Αναλογιστικά Μαθηματικά - Θεωρία Κινδύνου

Εξετάσεις 12 Ιουνίου 2019

1. [Βαθμοί 2] Δίνεται κίνδυνος X με πυκνότητα

$$f_X(x) := \begin{cases} \frac{2}{9}x & \text{αν } x \in (0,3), \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus (0,3). \end{cases}$$

Να υπολογιστεί το ασφάλιστρο για αυτόν τον κίνδυνο με βάση τις αρχές της μέσης τιμής, της διασποράς, και της μέγιστης απώλειας.

2. [Βαθμοί 3] (α) Κινδυνόφοβο άτομο με αρχική περιουσία w ασφαλίζεται έναντι κινδύνου X με βάση την αρχή ωφελιμότητας. Το μέγιστο ποσό που προτίθεται να δώσει είναι G. Δείξτε ότι $G \geq \mathbf{E}(X)$.

(β) Άτομο με περιουσία $w = 10$ και συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = -1/(x+1)$ έχει δικαίωμα σε κέρδος X το οποίο ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 10)$. Έχει και την επιλογή να ανταλλάξει το δικαίωμα στο κέρδος X με ποσό K. Για ποιές τιμές του K το άτομο δέχεται την ανταλλαγή; Σας κάνει εντύπωση το ότι το άτομο δέχεται την ανταλλαγή ακόμα και για κάποιες τιμές του K που είναι γνησίως μικρότερες του $\mathbf{E}(X)$;

3. [Βαθμοί 2] Θεωρούμε άτομο με συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = -e^{-x}$ και περιουσία $w = 1$. Ο κίνδυνος X έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 10)$. Το άτομο πρόκειται να αγοράσει μια ασφάλιση που του δίνει ποσό $(2/3)X$ αν $X > 2$ ενώ δεν του δίνει τίποτα αν $X \leq 2$. Ποιο είναι το μέγιστο ποσό που δέχεται να πληρώσει το άτομο για να αγοράσει αυτή την ασφάλιση;

4. [Βαθμοί 2] Δίνεται χαρτοφυλάκιο n ανεξάρτητων ισόνομων κινδύνων ώστε ο καθένας να έχει πυκνότητα $f(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{x>0}$ και να πραγματοποιείται (ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους) με πιθανότητα $q = 0.01$. Έστω S το σύνολο των ζημιών. Για δοσμένο $\varepsilon > 0$ να βρεθεί για ποιες τιμές του n ισχύει $\sqrt{\text{Var}(S)}/\mathbf{E}(S) < \varepsilon$.

5. [Βαθμοί 2] Θεωρούμε τη διαδικασία πλεονάσματος με ζημιές $(X_i)_{i\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με καθεμία να έχει ροπογεννήτρια $M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$ για κάθε $t \in (-1, 1)$.

(α) Να υπολογιστούν οι $\mathbf{E}(X_1), \mathbf{E}(X_1^2)$.

(β) Να υπολογιστεί ο συντελεστής προσαρμογής αν δίνεται το περιθώριο ασφαλείας θ.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2.5 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Απαντήσεις

1. Υπολογίζουμε ότι

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^3 x\frac{2}{9}x\,dx = \frac{2}{9}\int_0^3 x^2\,dx = \frac{2}{9}\cdot\frac{3^3}{3} = 2,$$
$$\mathbf{E}(X^2) = \int_0^3 x^2\frac{2}{9}x\,dx = \frac{2}{9}\int_0^3 x^3\,dx = \frac{2}{9}\cdot\frac{3^4}{4} = \frac{9}{2},$$
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \{\mathbf{E}(X)\}^2 = \frac{1}{2}.$$

Επίσης, το supremum των τιμών που μπορεί να πάρει η X είναι $\xi = 3$. Άρα τα ζητούμενα ασφάλιστρα είναι

$$\pi_\theta(X) = (1+\theta)\cdot 2,$$
$$\pi_a(X) = 2 + a\cdot\frac{1}{2},$$
$$\pi_\theta(X) = p\cdot 2 + (1-p)\cdot 3 = 3 - p.$$

2. (α) Έχουμε $u(w-G) = \mathbf{E}\{u(w-X)\}$. Όμως με χρήση της ανισότητας Jensen έχουμε ότι

$$\mathbf{E}\{u(w-X)\} \le u(\mathbf{E}(w-X)) = u(w-\mathbf{E}(X)).$$

Άρα $u(w-G) \le u(w-\mathbf{E}(X))$, και επειδή η u είναι γνησίως αύξουσα, έπεται ότι $G \ge \mathbf{E}(X)$.

(β)

$$\mathbf{E}\{u(w+X)\} = -\frac{1}{10}\int_0^{10}\frac{1}{1+w+x}\,dx = -\frac{1}{10}\{\log(w+11) - \log(11) = -\frac{1}{10}\log\frac{21}{11}.$$

Έτσι

$$u(w+K) \ge \mathbf{E}\{u(w+X)\} \Leftrightarrow -\frac{1}{11+K} \ge -\frac{1}{10}\log\frac{21}{11} \Leftrightarrow K \ge \frac{10}{\log(21/11)} - 11 \approx 4.46$$

Είναι γνωστό από τη θεωρία ότι, σε ένα τέτοιο σενάριο, το ελάχιστον ποσό που δέχεται ένα κινδυνόφοβο άτομο ώστε να κάνει την ανταλλαγή είναι μικρότερο ή ίσο από την $\mathbf{E}(X)$.

3. Η κάλυψη είναι η $I(X)$ όπου $I(x) = \frac{2}{3}x\mathbf{1}_{x>2}$. Το μέγιστο ποσό G που δέχεται το άτομο να πληρώσει ικανοποιεί την εξίσωση

$$\mathbf{E}\{u(w-X)\} = \mathbf{E}\{u(w-G-X+I(X))\}.$$

Υπολογίζουμε τα δύο μέλη της.

$$\mathbf{E}\{u(w-X)\} = -\int_0^{10}\frac{1}{10}e^{-w+x}\,dx = -\frac{e^{-w}}{10}(e^{10}-1).$$
$$\mathbf{E}\{u(w-G-X+I(X))\} = -\frac{e^{-w+G}}{10}\left(\int_0^2 e^x\,dx + \int_2^{10} e^{x/3}\,dx\right) = -\frac{e^{-w+G}}{10}\left(e^2 - 1 + 3(e^{10/3} - e^{2/3})\right).$$

Άρα

$$G = \log\frac{e^{10}-1}{e^2 - 1 + 3(e^{10/3} - e^{2/3})}.$$

4. Έχουμε ότι $\mathbf{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = 1$, άρα από θεωρία, $\mathbf{E}(S) = nq$, $\mathrm{Var}(S) = nq + nq(1-q) = nq(2-q)$. Έτσι,

$$\frac{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}{\mathbf{E}(S)} = \sqrt{\frac{2-q}{qn}}.$$

Αυτό είναι $< \varepsilon$ αν και μόνο αν $n > \frac{2-q}{q} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} = 199/\varepsilon^2$.

5. Από το γνωστό ανάπτυγμα της ροπογεννήτριας σε δυναμοσειρά, έπεται ότι $\mathbf{E}(X^k)/k! = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα $\mathbf{E}(X) = 1, \mathbf{E}(X^2) = 2$.

(β) Η δοσμένη ροπογεννήτρια γράφεται επίσης ως $M(t) = 1/(1-t)$, οπότε (αφού $\mathbf{E}(X) = 1$) η εξίσωση για τον συνελεστή προσαρμογής είναι

$$1 + (1+\theta)r = \frac{1}{1-r},$$

που η μοναδική μη μηδενική της λύση είναι η $r = \theta/(1+\theta)$.