Πιθανότητες ΙΙ

Εξέταση 27 Μαρτίου 2014

Θέμα 1. (25 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, ορισμένων σε κοινό χώρο πιθανότητας, καθεμία με κατανομή γεωμετρική με παράμετρο $p = 1/2$. Δηλαδή η X_1 παίρνει τιμές στο $\{1, 2, \ldots\}$ και

$$\mathbf{P}(X_1 = k) = (1-p)^{k-1}p$$

για κάθε ακέραιο $k \geq 1$.

(α) Να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(X_1 > k) = (1-p)^k$ για κάθε ακέραιο $k \geq 1$.

(β) Να δειχθεί ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, με πιθανότητα 1, ισχύει

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{X_n}{\log n} \leq (1+\varepsilon)\frac{1}{\log 2}.$$

Θέμα 2. (20 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, και $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$.

(α) Να οριστούν τα σύνολα $\liminf_{n\geq 1} A_n, \limsup_{n\geq 1} A_n$ και να δειχθεί ότι είναι στοιχεία της $\mathcal{A}$.

(β) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < \infty$, να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 0$.

Θέμα 3 (20 Βαθμοί) Έστω $c > 0$, και $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, ορισμένων σε κοινό χώρο πιθανότητας, ώστε $X_n \sim \Gamma(nc, n)$ για κάθε $n \geq 1$. Να δειχθεί ότι $X_n \to c$ κατά πιθανότητα καθώς $n \to \infty$, όπου c συμβολίζει την σταθερή τυχαία μεταβλητή με τιμή 1.

Θέμα 4. (25 Βαθμοί) **(α)** Έστω X, Y ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Θέτουμε $Z := X - Y$. Να δειχθεί ότι σε κάθε $t \in \mathbb{R}$, η χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi_Z(t)$ της Z είναι πραγματικός αριθμός και μάλιστα μη αρνητικός.

(β) Έστω W τυχαία μεταβλητή με κατανομή την ομοιόμορφη στο $[-1, 1]$. Να δεχθεί ότι δεν υπάρχουν X, Y ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές ώστε $W = X - Y$.

Θέμα 5. (20 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών ώστε $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = 2) = 1/2$. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_1 X_2 \cdots X_n > 2^{n/2}).$$

Σημείωση: Μία τυχαία μεταβλητή X με κατανομή $\Gamma(a, \lambda)$, όπου $a, \lambda > 0$, έχει πυκνότητα

$$f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\, x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x>0},$$

μέση τιμή a/λ, διασπορά a/λ^2, και χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi_X(t) = 1/\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^a$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Λύσεις

1.

2. Θεωρία.

3. Από τα δεδομένα, $\mathbf{E}(X_n) = cn/n = c$ και $\mathrm{Var}(X_n) = cn/n^2 = c/n$. Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$, η ανισότητα Chebyshev δίνει

$$\mathbf{P}(|X_n - c| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{\varepsilon^2} = \frac{c}{\varepsilon n} \to 0$$

για $n \to \infty$.

4. (α)

$$\begin{aligned}\phi_Z(t) = \mathbf{E}(e^{it(X-Y)}) = \mathbf{E}(e^{itX})\mathbf{E}(e^{-itY}) &= \mathbf{E}(e^{itX})\mathbf{E}(e^{-itX}) \\ &= \mathbf{E}(e^{itX})\overline{\mathbf{E}(e^{itX})} = |\mathbf{E}(e^{itX})|^2 \in [0, \infty).\end{aligned}$$

(β) Η χαρακτηριστική συνάρτηση της W σε ένα $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ισούται με

$$\phi_W(t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{itx}\, dx = ... = \frac{\sin t}{t},$$

που παίρνει και αρνητικές τιμές για κατάλληλα $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α), παίρνουμε το ζητούμενο.

5. Η ζητούμενη πιθανότητα γράφεται ως

$$\mathbf{P}(X_1 X_2 \cdots X_n > 2^{n/2}) = \mathbf{P}(\log X_1 + \log X_2 + \cdots + \log X_n > n\frac{1}{2}\log 2).$$

Θέτουμε $Y_k := \log X_k$ για κάθε $k \geq 1$ ακέραιο. Οι $(Y_k)_{k\geq 1}$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες, με μέση τιμή $\mu := \mathbf{E}(Y_1) = \frac{1}{2}\log 2$ και διασπορά $\sigma^2 := \mathrm{Var}(X_1) \in (0, \infty)$, της οποίας η ακριβής τιμή δεν μας ενδιαφέρει. Έστω $S_n := Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$. Η πιό πάνω πιθανότητα ισούται με

$$\mathbf{P}(S_n > n\mu) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} > 0\right) \to \mathbf{P}(Z > 0) = \frac{1}{2}$$

καθώς $n \to \infty$. Z είναι μια τυχαία μεταβλητή με κατανομή $N(0, 1)$. Χρησιμοποιήσαμε το κεντρικό οριακό θεώρημα.