Πιθανότητες II

Τελική Εξέταση, 9 Σεπτεμβρίου 2014

Θέμα 1. (15 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $C \in \mathcal{A}$. Θέτουμε

$$\mathcal{F} := \{A \subset \Omega : A \cap C \in \mathcal{A}\}.$$

Να δειχθεί ότι η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα στο Ω.

Θέμα 2. (20 Βαθμοί) **(α)** Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, και $(A_n)_{n\geq 1}$ αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$. Να δειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$.

(β) Να δειχθεί ότι αν στο (α) δεν υποθέσουμε ότι η $(A_n)_{n\geq 1}$ είναι αύξουσα, τότε η $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$ δεν ισχύει απαραίτητα.

Θέμα 3. (25 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με

$$\mathbf{P}(X_n = 1) = 1/3, \mathbf{P}(X_n = 0) = 2/3$$

για κάθε $n \geq 1$.

(α) Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 ισχύει $\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n = 1$.

(β) Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 η $(X_n)_{n\geq 1}$ δεν συγκλίνει.

Θέμα 4 (25 Βαθμοί) **(α)** Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών ώστε η X_n να ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $a_n = 1/2^n$ (πυκνότητα $f_{X_n}(x) = a_n e^{-a_n x} \mathbf{1}_{x>0}$). Θέτουμε $A_n = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ για κάθε $n \geq 1$. Να δειχθεί ότι $A_n \Rightarrow Y$ καθώς $n \to \infty$ (σύγκλιση κατά κατανομή), όπου Y είναι τυχαία μεταβλητή της οποίας η κατανομή να προσδιοριστεί.

Θέμα 5. (20 Βαθμοί) **(α)** Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{E}(X_1) = 1, \mathrm{Var}(X_1) = 2$. Θέτουμε $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ για κάθε $n \geq 1$. Να υπολογιστούν τα όρια

(α) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n > \sqrt{n})$

(β) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n < n/2)$

(γ) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n < n)$

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!