Πιθανότητες ΙΙ

Τελική Εξέταση, 11 Ιουνίου 2013

Θέμα 1. (30 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 2}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\{-1, 0, 1\}$ που ορίζονται σε κοινό χώρο πιθανότητας ώστε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει

$$\mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{n^2}, \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}, \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}.$$

Να δειχθεί ότι

(i) $X_n \to 0$ κατά πιθανότητα καθώς $n \to \infty$.

(i) Με πιθανότητα 1 ισχύει $\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n = 0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n = 1$.

Θέμα 2. (20 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή, δηλαδή $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ μετρήσιμη συνάρτηση.

(i) Τι λέμε κατανομή της X;

(ii) Έστω P^X η κατανομή της X. Να δειχθεί ότι για κάθε μετρήσιμη $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ισχύει

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dP^X(x).$$

Θέμα 3. (25 Βαθμοί) Έστω n θετικός ακέραιος και $\{X_k : 1 \leq k \leq n\}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με καθεμία να ακολουθεί την κατανομή Cauchy.

(i) Να δεχθεί ότι και η $(X_1 + \cdots + X_n)/n$ ακολουθεί την κατανομή Cauchy.

(ii) Ποιά είναι η πυκνότητα της $X_1 + \cdots + X_n$;

Θέμα 4. (20 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ώστε η X_n να είναι ομοιόμορφη διακριτή στο σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\}$. Για κάθε $n \geq 1$ θέτουμε $Y_n := X_n/n$. Να δειχθεί ότι $Y_n \Rightarrow Z$ (σύγκλιση κατά κατανομή) καθώς $n \to \infty$, όπου Z είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$.

Θέμα 5. (15 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbb{E}(X_1) = 2$. Θέτουμε $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ για κάθε $n \geq 1$. Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 το όριο

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - \sqrt{n})$$

υπάρχει στο $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ και να υπολογιστεί.

Σημείωση: Δίνεται ότι μια τυχαία μεταβλητή X με κατανομή την Cauchy έχει πυκνότητα

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1 + x^2}, x \in \mathbb{R}$$

και χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi_X(t) = e^{-|t|}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Λύσεις

1. (i) Για $\varepsilon > 0$ έχουμε[1]

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(X_n = -1) + \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \to 0$$

καθώς $n \to \infty$. Και το ζητούμενο έπεται.

(ii) Εφόσον οι X_n παίρνουν τιμές μόνο στο $\{-1, 0, 1\}$, από τον ορισμό των $\underline{\lim}, \overline{\lim}$, για να δείξουμε το ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι με πιθανότητα 1 έχουμε $X_n = -1$ μόνο για πεπερασμένα n ενώ $X_n = 0$ για άπειρα n και $X_n = 1$ για άπειρα n. Έστω

$$A_n := \{X_n = -1\}, B_n := \{X_n = 0\}, C_n := \{X_n = 1\}$$

για κάθε $n \geq 2$. Τότε

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty, \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) = \infty, \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(C_n) = \infty,$$

τα $\{B_n : n \geq 2\}$ είναι ανεξάρτητα, και τα $\{C_n : n \geq 2\}$ είναι ανεξάρτητα αφού οι $(X_n)_{n\geq 2}$ είναι ανεξάρτητες. Άρα από τα δύο λήμματα Borel-Cantelli έχουμε

$$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0, \mathbb{P}(\limsup_n B_n) = \mathbb{P}(\limsup_n C_n) = 1.$$

Άρα $\mathbb{P}((\liminf_n A_n^c) \cap (\limsup_n B_n) \cap (\limsup_n C_n)) = 1$, που είναι το ζητούμενο (χρησιμοποιήσαμε το ότι $(\limsup_n A_n)^c = \liminf_n A_n^c$).

2. (i) Κατανομή της X λέμε το μέτρο πιθανότητας $P^X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ με

$$P^X(A) := P(X^{-1}(A)) = P(X \in A)$$

για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (Σελ. 50 του βιβλίου των Jacod-Protter).

(ii) Θεώρημα 9.5 b).

3. (i) Η $Y_n := (X_1 + \cdots + X_n)/n$ έχει χαρακτηριστική συνάρτηση

$$\phi_{Y_n}(t) = \mathbb{E}(e^{it\frac{X_1}{n}} \cdots e^{it\frac{X_n}{n}}) = \phi_{X_1}(t/n) \cdots \phi_{X_n}(t/n) = e^{-|t/n|} \cdots e^{-|t/n|} = e^{-|t|} = \phi_{X_1}(t)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Από το θεώρημα μοναδικότητας για χαρακτηριστικές συναρτήσεις, έπεται ότι η Y_n έχει την ίδια κατανομή με την X_1, δηλαδή Cauchy.

(ii) Η συνάρτηση κατανομής της $X_1 + \cdots + X_n = nY_n$ σε οποιοδήποτε $x \in \mathbb{R}$ ισούται με

$$F_{nY_n}(x) = \mathbb{P}(nY_n \leq x) = \mathbb{P}\left(Y_n \leq \frac{x}{n}\right) = F_{X_1}\left(\frac{x}{n}\right).$$

Η τελευταία συνάρτηση είναι διαφορίσιμη με συνεχή παράγωγο

$$F'_{nY_n}(x) = F'_{X_1}\left(\frac{x}{n}\right)\frac{1}{n} = f_{x_1}\left(\frac{x}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1 + (x/n)^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{\pi}\frac{n}{n^2 + x^2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αυτή είναι η πυκνότητα της nY_n.

[1] Το $\leq$ είναι στην πραγματικότητα $=$ εκτός από την περίπτωση που $\varepsilon \geq 1$.

4. Η συνάρτηση κατανομής της Z είναι

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < 0, \\ x & \text{αν } x \in [0,1], \\ 1 & \text{αν } x > 1, \end{cases}$$

και τα σημεία συνέχειας της είναι όλο το $\mathbb{R}$. Για $x \in [0,1]$,

$$F_{Y_n}(x) = \mathbb{P}(X_n \leq nx) = \frac{[nx]}{n} \to x = F_Z(x)$$

για $n \to \infty$ (π.χ. $nx - 1 < [nx] \leq nx$, κ.λπ). Η σύγκλιση για τα υπόλοιπα $x \in \mathbb{R}$ είναι πιο εύκολη.

5. Από το νόμο των μεγάλων αριθμών, με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\frac{S_n}{n} \to \mathbb{E}(X_1) = 2.$$

Άρα η S_n απειρίζεται με γραμμική ταχύτητα, σαφώς γρηγορότερα από την $\sqrt{n}$. Έτσι

$$S_n - \sqrt{n} = n\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \to \infty \times 2 = \infty$$

καθώς $n \to \infty$.