\frac{\lambda^a}{(\lambda+x)^a}}\Bigg|_M^\infty + \int_M^\infty \frac{\lambda^a}{(\lambda+x)^a}\, dx$$

$$= \lambda^a \frac{(\lambda+x)^{-a+1}}{-a+1}\Bigg|_M^\infty = \frac{\lambda^a}{a-1}\,\frac{1}{(\lambda+M)^{a-1}}$$

$$= \frac{\lambda^a}{a-1}\,\frac{1}{(\lambda\, 10^{\frac{1}{a}})^{a-1}} = \frac{\lambda}{(a-1)\, 10^{\frac{a-1}{a}}}$$

$$= \frac{100}{3\cdot 10^{\frac{3}{4}}} \simeq 5.92$$

$$EX = \int_0^\infty (1-F(t))\,dt = \dots = \frac{\lambda}{a-1} = \frac{100}{3} = 33.\overline{3}$$

<u>Άσκηση 1</u> (ισοδύναμη με φ. 5)

Ασφαλισμένος με $u(x) = -e^{-x}$, $x$ περιουσία $w$, αντιμετωπίζει κίνδυνο με συχνότητα

$$f(x) = \begin{cases} c\,e^{-x} & x \in (0,w) \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus (0,w) \end{cases}$$

με $c = \dfrac{e^w}{e^w - 1}$

Να βρεθούν τα $G(\lambda)$, $G(x_1)$ με $\lambda \in (0,1)$, $x_1 \in (0,w)$

λύση

<u>$G(\lambda)$</u> πρέπει

$$Eu(w-X) = Eu(w-G-X+\lambda X)$$

$$E(e^{-w+X}) = E(e^{-w+G+X-\lambda X})$$

$$E(e^X) = e^G E(e^{(1-\lambda)X})$$

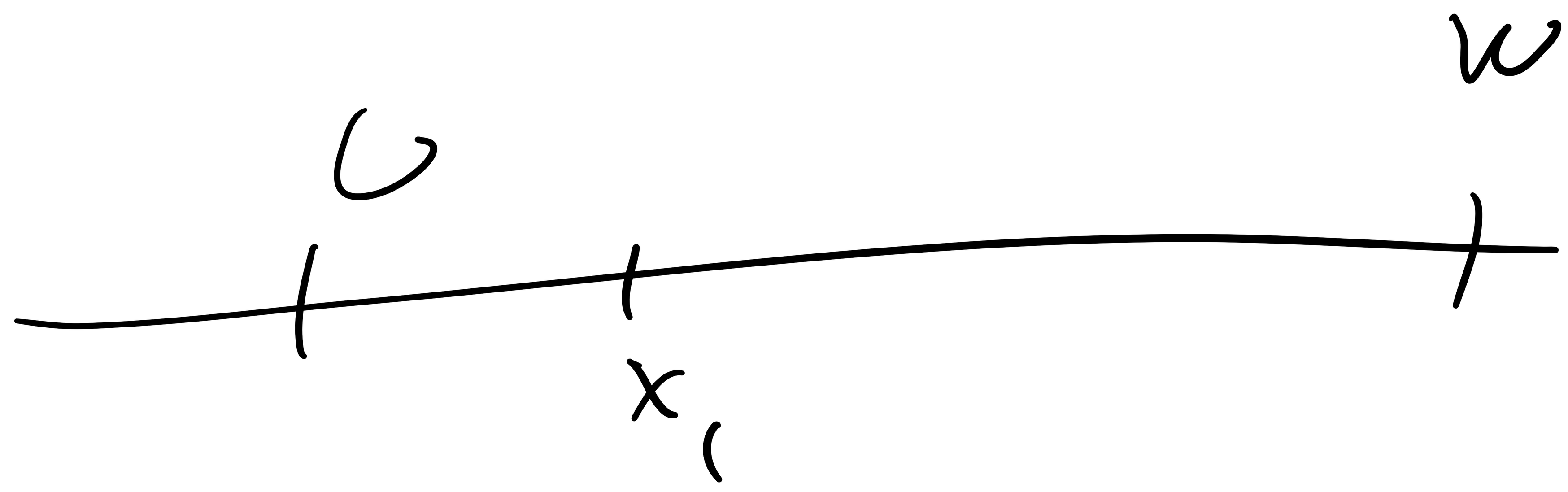
$$\int_0^w e^x \underline{c}\, e^{-x}\, dx = e^G \int_0^w e^{(1-\lambda)x} \underline{c}\, e^{-x}\, dx$$

$$w = e^G \int_0^w e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= e^G \left. \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right|_0^w = e^G \frac{e^{-\lambda w} - 1}{-\lambda}$$

$$e^G = \frac{\lambda w}{1 - e^{-\lambda w}}$$

$\underline{G(x_1)}$




$$Eu(w-X) = Eu(w - G - \underset{X - I(X)}{H(X)})$$

$$H(x) = x - (x - x_1)_+ = \begin{cases} x_1 & \text{on } x > x_1 \\ x & \text{on } x \le x_1 \end{cases}$$

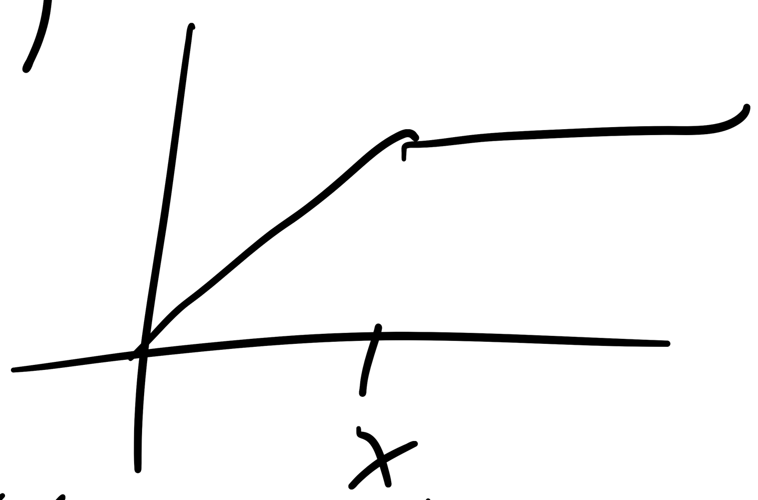
$$= x \wedge x_1$$

$$E\left(e^{-w+X}\right) = E\left(e^{-w+\sigma + X \wedge x_1}\right)$$

$$E\left(e^{X}\right) = e^{\sigma} E\left(e^{X \wedge x_1}\right)$$

$$\int_0^w e^x \underline{c} e^{-x} dx = e^{\sigma} \int_0^w e^{x \wedge x_1} \underline{c} e^{-x} dx$$

$$\left( E h(X) = \int h(x) f(x) dx \right)$$



$$w = e^{\sigma}\left( \int_0^{x_1} e^{x \wedge x_1 - x} dx + \int_{x_1}^{w} e^{x \wedge x_1 - x} dx \right)$$

$$= e^{\sigma}\left( x_1 + \int_{x_1}^{w} e^{x_1 - x} dx \right)$$

$$\ldots \quad \sigma = \ldots$$

# Κεφάλαιο 2

## §2.1 Αρχές υπολογισμού του ασφαλίστρου

$X$ κίνδυνος

ποσό το ασφάλιστρο, $\pi(X)$, για τον $X$.

α) Αρχή ισοδυναμίας

$$\pi(X) := EX$$

β) Αρχή της μαθηματικής ελπίδας

$$\pi(X) := (1+a)EX \quad , \quad a>0$$

γ) Αρχή διασποράς

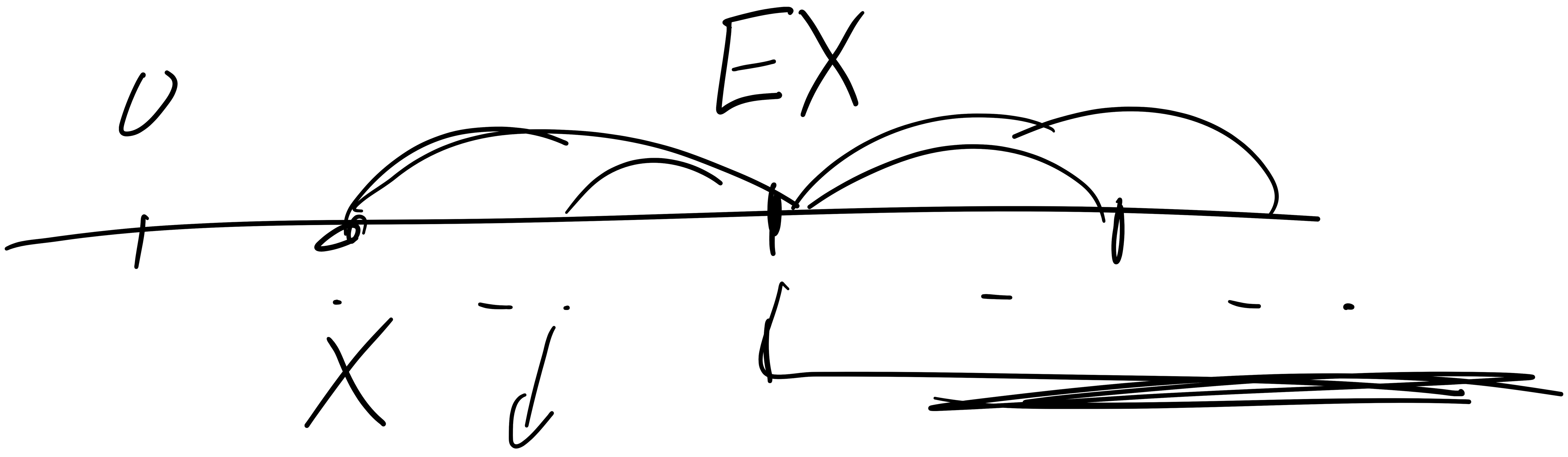
$$\pi(X) := EX + a\,\mathrm{Var}(X)$$

$$\mathrm{Var}(X) = E\left((X-EX)^2\right)$$

δ) Αρχή ημιδιασποράς

$$\pi(X) := EX + a\,\mathrm{Var}_+(X)$$

$$Var_+(X) = E\left(\left((X-EX)_+\right)^2\right)$$




$$(X-EX)_+ = 0$$

ε)

ζ) Εκθετική αρχή:

$$\pi(X) = \frac{1}{a}\log E(e^{aX}), \quad a>0$$

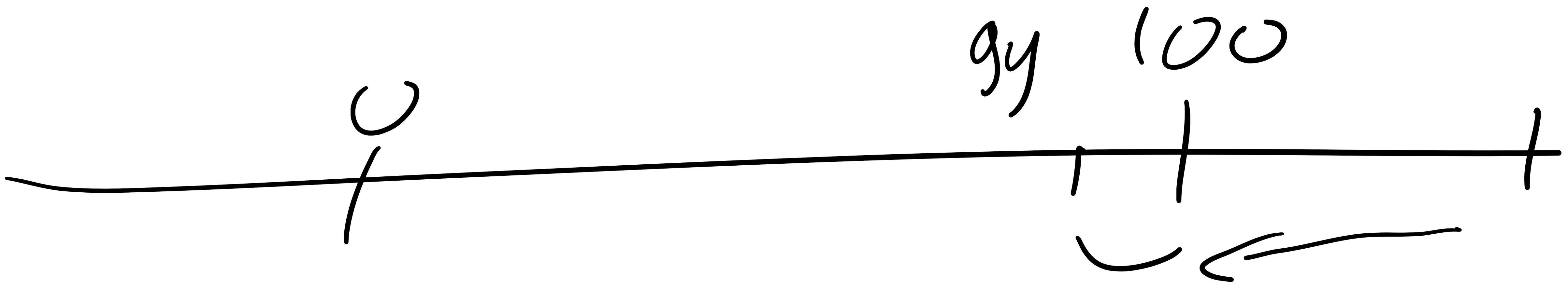
η)

θ) Αρχή της μέγιστης απώλειας

- Αν ο $X$ είναι φραγμένος με μέγιστη τιμή $\xi$,

$$\xi := \inf\{s \in \mathbb{R} : \underline{P(X \le s) = 1}\}$$

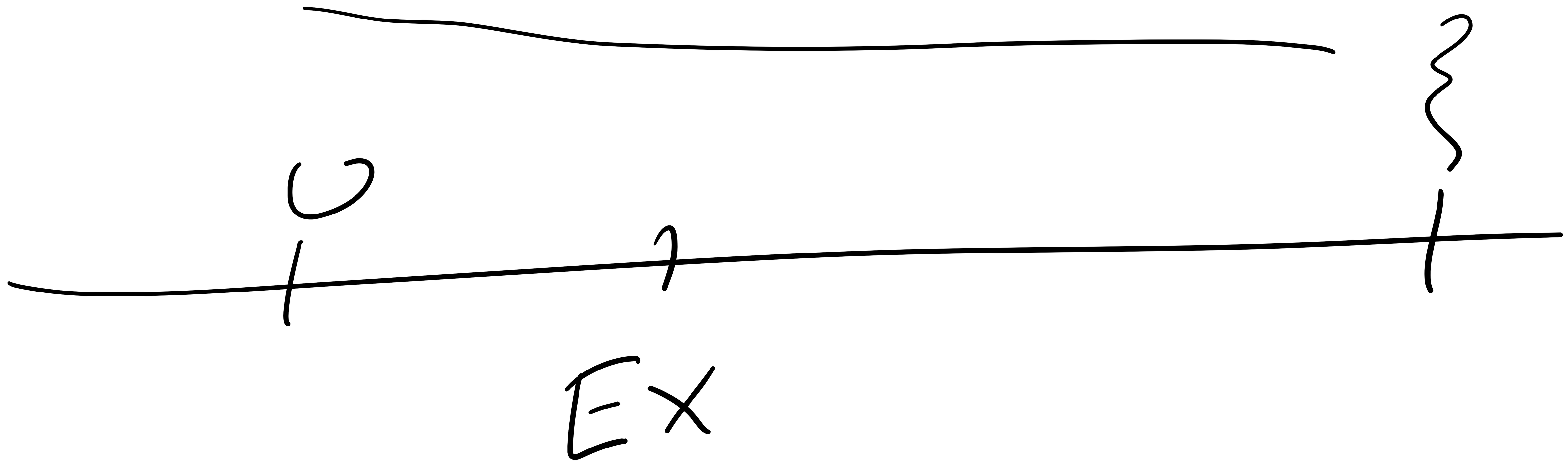
αν αυτό το σύνολο είναι $\neq \emptyset$




$$P(X \le 99) = \frac{99}{100} \neq 1$$

Για $\rho \in [0,1]$ ορίζουμε

$$\Pi_\rho(X) = \underline{\rho E(X) + (1-\rho)\xi}$$

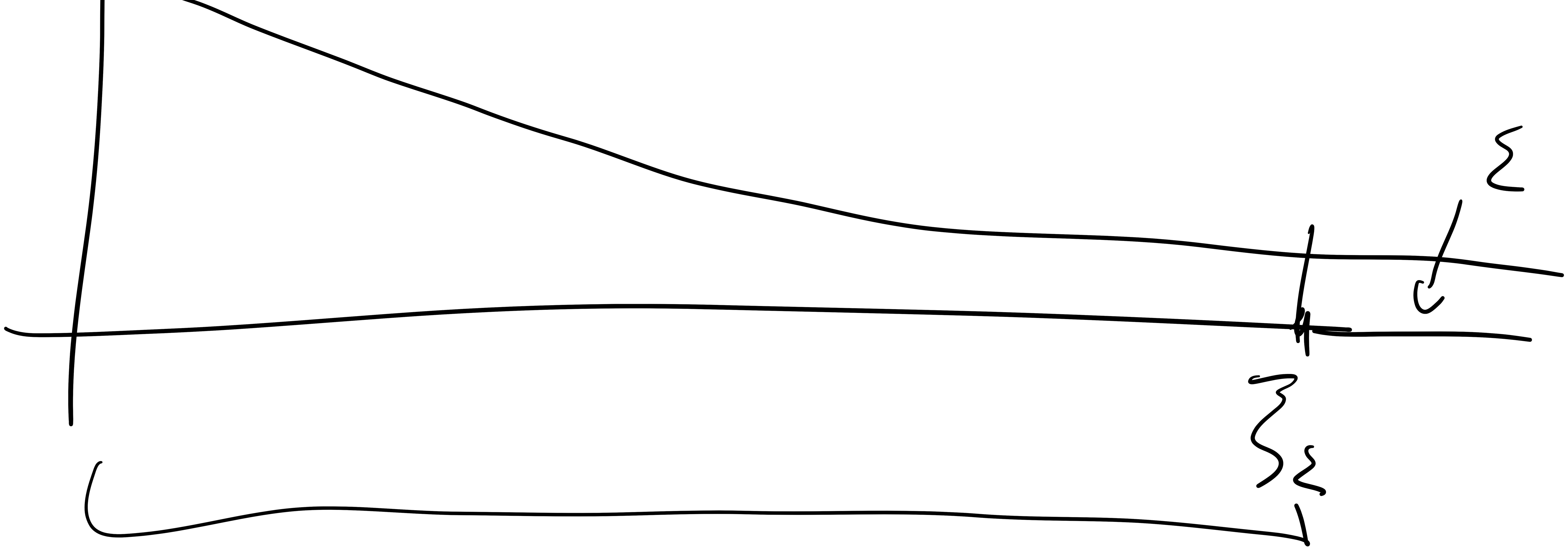



$\rho = 0,3$

- Αν ο $X$ δεν είναι φραγμένος
  π.χ. $f(x) = e^{-x} 1_{x>0}$

Θεωρούμε $\rho, \varepsilon \in (0,1)$

Θέλουμε $\xi_\varepsilon = \inf\{x : P(X > x) \le \varepsilon\}$



Και $\Pi_{\rho|\varepsilon}(X) = \rho EX + (1-\rho)\xi_\varepsilon$

**Άσκηση** Ποιο το ασφάλιστρο κινδύνου απώλειας για $\rho, \varepsilon \in (0,1)$ στα εξής δύο σενάρια για την πυκνότητα του $X$.

α) $f(x) = e^{-x} 1_{x>0}$

β) $f(x) = \dfrac{a}{(1+x)^{a+1}} 1_{x>0}$ $\quad a>1$ δεδομένο

Λύση


$$P(X>M) = 0$$

α) $EX = \int_0^\infty x f(x)\,dx = 1$

$\xi_\varepsilon = \inf\{x : P(X>x) \le \varepsilon\}$

$$P(X>x) = \int_x^{\infty} e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_x^{\infty} = e^{-x}$$

$$\xi_\varepsilon = \inf\{x:\ e^{-x} \le \varepsilon\} = \inf\{x:\ x \geq \log\frac{1}{\varepsilon}\} = \log\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Pi_{p,\varepsilon}(X) = p + (1-p)\log\frac{1}{\varepsilon}$$

б)

$$EX = \int_0^{\infty} x\,\frac{a}{(1+x)^{a+1}}\,dx =$$

$$= \int_0^{\infty} x\left(-(1+x)^{-a}\right)'dx = -x(1+x)^{-a}\Big|_0^{\infty}$$

$$1-a<0$$

$$+\int_0^{\infty}(1+x)^{-a}\,dx = \frac{(1+x)^{-a+1}}{-a+1}\Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{a-1}$$

$$P(X>x) = \int_x^{\infty} \frac{a}{(1+t)^{a+1}}\,dt$$

$$= -(1+t)^{-a}\Big|_x^{\infty} = \frac{1}{(1+x)^a}$$

$$\xi_\varepsilon = \inf\left\{x : \frac{1}{(1+x)^a} \le \varepsilon\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{a}} - 1$$

---

Άσκηση. Ίδια ερώτηση αν η $X$ έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$f_X(k) = \binom{50}{k} q^k (1-q)^{50-k}$$

$$k = 0, 1, \ldots, 50$$

$q = 0.1$ $\qquad X \sim Bin(50, q)$

λύση

$$EX = 50 \cdot q = 5$$

$X$ είναι φραγμένη με $\xi = 50$

$$\Pi_p(X) = p \cdot 5 + (1-p)50$$

Επιθυμητές ιδιότητες αρχών ασφάλισης

---

Έστω $\Pi$ μια αρχή ασφάλισης

1) $\Pi(X) \geq EX$

2) $\Pi(X) \leq \xi \quad (= \inf\{s : P(X \leq s) = 1\})$

3) $\Pi(X + c) = \Pi(X) + c$

4) $\Pi(X + Y) = \Pi(X) + \Pi(Y)$

για $X, Y$ ανεξάρτητους κινδύνους

5) $\Pi(X) = \Pi(\underbrace{\Pi(X|Y)})$

Άσκηση Η $\Pi(X) = EX$ ικανοποιεί τις 1-5.

Λύση

1) ου

2) $EX \leq \xi$

3) ν

4) $E(X+Y) = EX + EY$

5) $\pi(\pi(X|Y)) = E(E(X|Y))$

$= EX = \pi(X)$

<u>Άσκηση</u> Ποιες από τις 1–5 ικανοποιεί η εκθετική αρχή;

Λύση

$$\pi(X) = \frac{1}{a} \log E(e^{aX})$$

1) $$\frac{1}{a} \log E(\underbrace{e^{aX}}) \geq \frac{1}{a} E(\log e^{aX})$$

$$= \frac{1}{a} E(aX) = EX$$

( $\varphi$ konkav $\varphi(EX) \geq E\varphi(X)$
Jensen )

2) $X \leq \xi \Rightarrow e^{aX} \leq e^{a\xi}$

$E(e^{aX}) \leq e^{a\xi}$

$\log E(e^{aX}) \leq a\xi$

$\frac{1}{a} \log ( \quad ) \leq \xi$

$\pi(X) \leq \xi$

3) $\pi(X+c) = \frac{1}{a} \log E(e^{a(X+c)})$

$= \frac{1}{a} \log ( e^{ac} E(e^{aX}))$

$= c + \frac{1}{a} \log E(e^{aX}) = c + \pi(X)$

4) $\rho(X+Y) = \frac{1}{a} \log E(e^{aX} e^{aY})$

$$= \frac{1}{a} \log\left(E(e^{aX}) E(e^{aY})\right)$$

$$= \frac{1}{a}\left(\log E(e^{aX}) + \log E(e^{aY})\right)$$

5) $\rho(\rho(X|Y)) = \frac{1}{a} \log E(e^{a\rho(X|Y)})$

$(*)$

$$\rho(X|Y) = \frac{1}{a} \log E(e^{aX|Y})$$

$$= \frac{1}{a} \log E(e^{aX}|Y)$$

$$e^{a\rho(X|Y)} = E(e^{aX}|Y)$$

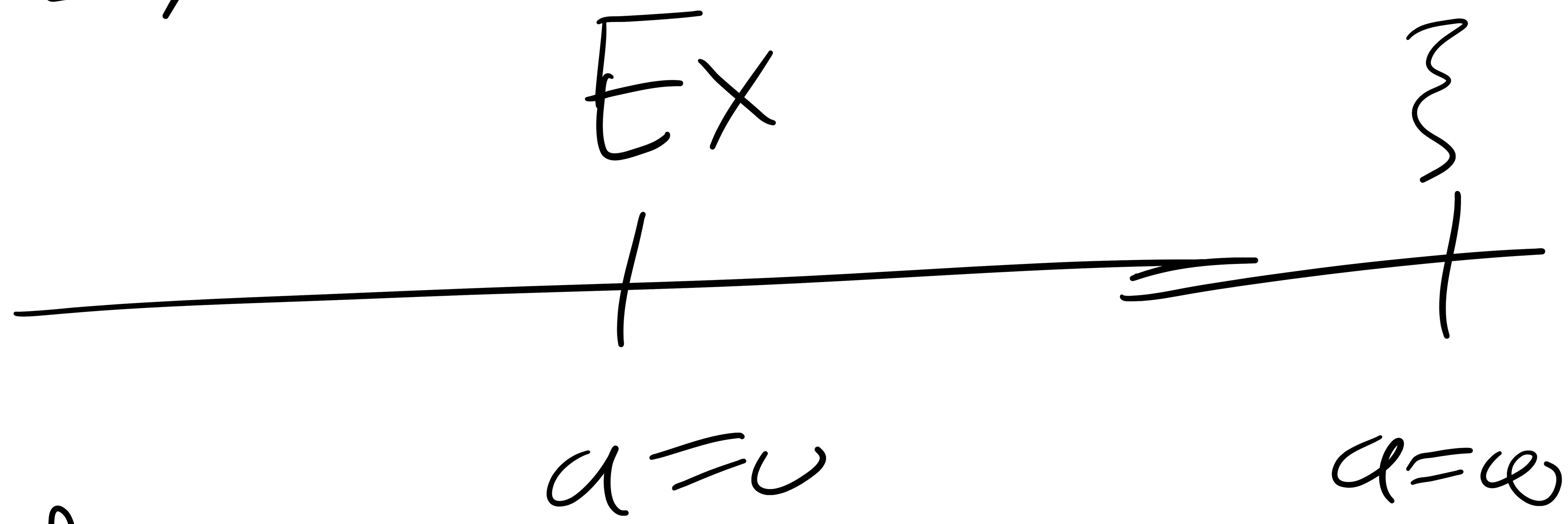
Άρα $(*) = \frac{1}{a} \log E(E(e^{aX}|Y))$

$$= \frac{1}{a} \log E(e^{aX}) = \rho(X)$$

Επίσης η $\pi_a(X) = \frac{1}{a} \log E(e^{aX})$

είναι $\nearrow$ ως προς $a$ και

$$\lim_{a \to 0^+} \pi_a(X) = EX$$




Λύση

Έστω $a < b$.

Θέλουμε

$$\frac{1}{a} \log E(e^{aX}) \le \frac{1}{b} \log E(e^{bX})$$

$$E(e^{aX}) \le \left(E(e^{bX})\right)^{\frac{a}{b}}$$

$$E(e^{aX})^{\frac{b}{a}} \le E(e^{bX})$$

$\varphi(t) = t^{\frac{b}{a}}$ κυρτή $\frac{b}{a} \geq 1$

Jensen

$$\varphi\left(E(e^{aX})\right) \leq E\left(\varphi(e^{aX})\right)$$

$$E(e^{aX})^{\frac{b}{a}} \leq E(e^{bX})$$

$$g(a) = \log E(e^{aX}), \quad g(0) = 0$$

$$\lim_{a \to 0^+} \frac{1}{a} \log E(e^{aX}) = \lim_{a \to 0^+} \frac{g(a)}{a}$$

$$= g'(0)$$

$$g'(a) = \frac{E(Xe^{aX})}{E(e^{aX})}$$

$$g'(0) = \lim_{a \to 0^+} g'(a) = EX$$

<u>Άσκηση</u> $\quad P(X) = \frac{1}{a} \log E(e^{aX})$

Τότε $\quad P(2X) > 2P(X)$

Λύση

$$x \iff \frac{1}{\cancel{a}} \log E(e^{2aX}) > \frac{2}{\cancel{a}} \log E(e^{aX})$$

$$E(e^{2aX}) > E(e^{aX})^2$$

Jensen για $\varphi(t) = t^2$

$$\varphi(E(e^{aX})) \le E(\varphi(e^{aX}))$$