Ασκήσεις στα κεφάλαια 1-5

1. Για έναν κίνδυνο με γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $q \in (0,1)$ (δηλαδή $P(X=k) = (1-q)^k q$ για $k = 0, 1, 2, \ldots$) να βρεθεί το ασφάλιστρο βασισμένο στην αρχή της μέγιστης απώλειας για δεδομένα p και ϵ.

2. Για έναν κίνδυνο με ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,4)$ να βρεθούν τα ασφάλιστρα βασισμένα στις αρχές της διασποράς και της ημιδιασποράς.

3. Στο παιχνίδι της Αγίας Πετρούπολης (Άσκηση 1, σελ. 37), ποιά είναι η μέση τιμή του κέρδους του παίχτη;

4. Τροποποιούμε το παιχνίδι της Αγίας Πετρούπολης ως εξής. Επιλέγουμε έναν φυσικό αριθμό $N > 1$. Αν εμφανιστεί για πρώτη φορά κορώνα στην ρίψη n, ο παίκτης κερδίζει 2^n αν $n \leq N$ ενώ διαφορετικά δεν κερδίζει τίποτα. Έστω K το κέρδος του παίχτη.

(α) Ποιά είναι η μέση τιμή του K;

(β) Αν στην περίπτωση που πιο πάνω συμβεί $n > N$ ο παίκτης κερδίζει ένα σταθερό ποσό A, ποιά είναι η μέση τιμή του K;

5. Αν για την τυχαία μεταβλητή X ισχύει $P(X = 2^n) = (1/2)^n$ για κάθε $n \geq 1$, να βρεθεί η ωφελιμότητα της για ένα άτομο που έχει συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = \log x$ (δηλ. η $E(u(X))$).

6. Άσκηση 9, σελίδα 39.

7. Ποιές απο τις παρακάτω συναρτήσεις μπορούν να έχουν το ρόλο της συναρτησης ωφελιμότητας για ένα λογικό κινδυνόφοβο άτομο; Ως πεδίο ορισμού καθεμίας θεωρούμε το $(0, \infty)$.

$$\log x, e^x, e^{-x}, \sin x, -1/x, x^2, x^{1/3}.$$

8. Άσκηση 16, σελίδα 53.

9. Ένα άτομο έχει περιουσία w και αντιμετωπίζει έναν κίνδυνο που κατανέμμεται ομοιόμορφα στο $(0, a)$ (υποθέτουμε ότι $a < w$, δηλ. δεν κινδυνεύει με χρεοκοπία). Η συνάρτηση ωφελιμότητας το ατόμου είναι

$$u(x) = \begin{cases} x(2w - x) & x \in (0, w), \\ w^2 & x \geq w. \end{cases}$$

(α) Είναι το άτομο κινδυνόφοβο ή κινδυνόφιλο;

(β) Ποιά είναι μέση τιμή του κινδύνου;

(γ) Ποιό είναι το μέγιστο ποσό που το άτομο προτίθεται να πληρώσει για να ασφαλιστεί απέναντι στον κίνδυνο;

10. Ένα άτομο με περιουσία $w_1 = 5$ αντιμετωπίζει τυχαίο κίνδυνο X που παίρνει τις τιμές 1, 4. Το άτομο έχει συνάρτηση ωφέλειας $u_1(x) = \log x$ και θεωρεί ότι $P(X = 1) = P(X = 4) = 1/2$. Ο ασφαλιστής έχει περιουσία $w_2 = 20$, συνάρτηση ωφέλειας $u_2(x) = \sqrt{x}$, και θεωρεί ότι $P(X = 1) = 1/3, P(X = 4) = 2/3$.

(α) Πόσο είναι το μέγιστο ποσό που το άτομο προτίθεται να καταβάλει για να ασφαλιστεί. Πόσο είναι το ελαχιστο ποσό που δέχεται ο ασφαλιστής για να παράξει κάλυψη. Τελικά προχωρούν τα δύο μερη σε συμφωνία;

(β) Αν και ο ασφαλιστής θεωρεί ότι $P(X = 1) = P(X = 4) = 1/2$, τότε ποιό είναι το ελάχιστο ποσό που ζητάει;

11. Άσκηση 5 (i), σελίδα 71.

Σχόλια

1. Σχέση (4), σελ. 19. Το ξ_ϵ πρέπει να είναι στο $\mathbb{N}$ γιατί μόνο στους μή αρνητικούς ακεραίους αλλάζει τιμή η $P(X > x)$. Υπολογίζουμε την $P(X > x) = P(X \geq x + 1)$ για $x \in \mathbb{N}$ και βρίσκουμε

$$\xi_\epsilon = \lceil \frac{\log \epsilon}{\log(1-q)} - 1 \rceil.$$

Με $\lceil z \rceil := \min\{k \in \mathbb{Z} : z \leq k\}$ τον ακέραιο αμέσως μεγαλύτερο απο το z.

2. Σχέση (5), σελ. 20. Η διασπορά της $U(0, 4)$ είναι $4/3$ και η ημιδιασπορά $2/3$, για λόγους συμμετρίας τυχαίνει να είναι το μισό της διασποράς.

3. ∞

4. (α) N. (β) $N + 2^{-N}A$.

5. $2 \log 2$. Χρησιμοποιήστε την σχέση

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

για $|x| < 1$.

6. Ζητάμε $u(\pi) = E(u(X))$ όπου X είναι το τυχόν κέρδος του παιχνιδιού. Θα χρειαστείτε τη σχέση

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

Σημείωση: Παραγώγιση αυτής δίνει το άθροισμα της Άσκησης 5.

7. Οι δεύτερη, τρίτη, τέταρτη, και έκτη δεν είναι. Ζητάμε αύξουσα και κοίλη.

8. Για τον υπολογισμό του $G_{\min}$ οδηγείται κανείς στην εξίσωση $3G^2 + 3wG - 2w^2 = 0$, μόνο μία ρίζα της είναι θετική. Για τον υπολογισμό του $K_{\max}$, η εξίσωση είναι $3K^2 - 9wK + 4w^2 = 0$. Μόνο μια λύση της είναι μικρότερη του w.

Σημείωση: Το $K_{\max}$ μπορεί να υπολογιστεί και με ένα τρικ. Δηλαδή ισχύει $K_{\max} = w - G_{\min}$. Αυτό το βλέπουμε ως εξής. Η εξίσωση για το $G_{\min}$ είναι

$$u(w) = E(u(w + G_{\min} - X)) \tag{1}$$

ενώ για το $K_{\max}$ είναι $u(w) = E(u(w - K_{\max} + X))$. Επειδή όμως $X \sim U(0, w)$, έπεται ότι η X έχει την ίδια κατανομή με την $w - X$. Άρα

$$u(w) = E(u(w - K_{\max} + w - X)).$$

Συγκρίνοντας με την (1) έπεται $G_{\min} = -K_{\max} + w$.

9. (γ) Με χρήση της (1) σελ. 43 βρίσκουμε $G = a/\sqrt{3}$.

10. (α) Με χρήση της (1), σελ. 43, βρίσκουμε $G_{\max} = 3$, και με χρήση της (2), σελ. 44, και Mathematica βρίσκουμε $G_{\min} = 85 - 8\sqrt{105} \approx 3.02439$ (η μόνη λύση της $97 = 5x + 4\sqrt{(19 + x)(16 + x)}$) . Δεν γίνεται συμφωνία. Ο ασφαλιστής δίνει στο ενδεχόμενο ζημιάς μεγέθους 4 μεγαλύτερη πιθανότητα απο οτι ο ασφαλιζόμενος.

(β) Τώρα $G_{\min} = 809/320 = 2.528125$. Γίνεται συμφωνία.

11. Βρίσκουμε ότι $\lambda = 1/2$ και $x_1 = 3/4$. Για τις διασπορές χρησιμοποιούμε τον τύπο $\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - (EY)^2$.