Πιθανότητες ΙΙ

Τελική Εξέταση, 17 Ιουνίου 2015

Θέμα 1. (20 Βαθμοί) Έστω $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία μετρήσιμων συνόλων σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

(α) Πως ορίζεται το $\limsup_{n\geq 1} A_n$ και πως περιγράφεται πρακτικά;

(β) Να δειχθεί ότι $\overline{\lim}\,\mathbf{P}(A_n) \leq \mathbf{P}(\limsup_{n\geq} A_n)$ και να δοθεί παράδειγμα όπου ισχύει γνήσια ανισότητα.

Θέμα 2. (5 Βαθμοί) Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0,\infty)$. Υποθέτουμε ότι $\mathbf{E}X \in \mathbb{R}$ και $\mathrm{Var}(X) \leq 1/2$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}(\mathbf{E}X - 1 \leq X \leq 2\mathbf{E}X) \geq \frac{1}{2}.$$

Θέμα 3. (15 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών σε κοινό χώρο πιθανότητας και με τιμές στο $\mathbb{R}$. Ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι μετρήσιμες ως προς την τελική σ-άλγεβρα $\mathcal{C}_\infty := \cap_{k=1}^{\infty}\sigma(X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots)$ των $(X_n)_{n\geq 1}$;

(α) $X := \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n$

(β) $Y := \inf_{n\geq 1} X_n$

(γ) $Z := \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kX_k$

Θέμα 4 (15 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών καθεμία τους με πυκνότητα $f(x) = x^{-2}\mathbf{1}_{x>1}$.

(α) Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{X_n}{n} \geq 1.$$

(β) Να προσδιοριστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

Θέμα 5. (20 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με την εξής κατανομή: $\mathbf{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}$ και $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$, για κάθε $n \geq 1$. Τι ισχύει από τα παρακάτω για την ακολουθία $(X_n)_{n\geq 1}$; Να αιτιολογηθεί η απάντηση.

(α) Συγκλίνει σχεδόν βέβαια σε τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0,\infty]$.

(β) Συγκλίνει κατά πιθανότητα σε τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$.

(γ) Συγκλίνει κατά κατανομή σε τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$.

(δ) Είναι σφιχτή.

Θέμα 6. (15 Βαθμοί) Έστω $\alpha \in (0,2]$. Είναι γνωστό ότι υπάρχει τυχαία μεταβλητή με χαρακτηριστική συνάρτηση την $\phi_X(t) = e^{-|t|^\alpha}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Έστω n θετικός ακέραιος και $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές καθεμία με κατανομή την ίδια με αυτήν της X. Να δειχθεί ότι υπάρχει σταθερά $c_n \in (0,\infty)$, η οποία και να προσδιοριστεί, ώστε $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X_1$.

Θέμα 7. (15 Βαθμοί) Έστω $c > 0$ και $(U_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών καθεμία με κατανομή την ομοιόμορφη στο διάστημα $(0,c)$. Θέτουμε $S_n := \sum_{k=1}^{n} U_1U_2\cdots U_k$ για κάθε $n \geq 1$ και $S := \lim_{n\to\infty} S_n$.

(α) Για ποιά $c > 0$ ισχύει $\mathbf{E}(S) < \infty$;

(β) Για ποιά $c > 0$ ισχύει $S < \infty$ με πιθανότητα 1;

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Απαντήσεις

2. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις $\mathbf{E}X > 1$ και $\mathbf{E}X \leq 1$, και χρησιμοποιούμε τις ανισότητες Markov και Chebyshev.

3. Οι X, Z.

4. (α) Χρησιμοποιούμε το δεύτερο λήμμα Borel-Cantelli. Τα $A_n := \{X_n \geq n\}, n \geq 1$ είναι ανεξάρτητα με $\mathbf{P}(A_n) = \int_n^\infty x^{-2}\,dx = 1/n$. Άρα $\sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}(A_n) = \infty$.

(β) Ο νόμος μεγάλων αριθμών εφαρμόζεται αφού η $\mathbf{E}(X_1)$ ορίζεται και μάλιστα είναι ∞. Το όριο είναι ∞ με πιθανότητα 1.

5. Ισχύει το (β) με οριακή συνάρτηση την $X = 0$. Γνωστό θεώρημα δίνει ότι το (β) συνεπάγεται το (γ), και άλλο θεώρημα δίνει ότι το (γ) συνεπάγεται το (δ). Εναλλακτικά, χρησιμοποιούμε τους ορισμούς. Για το (α), το δεύτερο λήμμα Borel-Cantelli δίνει ότι με πιθανότητα 1 ισχύει $\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n = \infty$ ενώ $\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n = 0$.

6. $c_n = n^{1/\alpha}$.

7. (α) Για $c < 2$. (β) Για $c < e$. Αυτό γιατί

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} e^{T_k}$$

με $T_k = \log U_1 + \cdots + \log U_k$. Επειδή $\mathbf{E}(\log U_1) = \log c - 1$, από το νόμο μεγάλων αριθμών έχουμε με πιθανότητα 1,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_k}{k} = \log c - 1 \begin{cases} < 0 & \text{αν } c < e, \\ > 0 & \text{αν } c > e. \end{cases}$$

Με απλά επιχειρήματα δείχνουμε την σύγκλιση της σειράς για $c < e$ και την απόκλιση για $c > e$ (στην πρώτη περίπτωση οι όροι της μειώνονται εκθετικά, στην δεύτερη αυξάνονται εκθετικά). Για $c = e$, η Άσκηση 17.5 δίνει ότι $\overline{\lim}\, T_n = \infty$, άρα πάλι η $S = \infty$.