# Πιθανότητες ΙΙ

## Τελική Εξέταση, 12 Φεβρουαρίου 2014

**Θέμα 1**. (25 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, ορισμένων σε κοινό χώρο πιθανότητας, ώστε

$$\mathbf{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2^n}, \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{2^n}$$

για κάθε $n \geq 1$. Θεωρούμε την (τυχαία) άπειρη σειρά $S = \sum_{n=1}^{\infty} X_n 3^n$.

(α) Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 η $S$ συγκλίνει σε πεπερασμένο αριθμό.

**(β)** Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι οι $(X_n)$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, να δοθεί μια έκφραση για την πιθανότητα η $S$ να συγκλίνει στο 30. Να δειχθεί ότι αυτή η πιθανότητα είναι θετική.

**Θέμα 2**. (20 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, και $B \in \mathcal{A}$ δεδομένο. Θέτουμε

$$\mathcal{C} := \{A \in \mathcal{A} : \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\}.$$

Να δειχθεί ότι η $\mathcal{C}$ είναι κλάση Dynkin.

Υπενθυμίζεται ότι μιά οικογένεια $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ λέγεται κλάση Dynkin στο $\Omega$ αν έχει τις εξής ιδιότητες: (1) $\Omega \in \mathcal{D}$ (2) Αν $A, B \in \mathcal{D}$ και $A \subset B$, τότε $B \backslash A \in \mathcal{D}$ και (3) αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία στην $\mathcal{D}$, τότε $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

**Θέμα 3**. (20 Βαθμοί) **(α)** Έστω σταθερή τυχαία μεταβλητή $X = c$ (με $c$ δεδομένη σταθερά). Να υπολογιστεί η χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi_X(t)$ της $X$.

**(β)** Έστω $Y$ τυχαία μεταβλητή με κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$, δηλαδή με συνάρτηση πιθανότητας $f_Y(k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ για $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots, \}$ και $f_Y(k) = 0$ για $k \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$. Να δειχθεί ότι η χαρακτηριστική της συνάρτηση ισούται με $\phi_Y(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

**Θέμα 4** (25 Βαθμοί) **(α)** Έστω $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$, και $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ώστε $X_n \sim \text{Poisson}(\lambda_n)$. Να δειχθεί ότι

$$\frac{X_n}{\lambda_n} \Rightarrow 1$$

καθώς $n \to \infty$ (σύγκλιση κατά κατανομή), όπου 1 συμβολίζει την σταθερή τυχαία μεταβλητή με τιμή 1.

**(β)** Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{0\leq k\leq nx} \frac{n^k}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < 1, \\ 1 & \text{αν } x > 1. \end{cases}$$

**Θέμα 5.** (20 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών ώστε $\mathbf{P}(X_1 = 0) = \mathbf{P}(X_1 = 1) = 1/2$. Να δειχθεί ότι υπάρχει ακολουθία $(a_n)_{n\geq 1}$ θετικών αριθμών ώστε με πιθανότητα 1 να ισχύει

$$\frac{1}{a_n}(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2)\{\log(X_1 + 1) + \log(X_2 + 1) + \cdots + \log(X_n + 1)\} \to 1$$

καθώς $n \to \infty$, και να προσδιορισθεί μια τέτοια ακολουθία.

**Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

## Λύσεις

**1.** Έστω $A_n := \{X_n \neq 0\}$ για κάθε $n \geq 1$. Έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Από το πρώτο λήμμα Borel-Cantelli έχουμε ότι έχει πιθανότητα 0 το σύνολο $C = \limsup_n A_n$. Έπειτα το $\Omega \backslash C$ έχει πιθανότητα 1, και για $\omega \in \Omega \backslash C$ υπάρχει δείκτης $n_0(\omega)$ ώστε $X_n(\omega) = 0$ για κάθε $n \geq n_0(\omega)$, οπότε $S(\omega) < \infty$.

**2.** Εφαρμογή του ορισμού.

**3.** Θεωρία.

**4.** **(α)** Υπολογίζουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση της $X_n/\lambda_n$.

$$\phi_{X_n/\lambda_n}(t) = \phi_{X_n}(t/\lambda_n) = e^{\lambda_n(e^{it/\lambda_n}-1)}.$$

Ο εκθέτης γράφεται

$$it\frac{e^{it/\lambda_n}-1}{it/\lambda_n}$$

και συγκλίνει στο $it$ για $n \to \infty$. Άρα $\lim_{n\to\infty} \phi_{X_n/\lambda_n}(t) = e^{it} = \phi_X(t)$, όπου $X$ είναι η σταθερή τυχαία μεταβλήτη με τιμή 1.

**(β)** Παίρνουμε $\lambda_n = n$ στο προηγούμενο ερώτημα. Η ποσότητα της οποίας το όριο αναζητούμε ισούται με

$$\mathbf{P}(X_n \leq nx) = \mathbf{P}\left(\frac{X_n}{n} \leq x\right) = F_{X_n/n}(x).$$

Έπειτα εφαρμόζουμε τον χαρακτηρισμό της σύγκλισης κατά κατανομή μέσω των συναρτήσεων κατανομής.

**5.** Εφαρμόζουμε το νόμο των μεγάλων αριθμών. $a_n = n^2\mathbf{E}(X_1^2)\mathbf{E}\{\log(X_1+1)\} = \frac{1}{4}n^2\log 2$.