Πιθανότητες ΙΙ

Τεστ εξάσκησης

Μάιος 2013

Θέμα 1.(α) Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή Cauchy δηλαδή με πυκνότητα

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να δειχθεί ότι για $x > 1$ ισχύει

$$\frac{1}{2\pi x} \leq P(X > x) \leq \frac{1}{\pi x}.$$

(β) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με κατανομή Cauchy. Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{X_n}{n} = \infty.$$

Θέμα 2. Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας και $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές.

(i) Πότε λέμε ότι οι X, Y είναι ανεξάρτητες;

(ii) Να δειχθεί ότι τα εξής είναι ισοδύναμα

(α) Οι X, Y είναι ανεξάρτητες.

(β) Για κάθε $f, g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ (Borel) μετρήσιμες ισχύει $\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$.

Θέμα 3. Έστω ακολουθία $(X_k)_{k\geq 1}$ τυχαίων μεταβλητών ώστε $X_k \sim U(0, k)$, και $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ για κάθε $n \geq 1$. Για κάθε $a > 2$, να δειχθεί ότι $S_n/n^a \to 0$ κατά πιθανότητα καθώς $n \to \infty$.

Θέμα 4. Έστω X, Y ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές ώστε $X + Y \sim N(0, 1)$. Ποιά η κατανομή των X, Y;

Θέμα 5. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ώστε $X_n \sim \text{Poisson}(\lambda_n)$ όπου $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ είναι ακολουθία θετικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. Να δειχθεί ότι

$$\frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \Rightarrow Z$$

καθώς $n \to \infty$, όπου $Z \sim N(0, 1)$.

Θέμα 6. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με κατανομή $U(0, 2)$. Θέτουμε $Y_n := X_1 X_2 \cdots X_n$. Να δειχθεί ότι $E(Y_n) = 1$ για κάθε $n \geq 1$, ενώ $\lim_{n\to\infty} Y_n = 0$.

[Υποδ.: Για το δεύτερο ερώτημα, θέτουμε $S_n = \log X_2 + \cdots + \log X_n$, και τότε $Y_n = e^{S_n} = e^{n\frac{S_n}{n}}$.]

Λύσεις

1. (α) Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε
$$\mathbb{P}(X > x) = \int_x^\infty \frac{1}{\pi(1+t^2)}\, dt,$$
ενώ για $t \geq 1$ ισχύει
$$\frac{1}{2t^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$
(β) Χρησιμοποιούμε το ερώτημα (α) και το δεύτερο Λήμμα Borel-Cantelli για να δείξουμε ότι για κάθε $M > 0$ το σύνολο
$$\Gamma_M := \left\{ \overline{\lim} \frac{X_n}{n} \geq M \right\}$$
έχει πιθανότητα 1. Άρα έχει πιθανότητα 1 και το
$$\cap_{k\in\mathbb{N}} \Gamma_k = \left\{ \overline{\lim} \frac{X_n}{n} = \infty \right\}.$$
Το ζητούμενο έπεται πιο γρήγορα ως εξής. Όπως και για την $\mathbb{P}(\Gamma_M) = 1$, δείχνουμε ότι με πιθανότητα 1 ισχύει $\overline{\lim}\, X_n/(n \log n) \geq 1$.

2. Θεωρία.

3. Για $\varepsilon > 0$, η ανισότητα Markov δίνει
$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n^a} \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{\mathbb{E}(S_n)}{\varepsilon n^a} = \frac{1}{\varepsilon n^a} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{\varepsilon n^a} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2} = \frac{n(n+1)}{4\varepsilon n^a} \to 0$$
για $n \to \infty$.

4. Αν $Z \sim N(0, \sigma^2)$, τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση της είναι $\phi_Z(t) = \exp(\sigma^2 t^2/2)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Η υπόθεση δίνει
$$e^{t^2/2} = \phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t) = (\phi_X(t))^2.$$
Άρα $\phi_X(t) = \exp(t^2/4) = \exp(a^2 t^2/2)$ με $a = 1/\sqrt{2}$. Άρα $X, Y \sim N(0, 1/2)$.

5. Χρησιμοποιούμε χαρακτηριστικές συναρτήσεις.

6. Επειδή $\mathbb{E}(X_1) = 1$, η ανεξαρτησία των $X_1, X_2, \ldots, X_n$ δίνει ότι
$$\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(X_1 X_2 \cdots X_n) = \mathbb{E}(X_1) \cdots \mathbb{E}(X_n) = 1.$$
Από τον νόμο τον μεγάλων αριθμών, με πιθανότητα 1 ισχύει
$$\frac{S_n}{n} \to \mathbb{E}(\log X_1) = \frac{1}{2}\int_0^2 \log x\, dx = \frac{1}{2}[x \log x - x]_0^2 = \log 2 - 1 < 0.$$
Άρα $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$, και $Y_n = e^{S_n} \to 0$ για $n \to \infty$.