Πιθανότητες II

Τελική Εξέταση, 13 Ιανουαρίου 2014

Θέμα 1. (20 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες έχουμε ότι για κάθε $x \geq 10$ ισχύει

$$\mathbf{P}(X_1 > x) \geq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 ισχύει $\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n/n^2 \geq 1$.

Θέμα 2. (20 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \to [0, \infty)$ τυχαία μεταβλητή, με $\mathbf{E}(X) = 1$. Ορίζουμε το μέτρο πιθανότητας $\mathbf{Q} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ με

$$\mathbf{Q}(A) = \int_A X(\omega)\, d\mathbf{P}(\omega) = \mathbf{E}(X\mathbf{1}_A).$$

Να δειχθεί ότι για κάθε τυχαία μεταβλητή $Y : \Omega \to [0, \infty)$ ισχύει

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(Y) = \mathbf{E}(YX).$$

Η μέση τιμή στο αριστερό μέλος υπολογίζεται ως προς το μέτρο $\mathbf{Q}$ ενώ στο δεξί ως προς το μέτρο $\mathbf{P}$.

Θέμα 3. (20 Βαθμοί) Έστω X τυχαία μεταβλητή με πραγματικές τιμές και $\mathbf{E}(e^{2X}) < \infty$. Να δειχθεί ότι

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \mathbf{P}(X > t) \leq -2.$$

Υπόδειξη: $X > t \Leftrightarrow e^{2X} > e^{2t}$.

Θέμα 4. (25 Βαθμοί) **(α)** Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$, δηλαδή με συνάρτηση πιθανότητας $f_X(k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ για $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots,\}$ και $f_X(k) = 0$ για $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Να δειχθεί ότι η χαρακτηριστική της συνάρτηση ισούται με $\phi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(β) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ώστε $X_n \sim \text{Poisson}(n)$. Να δειχθεί ότι

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \Rightarrow Z$$

καθώς $n \to \infty$ (σύγκλιση κατά κατανομή), όπου $Z \sim N(0, 1)$.

Θέμα 5. (25 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών ώστε $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = 2) = 1/2$. Θέτουμε $Y_n := X_1 X_2 \cdots X_n$ για κάθε $n \geq 1$.

(α) Να υπολογιστεί η $\mathbf{E}(Y_n)$.

(β) Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Y_n}{\mathbf{E}(Y_n)} = 0.$$

Υπόδειξη: Δείξτε ότι το όριο $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{Y_n}{\mathbf{E}(Y_n)}$ υπάρχει και είναι < 0. Γιατί αρκεί αυτό;

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!